Indledning.
Den moderne sandsynlighedsteori, hvis aksiomatiske basis blev formuleret af russeren A.N. Kolmogorov i 1933 i bogen *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, er bygget op omkring et tripel ofte betegnet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Her er Ω en ikke-tom mængde tit omtalt som *det basale udfaldsrum*, da det i mange sammenhænge er relevant at tænke på de enkelte punkter i Ω som mulige udfald (elementar udfald) af det komplekse (tilfældige) system, man ønsker at beskrive. Det eksplicitte valg af Ω varierer meget. Hvis det f.eks. drejer sig om kast med en terning, er det nærliggende at lade Ω være mængden $\{1, \ldots, 6\}$, hvorimod det i forbindelse med prisfastsættelse af f.eks. obligationer er naturligt at lade Ω være en delmængde af mængden af ikke-negative funktioner defineret på et interval $[0, T]$, hvor T er den tidshorisont, man ønsker at benytte.
$\mathcal{F}$, der betegnes modellens *hændelsessystemet*, består af de samlinger af elementar udfald, vi er interesserede i. D.v.s. et element A i $\mathcal{F}$ en såkaldt *hændelse* er en delmængde af Ω. $\mathcal{F}$ er derfor en delmængde af mængden af alle delmængder af Ω, d.v.s. mængden

$$\{A \mid A \subseteq \Omega\}.$$

Denne kaldes også *potensmængden* over Ω, og betegnes ofte 2^Ω. Notationen beror på, at 2^Ω kan opfattes som mængden af funktioner fra $\Omega \to \{0, 1\}$, og relationen

$$2^\Omega \ni f \to \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = 1\}$$

definerer tydeligvis en bijektion mellem 2^Ω og $\{A \mid A \subseteq \Omega\}$.

Det forlanges, at $\mathcal{F}$ opfylder flg. tre betingelser

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ hvis $A_1, \ldots A_n, \cdots \in \mathcal{F}$.

Kravene 1), 2) og 3) udtrykkes kort ved at sige, at $\mathcal{F}$ er en *σ-algebra* i Ω.

Triplets sidste del er det såkaldte *sandsynlighedsmål* P, d.v.s. en funktion fra $\mathcal{F} \to [0, 1]$. Dens værdi $P(A)$ på en hændelse $A \in \mathcal{F}$ kaldes *sandsynligheden for* A eller synonymt *sandsynligheden for at* A *indtræffer*. Udover kravet om, at alle sandsynligheder skal ligge mellem 0 og 1, kræves yderligere

1) $P(\Omega) = 1$

2) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ hvis $A_1, \ldots A_n, \cdots \in \mathcal{F}$ er parvis disjunkte.

1) udtrykker, at den sikre hændelse indtræffer med sandsynlighed 1, og 2) omtales som den *tællige additivitet*. Denne medfører, som vi senere skal se, det intuitivt lettere forståelige begreb *endelig additivitet*, d.v.s.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{for disjunkte hændelser } A, B \in \mathcal{F}.$$

Omvendt kan 2) d.v.s. tællelig additivitet erstattes med et krav om endelig additivitet samt *voksende kontinuitet*, d.v.s.

$$P(A_n) \uparrow P(A) \quad \text{hvis } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \quad \text{og } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Potensmængden over Ω er klart en σ-algebra i Ω, og man kan undre sig over, hvorfor man ikke altid lader denne udgøre hændelsessystemet, d.v.s. antager at enhver delmængde er en hændelse. Men for 'store' Ω, f.eks. $\Omega = \mathbf{R}$, er 'antallet' af delmængder af Ω så utroligt stort, at den tællige additivitet for alle sæt af parvis disjunkte mængder kun kan være opfyldt under meget strenge krav, som udelukker mange interessante mål.

For at kunne udvikle den ønskede mængde sandsynlighedsteori må vi først gennemgå lidt abstrakt mål og integralteori. Dette foregår i et generelt *målrum* $(E, \mathcal{E}, \mu)$, hvor $(E, \mathcal{E})$ er et såkaldt *måleligt rum*, d.v.s. en ikke-tom mængde udstyret med en σ-algebra, og μ er et *mål* på $\mathcal{E}$, d.v.s. $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ opfyldende

$$\mu(\emptyset) = 0 \;\text{ og }\; \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{ for parvis disjunkte } A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{E}.$$

Stoffet, der svarer til de første 8 afsnit i noterne, omhandler ligeledes de såkaldte *målelige funktioner*, et begreb der i en sandsynlighedsteoretisk sammenhæng svarer til stokastiske variable. Gennemgangen forventes at strække sig over første kvarter, d.v.s. indtil efterårsferien. I andet kvarter vender vi os mod studiet af et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Det vigtige begreb *uafhængighed* indføres, og integralteorien udnyttes til at definere begrebet *middelværdi*. Efteråret afsluttes med en diskussion af eksistens af specifikke målrum, d.v.s. konstruktion af mål med forudgivne værdier på særligt pæne mængder. Et vigtigt eksempel er her konstruktionen af *længdemålet* på den reelle akse $\mathbf{R}$ ud fra dets værdier på intervallerne.

Målelige rum.
Den matematiske ramme for målteorien er et såkaldt *måleligt rum* $(E, \mathcal{E})$, bestående af en ikke tom mængde E og en delmængde $\mathcal{E}$ af 2^E, mængden af alle delmængder af E, som opfylder

$$(1):\ E \in \mathcal{E}, \quad (2):\ A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E} \ \text{ og } \ (3):\ (A_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}.$$

Elementerne i $\mathcal{E}$ kaldes ofte de *målelige* mængder. A^c betegner her komplementet til A i E, d.v.s.

$$A^c := E \backslash A = \{e \in E \,|\, e \notin A\}.$$

Da $A = (A^c)^c$ kan (2) ækvivalent formuleres som: $A \in \mathcal{E} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{E}$.

Et mængdesystem i E, eller synonymt mængde af delmængder af E, som opfylder (1), (2) og (3), d.v.s. indeholder hele mængden E samt er stabil under komplementær og tællelig foreningsmængde dannelse (C-stabil og $\bigcup$c-stabil), kaldes en *σ-algebra* af delmængder i E eller kort en σ-algebra i E. Et måleligt rum er altså en mængde udstyret med en σ-algebra af delmængder.
Da $E^c = \emptyset$ ses af (1) og (2) at enhver σ-algebra indeholder den tomme mængde $\emptyset$, og da

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \qquad \text{hvor } B_i = A_{i \wedge n}\ i \geq 1,$$

sikrer (3) ligeledes stabilitet under endelig foreningsmængde dannelse ($\bigcup$f-stabil), d.v.s.

$$(4):\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{E}.$$

Et mængdesystem $\mathcal{A}$ i E, der opfylder punkterne (1), (2) og (4), kaldes en *algebra* i E. Enhver σ-algebra er derfor specielt en algebra, hvorimod eksempler (se nedenfor) viser, at der findes algebraer, der ikke er σ-algebraer. Simpel induktion viser, at (4) ækvivalent kan formuleres som

$$A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}.$$

Da mængdeoperationerne fællesmængde og differensmængde dannelse kan dannes ved hjælp af foreningsmængde og komplementærmængde dannelse via formlerne

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \ \text{ og } \ A \backslash B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$$

har vi flg. resultat vedrørende algebraer og σ-algebraer.

Lemma 1 *Enhver algebra $\mathcal{A}$ er stabil under endelig fællesmængde samt mængdedifferens dannelse, d.v.s.*

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A} \ \text{ og } \ A \backslash B \in \mathcal{A}.$$

Yderligere er en enhver σ-algebra stabil under tællelig fællesmængde dannelse.

Bevis. Formlerne $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ og $A \backslash B = (A^c \cup B)^c$ viser, at enhver algebra er stabil under endelig fællesmængde samt mængdedifferens dannelse. D.v.s. $\bigcap$f-stabil og $\backslash$-stabil. Tilsvarende viser flg. identitet gældende for vilkårlige mængder $A_1, A_2, \cdots$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c ,$$

at σ-algebraer er stabile under tællelig fællesmængde dannelse ($\bigcap$c-stabil). For hvis A_i'erne er elementer i en σ-algebra $\mathcal{E}$, gælder dette også A_i^c'erne og dermed den tællelige foreningsmængde $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$ tillige med dens komplement. $\diamond$

Øvelse 1. Sæt $E = \mathbf{R}$. Definer

$$\mathcal{B} := \{ A \subseteq \mathbf{R} \,|\, A \text{ eller } A^c \text{ er tællelig} \} \text{ og } \mathcal{A} := \{ A \subseteq \mathbf{R} \,|\, A \text{ eller } A^c \text{ er endelig} \}.$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en σ-algebra, og at $\mathcal{A}$ er en algebra, men ikke en σ-algebra. $\square$

Hvis grundmængden E indeholder mere end to elementer, findes der mindst to forskellige σ-algebraer i E nemlig mængdesystemerne $\{\emptyset, E\}$ og 2^E. Disse udgør h.h.v. den mindste og den største σ-algebra i E, thi for enhver anden σ-algebra $\mathcal{E}$ i E er

$$\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{E} \subseteq 2^E.$$

De er dog sjældent interessante, thi den første er generelt for lille og den anden for stor, i hvert fald hvis E er overtællelig, d.v.s. ikke tællelig.

Det er ikke svært at se, at hvis $\mathcal{E}_1$ og $\mathcal{E}_2$ er σ-algebraer i E, så gælder dette også

$$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 := \{ B \in 2^E \,|\, B \in \mathcal{E}_1 \text{ og } B \in \mathcal{E}_2 \},$$

da

(1) $E \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ da $E \in \mathcal{E}_1$ og $E \in \mathcal{E}_2$.

(2) $A \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \Rightarrow A \in \mathcal{E}_i$ og dermed $A^c \in \mathcal{E}_i$ for $i = 1, 2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$.

(3) $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \Rightarrow (A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}_i$ og dermed $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}_i$ for $i = 1, 2$, d. v.s. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$.

Argumentet generaliserer uændret til en vilkårlig familie af σ-algebraer, hvilket åbner mulighed for, at definere σ-algebraer af typen 'mindste' σ-algebra der indeholder et givent sæt af mængder $\mathcal{G}$. Ordet 'mindste' skal her forstås i h.h.t. inklusion. For da 2^E er en σ-algebra, som indeholder $\mathcal{G}$, er der ved definitionen

$$\sigma(\mathcal{G}) := \bigcap \mathcal{F}$$

hvor $\mathcal{F}$ gennemløber alle σ-algebraer, som indeholder $\mathcal{G}$, d.v.s. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, defineret en σ-algebra i E, og $\sigma(\mathcal{G})$ er den mindste, der indeholder $\mathcal{G}$, da den pr. definition er indeholdt i enhver σ-algebra $\mathcal{F}$, som indeholder $\mathcal{G}$. $\sigma(\mathcal{G})$ er derfor lig $\mathcal{G}$, hvis $\mathcal{G}$ er en σ-algebra, d.v.s. specielt

$$\sigma(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G}),$$

og ligeledes er

$$\sigma(\mathcal{G}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{G}_2) \quad \text{hvis} \quad \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2.$$

$\sigma(\mathcal{G})$ omtales naturligt nok som den af $\mathcal{G}$ frembragte σ-algebra; og da en σ-algebra som nævnt er C-, $\bigcup$c- og $\bigcap$c-stabil, er

$$\mathcal{G}^c \cup \mathcal{G}_\sigma \cup \mathcal{G}_\delta \subseteq \sigma(\mathcal{G})$$

og dermed, da $\mathcal{G}$ er indeholdt i både $\mathcal{G}_\sigma$ og $\mathcal{G}_\delta$,

$$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}^c) = \sigma(\mathcal{G}_\sigma) = \sigma(\mathcal{G}_\delta).$$

Vi har her brugt notationen

$$\mathcal{G}^c := \{G^c \,|\, G \in \mathcal{G}\}, \;\; \mathcal{G}_\sigma := \{\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \,|\, G_i \in \mathcal{G} \;\; i \geq 1\}, \;\; \mathcal{G}_\delta := \{\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \,|\, G_i \in \mathcal{G} \;\; i \geq 1\}.$$

Eksempler. Det overlades til læseren at eftervise de ubeviste påstande.

1) $\sigma(\{A\}) = \{A, A^c, \emptyset, E\}$.

2) Hvis $\{A_1, \ldots, A_n\}$ udgør en endelig *partition* af E, d.v.s. er parvis disjunkte, $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$, og $E = \bigcup_{i=1}^n A_i$, er

$$\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \{B \subseteq E \,|\, B = \bigcup_{i \in I} A_i, \;\; I \subseteq \{1, \ldots, n\}\}.$$

Antallet af elementer i $\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$ er derfor højst 2^n, med lighedstegn hvis $A_i \neq \emptyset$ for $i = 1, \ldots, n$.

Argument. Lad $\mathcal{G}$ betegne $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Da højresiden netop er $\mathcal{G}_\sigma$, er den indeholdt i $\sigma(\mathcal{G})$, og der vil derfor gælde $=$, hvis $\mathcal{G}_\sigma$ i denne situation udgør en σ-algebra. Men dette følger af formlerne

$$E = \bigcup_{i \in \{1, \ldots, n\}} A_i, \quad (\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I^c} A_i \quad \text{og} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i \in I_n} A_i) = \bigcup_{i \in \cup_{n=1}^{\infty} I_n} A_i.$$

Resultatet generaliserer med samme argument til følgende.

3) Hvis $(A_i)_{i \geq 1}$ udgør en tællelig partition af E, d.v.s. A_i'erne er parvis disjunkte og $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, er

$$\sigma((A_i)_{i \geq 1}) = \{B \subseteq E \,|\, B = \bigcup_{i \in I} A_i, \;\; I \subseteq N\}.$$

Hvis $A_i \neq \emptyset$ for mere end endelig mange i, er $\sigma((A_i)_{i \geq 1})$ overtællelig.

Hvis mængderne i 2) og 3) ikke er disjunkte, er situationen mindre gennemskuelig. Betragt f.eks. et vilkårligt endeligt sæt $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Til enhver af de 2^n forskellige delmængder I af $\{1, \ldots, n\}$ tilordnes en mængde B_I bestemt ved

$$B_I := \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in I^c} A_i^c.$$

Det overlades til læseren at indse, at det herved fremkomne sæt $\{B_1, \ldots, B_{2^n}\}$ udgør en endelig partition af E, samt at

$$\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \sigma(\{B_1, \ldots, B_{2^n}\}).$$

Antallet af elementer i $\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$ er derfor 2^m, hvor m er antallet af ikke-tomme B_i'er, d.v.s. $m = 2^n$, hvis ingen af B_i'erne er tomme.

Notation. En σ-algebra $\mathcal{E}$ siges at være *tællelig frembragt*, hvis $\mathcal{E} = \sigma((A_n)_{n\geq 1})$ for en følge $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq 2^E$.

Bemærk at enhver tællelig frembragt σ-algebra $\mathcal{E}$ er på formen $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$, hvor $\mathcal{A}$ er en algebra indeholdende højst tællelig mange elementer, f.eks.

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\{A_1, \ldots, A_n\}), \quad \text{hvis } \mathcal{E} = \sigma((A_n)_{n\geq 1}).$$

I mange teoretiske sammenhænge er det givne system $\mathcal{G}$ stabil under endelig gennemsnit (synonym for fællesmængde), d.v.s.

$$A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}.$$

Denne situation er speciel vigtig, fordi $\sigma(\mathcal{G})$, som vi nu skal se, her kan beskrives på en alternativ simplere måde. For lettere at kunne formulere resultatet, der er kendt under navnet *Dynkin's Lemma*, indføres flg. notation.

Notation. $\mathcal{D} \subseteq 2^E$ kaldes et d-system, hvis $\mathcal{D}$ opfylder flg. tre punkter

a) $E \in \mathcal{D}$

b) $A, B \in \mathcal{D}$ og $B \subseteq A \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{D}$

c) $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{D}$ og $A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Da $B^c = E \backslash B$ sikrer a) og b) stabilitet under komplementærmængde dannelse. Punkt c) udtrykkes kort ved at sige, at $\mathcal{D}$ er $\uparrow$-stabil, d.v.s. lukket under tællelig voksende forening. Da $\mathcal{D}$ er stabil under komplementærmængde dannelse, er den ligeledes $\downarrow$-stabil, d.v.s. lukket under tællelig aftagende gennemsnit.

I overensstemmelse med det tidligere defineres for ethvert $\mathcal{G} \subseteq 2^E$

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) := \bigcap \mathcal{D}$$

hvor $\mathcal{D}$ gennemløber alle d-systemer, som indeholder $\mathcal{G}$, d.v.s. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$.
Simple argumenter viser, at $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ er det mindste d-system, som indeholder $\mathcal{G}$. Med denne notation på plads gælder.

Lemma 2 Dynkin's Lemma.
Hvis $\mathcal{G} \subseteq 2^E$ er stabil under endelig gennemsnit, er $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{D}(\mathcal{G})$.

Bevis. Da enhver σ-algebra er et d-system, er inklusionen $\supseteq$ klar, og den anden følger pr. definition af $\sigma(\mathcal{G})$, hvis vi viser, at $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ er en σ-algebra, d.v.s. opfylder (1), (2) og (3) på side 3. Her er (1) og (2) allerede klaret. Hvad angår (3) viser den generelle identitet

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right),$$

at $\bigcup$c-stabilitet og $\bigcup$f-stabilitet er det samme for $\uparrow$-stabile mængdesystemer, og da $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ er $\uparrow$-stabil, mangler vi derfor kun at vise, at $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ er stabil under endelig foreningsmængde dannelse. Men da $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, som nævnt, er stabil under komplementærmængde dannelse, er dette ækvivalent med at vise stabilitet under endelig fællesmængde dannelse, d.v.s. $A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ for alle $A, B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$.
Lad hertil $G \in \mathcal{G}$ være givet. Betragt flg. delmængde af $\mathcal{D}(\mathcal{G})$

$$\mathcal{D}(G) := \{B \in \mathcal{D}(\mathcal{G}) \,|\, B \cap G \in \mathcal{D}(\mathcal{G})\}.$$

Udnyttes at $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ er et d-system, ses umiddelbart at $\mathcal{D}(G)$ ligeledes er et d-system, og da den pr. antagelse indeholder $\mathcal{G}$, er den lig $\mathcal{D}(\mathcal{G})$. D.v.s. $G \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ for alle $G \in \mathcal{G}$ og $B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$. Vælg dernæst et $A \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ og definer tilsvarende

$$\mathcal{D}(A) := \{B \in \mathcal{D}(\mathcal{G}) \,|\, A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})\}.$$

Ifølge det netop viste er $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{G})$, og da $\mathcal{D}(A)$ tilsvarende ses at være et d-system, er $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{G})$. Da dette gælder for ethvert A i $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, har vi hermed vist den ønskede stabilitet under endelig fællesmængde dannelse. $\diamond$

Vi vil i det følgende møde mange 'minimal' σ-algebraer. Et første vigtigt eksempel er den såkaldte *produkt σ-algebra* $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ på produktrummet $E \times F$, dannet ud fra to givne målelige rum $(E, \mathcal{E})$ og $(F, \mathcal{F})$. Udtrykt i den ovenfor indførte notation er

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} := \sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathcal{E},\, \mathcal{B} \in \mathcal{F}\}),$$

d.v.s. produkt σ-algebraen er den mindste σ-algebra i $E \times F$, der indeholder alle produktmængder, hvis sider er målelige. Skønt således frembragt af produktmængder er det værd at understrege, at $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ indeholder mængder, som ikke er af produkttype. Bemærk at mængden af kasser med målelige sider er stabil under endelig gennemsnit, idet

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Proceduren udvider umiddelbart til situationer med endelig eller endog tællelig mange faktorer. For at spare plads bruges ofte notation som $(\prod_{i=1}^{n} E_i, \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i)$, og hvis faktorerne er ens skrives f.eks. $\mathcal{E}^2$ i stedet for $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.

Vigtig regel. For at vise, at alle elementer i en σ-algebra af typen $\sigma(\mathcal{G})$ har en given egenskab p, er det nok at vise, at ethvert $G \in \mathcal{G}$ har egenskaben p, samt at

$$\mathcal{E}_p := \{A \subseteq E \,|\, A \text{ har egenskaben } p\}$$

udgør en σ-algebra i E. Thi i så fald har vi altså, at $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}_p$ og dermed $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{E}_p$, da $\mathcal{E}_p$ er en σ-algebra. Hvis $\mathcal{G}$ er stabil under endelig gennemsnit, er det nok at vise, at $\mathcal{E}_p$ er et d-system.

Øvelse 2. Vis at et mængdesystem $\mathcal{E} \subseteq 2^E$ er en σ-algebra, hvis og kun hvis $\mathcal{E}$ er både en algebra og et d-system.
Definer for ethvert $\mathcal{G} \subseteq 2^E$

$$\mathcal{M}o(\mathcal{G}) := \bigcap M$$

hvor M gennemløber alle $\uparrow\downarrow$-stabile mængdesystemer indeholdende $\mathcal{G}$.
Overvej at $\mathcal{M}o(\mathcal{G})$ er $\uparrow\downarrow$ stabil og konkluder her ud fra, at $\mathcal{M}o(\mathcal{G})$ er det mindste mængdesystem, der indeholder $\mathcal{G}$ og er $\uparrow\downarrow$ stabil.
Vis dernæst at $\mathcal{M}o(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$, hvis $\mathcal{A}$ er en algebra.
Vink: Vis at $\mathcal{M}o(\mathcal{A})$ er en algebra, d.v.s. C-stabil og $\bigcup f$-stabil. Kopier bevisteknikken i Dynkin's lemma. $\square$

Borel σ-algebraer.
Lad (S, d) betegne et metrisk rum. Vigtige eksempler er som bekendt $\mathbf{R}$ eller mere generelt $\mathbf{R}^n$ udstyret med den sædvanlige Euklidiske metrik. Lad $\mathcal{U}$ betegne mængden af åbne delmængder af S, d.v.s. en delmængde $U \subseteq S$ ligger i $\mathcal{U}$ hvis

$$\forall\, x \in U \;\exists\, r > 0 : \; b(x,r) \subseteq U,$$

hvor $b(x,r) = \{y \in S \mid d(x,y) < r\}$ er den *åbne kugle* med centrum x og radius r. (Overvej at $b(x,r)$ er åben.) Ud fra de åbne mængder defineres den såkaldte *Borel* σ-algebra $\mathcal{B}(S)$ som den mindste σ-algebra, der indeholder alle åbne mængder, d.v.s.

$$\mathcal{B}(S) := \sigma(\mathcal{U}).$$

Da mængdesystemet $\mathcal{U}^c = \{G^c \mid G \subseteq S \text{ åben}\}$ pr. definition netop er mængden af lukkede delmængder af S, kan $\mathcal{B}(S)$ ækvivalent beskrives som den mindste σ-algebra, der indeholder alle lukkede delmængder af S. Hvis ikke andet eksplicit siges, er det altid Borel σ-algebraen, man benyter i et metrisk rum, og ligesom mængden af åbne mængder ændres den ikke ved skift til en ækvivalent metrik.
Hvis (S, d) er *separabel*, d.v.s. der findes en tællelig delmængde $(x_i)_{i \geq 1} \subseteq S$, så at

$$\forall\, x \in S \;\forall\, r > 0 \;\exists\, i \geq 1 : \; x_i \in b(x,r)$$

(man udtrykker dette ved at sige, at $(x_i)_{i \geq 1}$ er *tæt* i S), kan $\mathcal{B}(S)$ også beskrives, som σ-algebraen frembragt af alle åbne kugler i (S, d). Thi hvis $(x_i)_{i \geq 1}$ er en tællelig tæt mængde i S, gælder for enhver åben delmængde U i S, at

$$U = \bigcup_{(i,j),\, b(x_i, j^{-1}) \subseteq U} b(x_i, j^{-1}).$$

Bevis. (tænk på $\mathbf{R}$ med den sædvanlige metrik)
Lad $x \in U$ være givet. Da U er åben, findes der et $j \geq 1$, så at $b(x, j^{-1}) \subseteq U$. Vælg nu $x_i \in b(x, (2j)^{-1})$ og betragt kuglen $b(x_i, (2j)^{-1})$. De grundlæggende egenskaber ved en metrik, specielt trekantsuligheden, sikrer, at

$$x \in b(x_i, (2j)^{-1}) \subseteq b(x, j^{-1}) \subseteq U,$$

hvilket viser den postulerede lighed. ◇

I separable metriske rum er enhver åben mængde altså en tællelig foreningsmængde af åbne kugler, og Borel σ-algebraen er derfor frembragt af de åbne kugler. Bemærk at argumentet mere præcist viser, at

$$\mathcal{B}(S) = \sigma(\{b(x_i, j^{-1}) \mid i, j \geq 1\}),$$

d.v.s. $\mathcal{B}(S)$ er tællelig frembragt, hvis (S, d) er separabel.

Lad os for et øjeblik se, hvad dette betyder i tilfældet $\mathbf{R}$ og $\mathbf{R}^n$. Disse rum er separable, thi $\mathbf{Q}$ og $\mathbf{Q}^n$, d.v.s. punkterne i $\mathbf{R}^n$ med rationale koordinater, er tællelige tætte delmængder af h.h.v. $\mathbf{R}$ og $\mathbf{R}^n$. Dette betyder, at

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\{\,]\,a,b\,[\;|\; -\infty < a < b < \infty\}),$$

thi intervallerne af formen $]\,a,b\,[$ for $-\infty < a < b < \infty$ er netop de åbne kugler i den Euklidiske metrik, da

$$b(x,r) =]\,x-r, x+r\,[\quad \text{og dermed} \quad]a,b[= b((a+b)/2, (b-a)/2).$$

Tilsvarende er

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \sigma(\{\prod_{i=1}^{n}\,]\,a_i,b_i\,[\;|\; -\infty < a_i < b_i < \infty \;\; i = 1,\dots,n\}),$$

hvor

$$\prod_{i=1}^{n}\,]\,a_i,b_i\,[= \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n \,|\, a_i < x_i < b_i \;\; i = 1,\dots,n\}.$$

Det flerdimensionale tilfælde indses lettest ved at bruge metrikken

$$d_\infty(\underline{x},\underline{y}) := \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i| \qquad \text{for } \underline{x} = (x_i)_{1\le i\le n},\ \underline{y} = (y_i)_{1\le i\le n} \in \mathbf{R}^n.$$

d_∞ er ækvivalent med den Euklidiske metrik på $\mathbf{R}^n$, og de tilhørende åbne kugler er af formen $\prod_{i=1}^n]\,a_i,b_i\,[$, hvor kantlængden $b_i - a_i$ er uafhængig af i.

Men der findes mange andre frembringersystemer. F.eks. viser identiteterne øverst side 5 sammen med ligheden

$$]\,a,b\,[= \bigcup_{n=1}^{\infty}[\,a+1/n, b-1/n\,],$$

at $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ også er frembragt af mængden af lukkede intervaller (detaljerne overlades til læseren). Til senere brug fremhæves specielt flg. resultat. Bemærk at de to frembringersystemer begge er stabile under endelig gennemsnit.

Lemma 3 *$\mathcal{B}(\mathbf{R})$ er frembragt af mængdesystemet $\{(-\infty,b\,]\,|\,b \in \mathbf{R}\}$, og tilsvarende er $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ frembragt af $\{\prod_{i=1}^n(-\infty,b_i\,]\,|\,b_i \in \mathbf{R}\ i = 1,\dots,n\}$.*

Bevis. Vi viser kun det endimensionale tilfælde. Det generelle går analogt. Lad $\mathcal{B}$ betegne $\sigma(\{(-\infty,b\,]\,|\,b \in \mathbf{R}\})$. Da $(-\infty,b\,]$ er en lukket mængde, er

$$\mathcal{B} \subseteq \sigma(\{\text{lukkede mængder}\}) = \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

D.v.s. det drejer sig om at vise, at $\mathcal{B}$ er stor nok, f.eks. at den indeholder ethvert åbent interval $]\,a,b\,[$. Men dette fås for alle $a < b$ af ligheden

$$]\,a,b\,[= (-\infty,b\,[\setminus(-\infty,a\,] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,b-1/n\,] \cap (-\infty,a\,]^c.$$

Øvelse 3. Definer for alle $\underline{i} \in \mathbf{Z}^n$ og $k \geq 1$

$$D^k_{\underline{i}} := \prod_{j=1}^{n}](i_j - 1) \cdot 2^{-k}, i_j \cdot 2^{-k}].$$

Vis at mængden af disse akseparallelle *dyadiske kasser* frembringer $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$, samt at $\{D^k_{\underline{i}} \,|\, \underline{i} \in \mathbf{Z}^n,\ k \geq 1\} \cup \{\emptyset\}$ er stabil under gennemsnit. □

Hvis (S, d) er et metrisk rum, er det naturligt at udstyre produktrummet S^n med en såkaldt *produktmetrik*. En metrik $\tilde{d}$ på S^n kaldes en produktmetrik, hvis $\tilde{d}$-konvergens af en punktfølge i S^n er ækvivalent med d-konvergens af de n tilhørende koordinatfølger, d.v.s.

$$\lim_k \underline{x}_k = \underline{x} \quad \text{i } (S^n, \tilde{d}) \ \Leftrightarrow\ \lim_k x_{k,i} = x_i \ \ i = 1, \ldots, n \quad \text{i } (S, d).$$

hvor $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$ og $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Bemærk at S^n er separabel i enhver produktmetrik, hvis S er separabel. F.eks. er

$$\{(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}) \,|\, k_i \geq 1 \ i = 1, \ldots, n\},$$

tæt i S^n, hvis $(x_k)_{k \geq 1}$ er tæt i S. Vigtige eksempler på produktmetrikker er

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i),\ \ d_1(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i) \text{ og } d_2(\underline{x}, \underline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i)^2}$$

for $\underline{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $\underline{y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in S^n$. (Tænk over dette)

Da S^n kan opfattes både som et produktrum og et metrisk rum, er $\mathcal{B}(S)^n$ og $\mathcal{B}(S^n)$ to naturlige σ-algebraer på S^n. Det er derfor oplagt at undersøge deres indbyrdes sammenhæng. Sætning 1 nedenfor viser, at der altid gælder $\mathcal{B}(S)^n \subseteq \mathcal{B}(S^n)$, men hvis S er separabel, gælder der, som vi nu skal vise, lighedstegn.

Proposition 1 *For ethvert separabelt metrisk rum (S, d) er $\mathcal{B}(S)^n = \mathcal{B}(S^n)$ for $n \geq 2$. Specielt er $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R})^n$ for $n \geq 2$.*

Bevis. Af overskueligheds grunde betragtes kun tilfældet $n = 2$. Da Borel σ-algebraen er uafhængig af, hvilken produktmetrik der anvendes, udstyres $S \times S$ med metrikken d_∞, d.v.s.

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) := d(x_1, y_1) \vee d(x_2, y_2) \quad \underline{x} = (x_1, x_2),\ \underline{y} = (y_1, y_2) \in S \times S.$$

Kuglerne i denne metrik er produktmængder, idet

$$b(\underline{x}, r) = b(x_1, r) \times b(x_2, r) \ \ \text{for } r > 0,\ \underline{x} = (x_1, x_2) \in S \times S.$$

Da S er separabel, er $S \times S$, som nævnt, separabel i d_∞-metrikken. Enhver åben mængde $U \subseteq S \times S$ er derfor en tællelig foreningsmængde af produktmængder og dermed element i $\mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S) = \mathcal{B}(S)^2$. D.v.s.

$$\mathcal{B}(S^2) = \sigma(\{U \,|\, U \subseteq S \times S \text{ åben}\}) \subseteq \mathcal{B}(S)^2.$$

For at vise den anden inklusion betragtes mængdesystemet

$$\mathcal{B}_1 := \{A \in \mathcal{B}(S) \,|\, A \times S \in \mathcal{B}(S^2)\}.$$

Formlerne

$$S \times S = S^2, \quad A^c \times S = (A \times S)^c \text{ og } \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \times S = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times S).$$

viser, at $\mathcal{B}_1$ er en σ-algebra; og da $U \times S$ er åben i S^2 og dermed element i $\mathcal{B}(S^2)$ for enhver åben mængde U, indeholder $\mathcal{B}_1$ alle åbne mængder og udgør derfor hele $\mathcal{B}(S)$. Tilsvarende vises

$$S \times B \in \mathcal{B}(S^2) \text{ for alle } B \in \mathcal{B}(S),$$

og derfor

$$A \times B = (A \times S) \cap (S \times B) \in \mathcal{B}(S^2) \text{ for alle } A, B \in \mathcal{B}(S),$$

hvilket pr. definition af $\mathcal{B}(\mathbf{R})^2$ viser den manglende inklusion. ◇

Øvelse 4. Lad (S,d) betegne et metrisk rum. Vis at enhver lukket mængde F er et tælleligt gennemsnit af åbne mængder. Vink: Vis og udnyt at

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \quad \text{hvor } G_n := \bigcup_{x \in F} b(x, 1/n).$$

Overgang til komplementet viser derfor, at enhver åben mængde er en tællelig foreningsmængde af lukkede mængder. Deducer herudfra, at $\mathcal{B}(S) = \mathcal{M}o(\mathcal{G})$, hvor $\mathcal{G}$ enten er mængden af alle åbne mængder h.h.v. mængden af alle lukkede mængder. Vink: Kopier fremgangsmåden i Øvelse 2. □

Lad mig som afslutning bare nævne, at hvis A er en ikke-tom delmængde af et metrisk rum (S,d), så er (A,d) igen et metrisk rum, og den tilhørende Borel σ-algebra $\mathcal{B}(A)$ opfylder

$$\mathcal{B}(A) = \{A \cap B \,|\, B \in \mathcal{B}(S)\},$$

d.v.s. $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(S)$ hvis $A \in \mathcal{B}(S)$. Ligheden skyldes, at en delmængde $U \subseteq A$ er åben i (A,d), hvis og kun hvis

$$U = A \cap \tilde{U} \quad \text{hvor } \tilde{U} \text{ er åben i } (S,d).$$

Bemærk at (A,d) er separabel, hvis (S,d) er separabel. For hvis $(x_n)_{n\geq 1}$ er tæt i (S,d), så er, idet y betegner et fast punkt i A, $(y_{n,k})_{n,k\geq 1}$ tæt i (A,d), hvor for givne $n,k \geq 1$ punktet $y_{n,k}$ er valgt i h.h.t.

$$y_{n,k} \in A \cap b(x_n, 1/k) \text{ hvis denne mængde er ikke-tom og } y_{n,k} = y \text{ ellers.}$$

Målelige funktioner.
I det følgende betegner $(E, \mathcal{E})$ og $(F, \mathcal{F})$ målelige rum. Som det er naturligt i mange matematiske sammenhænge, betragtes afbildninger mellem E og F, som harmonerer med den givne målelige struktur. Disse såkaldte målelige afbildninger defineres som følger.

Definition En funktion $f : E \to F$ er *målelig*, mere præcist $(\mathcal{E}, \mathcal{F})-$*målelig*, hvis $f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{E}$ d.v.s.

$$f^{-1}(B) := \{e \in E \,|\, f(e) \in B\} \in \mathcal{E} \quad \text{for alle } B \in \mathcal{F}.$$

En funktion er altså målelig, hvis og kun hvis urbilledet af enhver målelig mængde i F er en målelig mængde i E. I stedet for $f^{-1}(B)$ skrives ofte kort $\{f \in B\}$.
Vi skal i dette afsnit udlede forskellige egenskaber ved målelige funktioner samt i vigtige specialtilfælde undersøge, hvordan målelighed eftervises. Som bekendt bevares de gængse mængdeoperationer ved inversbilled-dannelse, specielt er

$$f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i) \quad \text{og} \quad f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c.$$

Dette viser, at for enhver funktion $f : E \to F$ er

$$\{f^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{F}\} \quad \text{og} \quad \{B \subseteq F \,|\, f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\}$$

σ-algebraer i h.h.v. E og F og dermed

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{G})).$$

for ethvert mængdesystem $\mathcal{G}$ i F. For da venstresiden, som nævnt, er en σ-algebra i E, som omfatter $f^{-1}(\mathcal{G})$, er inklusionen $\supseteq$ klar, og den anden følger, da

$$\{B \in \sigma(\mathcal{G}) \,|\, f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{G}))\}$$

er en σ-algebra i F, som indeholder $\mathcal{G}$. En vigtig konsekvens heraf er flg. regel.

M1 *Hvis $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$ for et mængdesystem $\mathcal{G}$ i F, så gælder for $f : E \to F$, at*

$$f \text{ er } (\mathcal{E}, \mathcal{F})\text{-målelig} \Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{E} \quad \text{for alle } G \in \mathcal{G}.$$

σ-algebraen $\{f^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{F}\}$ betegnes $\sigma(f)$ og omtales ofte som den af f frembragte σ-algebra. Bemærk at den afhænger af $\mathcal{F}$. En simpel overvejelse viser, at $\sigma(f)$ er den mindste σ-algebra i E, som gør f målelig, som funktion ind i det målelige rum $(F, \mathcal{F})$, d.v.s.

$$\sigma(f) = \bigcap \mathcal{B}.$$

hvor $\mathcal{B}$ varierer over alle σ-algebraer i E, hvor f er $(\mathcal{B}, \mathcal{F})$-målelig.

Hvis $\mathcal{F}$ er tællelig frembragt, gælder dette også $\sigma(f)$, thi ifølge det ovenstående er

$$\mathcal{F} = \sigma((A_n)_{n\geq 1}) \;\Rightarrow\; \sigma(f) = \sigma((f^{-1}(A_n))_{n\geq 1}).$$

Tilsvarende betegner $\sigma((f_i)_{i\in I})$ den mindste σ-algebra i E, som gør en familie $(f_i)_{i\in I}$ af funktioner målelige. f_i er her for ethvert i en funktion fra E ind i et måleligt rum $(F_i, \mathcal{F}_i)$. Her gælder derfor, at

$$\sigma((f_i)_{i\in I}) = \sigma(\{f_i^{-1}(A_i) \,|\, i \in I,\ A \in \mathcal{F}_i\}).$$

Hvis $(F_1, \mathcal{F}_1)$ er endnu et måleligt rum og $f : E \to F$ og $g : F \to F_1$ er givne funktioner, følger af reglerne for dannelse af urbillede, at

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \quad \text{for alle } B \subseteq F_1.$$

Dette viser umiddelbart følgende vigtige resultater angående målelighed.

M2 *Målelighed bevares ved sammensætning, d.v.s. hvis f er $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-målelig, og g er $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_1)$-målelig, så er $g \circ f$ $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_1)$-målelig.*

M3 *f er $(\mathcal{E}, \sigma(g))$-målelig, hvis og kun hvis $g \circ f$ er målelig m.h.t. $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_1)$.*

Den sidste regel generaliserer til situationer med flere afbildninger.

Tilfældet $(F, \mathcal{F}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ er særligt vigtigt, og i forbindelse hermed indføres en speciel notation idet mængden af målelige reelle funktioner defineret på $(E, \mathcal{E})$ betegnes $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, d.v.s.

$$\mathrm{M}(\mathcal{E}) := \{f : E \to \mathbf{R} \,|\, f \text{ er } (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))\text{-målelig}\}.$$

Sammen med Lemma 3 viser M1, at der for $f : E \to \mathbf{R}$ gælder

$$f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \;\Leftrightarrow\; \{f \leq x\} \in \mathcal{E} \;\text{ for alle } x \in \mathbf{R}.$$

Ifølge gængs notation skrives kort $\{f \leq x\}$ i stedet for $f^{-1}((-\infty, x])$. Benyttes andre frembringersystemer opnås ækvivalente beskrivelser af elementerne i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$. De begrænsede h.h.v. de ikke negative elementer i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, bruges så ofte, at de får en selvstændig betegnelse

$$\mathrm{bM}(\mathcal{E}) := \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \,|\, \exists\, r < \infty \, |f(e)| \leq r \text{ for alle } e \in E\},$$

$$\mathrm{M}(\mathcal{E})_+ := \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \,|\, f(e) \geq 0 \text{ for alle } e \in E\} \text{ og } \mathrm{bM}(\mathcal{E})_+ := \mathrm{bM}(\mathcal{E}) \cap \mathrm{M}(\mathcal{E})_+.$$

I nedenstående Lemma 4 og 5 formuleres og vises forskellige egenskaber ved den vigtige funktionsklasse $\mathrm{M}(\mathcal{E})$. Men for at forstå beviset for Lemma 4 må vi først studere to i sig selv interessante problemstillinger. Det drejer sig dels om målelighed i forbindelse med produktrum og dels om samspillet mellem målelighed og kontinuitet.

Vi starter med det sidste. I har i tidligere kurser studeret kontinuerte funktioner, så i sammenhængen her er det naturligt at undersøge disse ud fra et målelighedssynspunkt. Betragt derfor to målelige rum $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$ og $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$, hvor (S_i, d_i)'erne er metriske rum med tilhørende Borel σ-algebraer. De kontinuerte funktioner fra S_1 ind i S_2 er her en interessant klasse, og da kontinuitet af en funktion $f : S_1 \to S_2$, d.v.s.

$$\forall\, x \in S_1 \;\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 : d_1(x, y) \leq \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

ækvivalent kan formuleres som

$$\forall\, x \in S_1 \;\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 : b(x, \delta) \subseteq f^{-1}(b(f(x), \epsilon))$$

ses, at kontinuitet medfører, at $f^{-1}(U)$ er åben i S_1, hvis U er åben i S_2. Flg. vigtige resultat er derfor en konsekvens af M1 og definitionen på Borel σ-algebraen.

Sætning 1 *Lad (S_i, d_i) $i = 1, 2$ betegne metriske rum. Da er enhver kontinuert funktion $f : S_1 \to S_2$ Borel målelig, d.v.s. $(\mathcal{B}(S_1), \mathcal{B}(S_2))$-målelig.*

Øvelse 5. Lad (S, d) betegne et metrisk rum. Vis at $\mathcal{B}(S) = \sigma(C(S))$, hvor

$$C(S) := \{f : S \to \mathbf{R} \mid f \text{ kontinuert}\}.$$

D.v.s. en afbildning g fra et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$ ind i S er målelig m.h.t. $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(S))$, hvis og kun hvis $f \circ g \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$ for $f \in C(S)$. Vink: For enhver lukket mængde F er funktionen $x \mapsto d(x, F) := \inf_{y \in F} d(x, y)$ kontinuert og $F = \{d(\cdot, F) = 0\}$. $\square$

Lad dernæst $(E_i, \mathcal{E}_i)$ $i = 1, 2$ være målelige rum og betragt produktrummet $E_1 \times E_2$ udstyret med produkt σ-algebraen $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Definer *projektionsafbildningerne* p_{E_1} og p_{E_2} ved

$$p_{E_1}(e_1, e_2) := e_1 \quad \text{og} \quad p_{E_2}(e_1, e_2) := e_2 \quad \text{for alle } (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2.$$

Ligheden

$$A \times B = (A \times E_2) \cap (E_1 \times B) = p_{E_1}^{-1}(A) \cap p_{E_2}^{-1}(B) \;\; \text{hvor } A \in \mathcal{E}_1 \text{ og } B \in \mathcal{E}_2,$$

viser, at $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma(p_{E_1}, p_{E_2})$, d.v.s. projektionsafbildningerne frembringer produkt σ-algebraen. Resultatet generaliserer uændret til produktrum med mere end to faktorer. Kombineres dette med Sætning 1 fås for ethvert metrisk rum (S, d), at hvis S^n udstyres med en produktmetrik, er

$$\mathcal{B}(S)^n \subseteq \mathcal{B}(S^n),$$

da de n projektionsafbildninger fra S^n ind i S er kontinuerte og dermed Borel målelige. Strukturen af produkt σ-algebraen giver endvidere anledning til flg. resultater vedrørende produktrum. For at lette overskueligheden formuleres påstandene kun for to faktorer. $(E_i, \mathcal{E}_i)$ og $(F_i, \mathcal{F}_i)$ $i = 1, 2$ betegner her målelige rum.

M4 *$f = (f_1, f_2) : E \to F_1 \times F_2$ er $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$-målelig, hvis og kun hvis koordinatfunktionerne $f_i : E \to F_i$ er målelige m.h.t. $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_i)$ for $i = 1, 2$.*

M5 *Hvis $g : E_1 \times E_2 \to F$ er målelig m.h.t. $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mathcal{F})$, er*

$$g(\cdot, e_2) : e \mapsto g(e, e_2) \quad \text{og} \quad g(e_1, \cdot) : e \mapsto g(e_1, e)$$

målelige fra E_1 h.h.v. E_2 ind i F for alle $e_2 \in E_2$ og $e_1 \in E_1$. Specielt er for ethvert $U \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ sektionerne målelige, d.v.s. for alle $e_1 \in E_1$ og $e_2 \in E_2$ er

$$U(e_1) := \{e \in E_2 \,|\, (e_1, e) \in U\} \in \mathcal{E}_2 \quad \text{og} \quad U(e_2) := \{e \in E_1 \,|\, (e, e_2) \in U\} \in \mathcal{E}_1.$$

Bevis. M4 fås af M2 og M3, da $f_i = p_{E_i} \circ f$ for $i = 1, 2$. Første halvdel af M5 følger også af M2, idet

$$g(e_1, \cdot) = g \circ \psi_{e_1} \text{ for } e_1 \in E_1 \quad \text{og} \quad g(\cdot, e_2) = g \circ \psi_{e_2} \text{ for } e_2 \in E_2,$$

hvor ψ_{e_i}'erne er givet ved

$$\psi_{e_1}(e) = (e_1, e) \quad \text{for } e \in E_2 \quad \text{og} \quad \psi_{e_2}(e) = (e, e_2) \quad \text{for } e \in E_1,$$

og disse er ifølge M4 målelige m.h.t. $(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ h.h.v. $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$. Resten følger nu af lighederne

$$U(e_1) = \psi_{e_1}^{-1}(U) \quad \text{og} \quad U(e_2) = \psi_{e_2}^{-1}(U),$$

da ψ_{e_1} og ψ_{e_2}, som netop vist, er målelige fra E_2 h.h.v. E_1 ind i $E_1 \times E_2$. ◇

Da $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R})^n$ indeholder M4 flg. vigtige konsekvens.

M6 *Hvis $f : E \to \mathbf{R}^n$ har koordinatfunktioner $f_1, \ldots, f_n$, d.v.s. $f = (f_1, \ldots, f_n)$, gælder*

$$f \text{ er } (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))\text{-målelig} \Leftrightarrow f_i \text{ er } (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))\text{-målelig for } i = 1, \ldots, n.$$

Vi er nu i klar til at formulere og bevise Lemma 4.

Lemma 4 *M($\mathcal{E}$) er et reelt vektorrum, som yderligere er stabil under produkt og punktvis max og min dannelse. D.v.s. hvis f og g er elementer i M($\mathcal{E}$), så gælder dette også $f + g$, $f \cdot g$, $f \wedge g$, $f \vee g$ og cf for alle $c \in \mathbf{R}$.*

Bevis for Lemma 4. Da beviserne er identiske, nøjes vi med at vise måleligheden af $f + g$. Ifølge M4 er $e \mapsto (f(e), g(e))$ målelig m.h.t. $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^2))$, og da $(x, y) \mapsto x + y$ er en kontinuert reel funktion på $\mathbf{R}^2$ fås af Sætning 1, at sammensætningen, d.v.s. $e \mapsto f(e) + g(e) = (f + g)(e)$, ligger i M($\mathcal{E}$). ◇

Stabiliteten under punktvis max og min betyder, at $\mathrm{M}(\mathcal{E}) = \mathrm{M}(\mathcal{E})_+ - \mathrm{M}(\mathcal{E})_+$, thi for ethvert $f \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$ definerer

$$f^+ := f \vee 0 \quad \text{og} \quad f^- := -(f \wedge 0)$$

to elementer i $\mathrm{M}(\mathcal{E})_+$, som opfylder

$$f = f^+ - f^- \quad \text{og} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

f^+ og f^- kaldes h.h.v. den positive og negative del af f. Bemærk at $f^+ = x^+(f)$ og $f^- = x^-(f)$, hvor x^+ og x^- er de ikke-negative reelle kontinuerte funktioner

$$x^+ : x \mapsto x \vee 0 \quad \text{og} \quad x^- : x \mapsto -(x \wedge 0).$$

$C(S)$-rum opfylder også Lemma 4, men som vi nu skal se, bevares målelighed i modsætning til kontinuitet under punktvis konvergens af følger. $\mathrm{M}(\mathcal{E})$ har nemlig yderligere flg. vigtige egenskab.

Lemma 5 *For enhver følge $(f_n)_{n\geq 1}$ i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$ er*

$$C((f_n)_{n\geq 1}) := \{e \in E \mid \lim_n f_n(e) \text{ eksisterer i } \mathbf{R}\} \in \sigma((f_n)_{n\geq 1}) \subseteq \mathcal{E};$$

og funktionen $f_\infty : E \to \mathbf{R}$ defineret ved

$$f_\infty(e) := \begin{cases} \lim_n f_n(e) & \text{hvis } e \in C((f_n)_{n\geq 1}) \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

er $\sigma((f_n)_{n\geq 1})$-målelig, d.v.s. specielt er $f_\infty \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$.

Bemærkning. Anden del gælder uændret i ethvert metrisk rum (S, d) forudsat $C((f_n)_{n\geq 1}) \in \mathcal{E}$, hvorimod første del kræver, at (S, d) er fuldstændigt og separabelt. Nedenstående bevis gælder uændret i den mere generelle situation. Separabiliteten sikrer her, at $e \mapsto d(f(e), g(e)) \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$ for ethvert par af funktioner f og g fra E ind i S, som er målelige m.h.t. $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(S))$. (Tænk over dette.)

Bevis. Lad $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{M}(\mathcal{E})$ være givet. Da $\mathbf{R}$ er fuldstændigt, er

$$\begin{aligned} C((f_n)_{n\geq 1}) &= \{e \in E \mid (f_n(e))_{n\geq 1} \text{ er en Cauchy-følge i } \mathbf{R}\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{e \in E \mid |f_n(e) - f_m(e)| < 1/k\}, \end{aligned}$$

hvilket viser første del. Skrives kort C i stedet for $C((f_n)_{n\geq 1})$, er det for at vise anden del nok at vise, at $f_\infty^{-1}(F) \cap C \in \mathcal{E}$ for enhver lukket mængde F i $\mathbf{R}$. Men betegner som ovenfor $d(\cdot, F)$ den kontinuerte funktion

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} |x - y| \quad \text{for alle } x \in \mathbf{R}$$

og $d(f_\infty, F)$ og $d(f_n, F)$ sammensætningerne $d(\cdot, F) \circ f_\infty$ og $d(\cdot, F) \circ f_n$, ses, da $0 \leq d(f_n, F)(e) \to d(f_\infty, F)(e)$ for alle $e \in C$, at

$$f_\infty^{-1}(F) \cap C = \{d(f_\infty, F) = 0\} \cap C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{d(f_n, F) \leq 1/k\} \cap C.$$

Påstanden er derfor en konsekvens af, at $d(f_n, F)$'erne alle er målelige. $\diamond$

I forbindelse med integralteorien er det bekvemt at kunne betragte funktioner med værdier i de udvidede reelle tal, d.v.s. mængden $\overline{\mathbf{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Udstyres $\overline{\mathbf{R}}$ med σ-algebraen $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ frembragt af mængderne

$$\{\infty\},\ \{-\infty\} \text{ og } (-\infty, x] \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$$

betegner $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$ mængden af $\mathcal{E}$-målelige funktioner med værdier i $(\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$.
Notationen $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ indikerer, at der findes en metrik $\overline{d}$ på $\overline{\mathbf{R}}$, så at $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ er den tilhørende Borel σ-algebra. $\overline{d}$ kan f.eks. vælges som

$$\overline{d}(x,y) = \begin{cases} |x-y| \wedge 1 & x, y \in \mathbf{R} \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da en funktion $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ ligger i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$, hvis og kun hvis

$$\{-\infty \leq f \leq x\} \in \mathcal{E} \quad x \in \overline{\mathbf{R}},$$

kan $\mathrm{M}(\mathcal{E})$ opfattes som en delmængde af $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$; og ved brug af de gængse udvidelser af regningsarterne $+$ og $\cdot$ samt max og min til $\overline{\mathbf{R}}$ ses, at $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$ er stabil under punktvis max og min samt produkt. Da $\infty + (-\infty)$ ikke kan gives en fornuftig mening, er $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$ derimod ikke et vektorum, men har summen af to elementer i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$ blot mening, f.eks. hvis begge er ikke-negative, så er den igen målelig, d.v.s. element i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$ (tænk over dette).
Stabiliteten under max og min betyder, at dekompositionen i positiv og negativ del stadig er mulig, idet vi til ethvert $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$ tilordner to elementer

$$f^+ := f \vee 0 \quad \text{og} \quad f^- := -(f \wedge 0)$$

i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, som igen opfylder $f = f^+ - f^-$ og $|f| = f^+ + f^-$.
Det næste resultat kompletterer Lemma 5 og formuleres derfor som et korollar til dette.

Korollar *Lad* $(f_n)_{n\geq 1}$ *betegne en følge i* $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$. *Flg. funktioner er da elementer i* $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$, *d.v.s.* $\mathcal{E}$*-målelige med værdier i de udvidede reelle tal,*

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n, \quad \liminf_n f_n,$$

hvor $\limsup_n f_n := \inf_n(\sup_{k\geq n} f_k)$ *og* $\liminf_n f_n := \sup_n(\inf_{k\geq n} f_k)$.

Bevis. Det er nok at se på de to første, og disse følger af identiterne

$$\{\sup_n f_n \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq x\} \quad \text{og} \quad \{\inf_n f_n < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n < x\} \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$$

samt lighederne

$$\{\sup_n f_n = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n = -\infty\} \text{ og } \{\inf_n f_n = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n = \infty\}. \quad \diamond$$

Øvelse 6. Udnyt Korollaret til at give et bevis for Lemma 5 baseret på $\liminf_n f_n$ og $\limsup_n f_n$. $\square$

Notation. Til ethvert $A \in \mathcal{E}$ tilordnes funktionen $\mathbf{1}_A$, kaldet *indikatorfunktionen* for mængden A, defineret ved

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in A \\ 0 & \text{hvis } x \in A^c. \end{cases}$$

Da $\mathbf{1}_A$ kun antager værdierne 0 og 1 og $A = \{\mathbf{1}_A = 1\}$ og $A^c = \{\mathbf{1}_A = 0\}$, er $\mathbf{1}_A \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$, og forbindelsen mellem en mængde og den tilhørende indikatorfunktion er enentydig. Her ud fra defineres de såkaldte *simple funktioner*, betegnet $\mathrm{S}(\mathcal{E})$, som underrummet i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$ frembragt af alle indikatorfunktioner, d.v.s.

$$f \in \mathrm{S}(\mathcal{E}) \;\Leftrightarrow\; f = (\text{endelig}) \sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \quad a_i \in \mathbf{R},\; A_i \in \mathcal{E}.$$

Opskrivningen er ikke entydig, og man kan altid finde en, hvor A_i'erne udgør en endelig partition. Dette er en konsekvens af karakterisationen

$$\mathrm{S}(\mathcal{E}) = \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \,|\, f(E) \text{ er en endelig mængde}\},$$

der tillige viser, at $\mathrm{S}(\mathcal{E})$ er stabil under produkt samt punktvis max og min, d.v.s. for alle $f, g \in \mathrm{S}(\mathcal{E})$ er

$$f \cdot g,\; f \vee g \text{ og } f \wedge g \in \mathrm{S}(\mathcal{E}).$$

Skønt $\mathrm{S}(\mathcal{E})$ er en forholdsvis 'lille' mængde af funktioner, spiller den en væsentlig rolle. Dette skyldes ikke mindst følgende simple, men vigtige resultat. Korollaret følger umiddelbart af lemmaet ved opsplitning i positiv og negativ del.

Lemma 6 *Lad $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ være givet. Definer for ethvert $n \geq 1$*

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n} (k-1)/2^n \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} < f \leq \frac{k}{2^n}\}} + n \cdot \mathbf{1}_{\{f > n\}}.$$

Da er $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq S(\mathcal{E})_+$, og $f_n(e) \uparrow f(e)$ for alle $e \in E$. Hvis f er begrænset, d.v.s. $0 \leq f \leq r < \infty$, konvergerer f_n'erne uniformt mod f, idet

$$\sup_{e \in E} |f(e) - f_n(e)| \leq 2^{-n} \qquad \text{for } n \geq r,$$

Korollar *For ethvert $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$ findes der en følge $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq S(\mathcal{E})$, så at f_n'erne konvergerer punktvis mod f, og konvergensen sker uniformt, hvis f er begrænset, d.v.s. hvis $0 \leq |f| \leq r < \infty$.*

Bevis for Lemma 6. Følger af at $f_n = \phi_n(f)$ for $n \geq 1$, hvor $\phi_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ er givet ved

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} (k-1)/2^n \cdot \mathbf{1}_{](k-1)/2^n,\, k/2^n]}(x) + n \cdot \mathbf{1}_{]n,\,\infty[}(x) \quad x \in \mathbf{R} \ n \geq 1. \qquad \diamond$$

Til senere brug bemærkes, at

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{]k/2^n,\,\infty[}(x)$$

for alle $x \in \mathbf{R}$ og $n \geq 1$. Dette beror på flg. simple omskrivning.

$$\sum_{k=1}^{n2^n} (k-1) \cdot \mathbf{1}_{](k-1)/2^n,\, k/2^n]}(x) = \sum_{k=2}^{n2^n} \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{](k-1)/2^n,\, k/2^n]}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n2^n-1} \sum_{k=j+1}^{n2^n} \mathbf{1}_{](k-1)/2^n,\, k/2^n]}(x) = \sum_{j=1}^{n2^n-1} \mathbf{1}_{]j/2^n,\, n]}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{]j/2^n,\,\infty[}(x) - n2^n \cdot \mathbf{1}_{]n,\,\infty[}(x).$$

En vigtig konsekvens af Lemma 6 er flg. resultat. Det formuleres i to udgaver.

1) En delmængde $V \subseteq \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ udgør hele $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, hvis

a_1) V indeholder alle indikatorfunktioner.

b_1) V er stabil under sum og multiplikation med positiv skalar.

c_1) V er stabil under punktvis monoton konvergens, d.v.s.

$$(f_n)_{n\geq 1} \subseteq V \quad f_n \leq f_{n+1} \text{ for alle } n \Rightarrow \sup_n f_n \in V.$$

2) En delmængde $V \subseteq \mathrm{M}(\mathcal{E})$ udgør hele $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, hvis

a_2) V indeholder alle indikatorfunktioner.

b_2) V er et vektorrum.

c_2) V er stabil under punktvis monoton konvergens, forudsat grænsefunktionen er endelig, d.v.s.

$$\sup_n f_n \in V \text{ hvis } \ (f_n)_{n\geq 1} \subseteq V,\ f_n \leq f_{n+1} \text{ og } \{\sup_n f_n < \infty\} = E.$$

D.v.s. for at vise at alle elementer i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$ har en given egenskab p, er det nok at indse, at mængden

$$\{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \mid f \text{ opfylder } p\}$$

opfylder punkterne a_2), b_2) og c_2). Metoden, der er en funktionsudgave af Dynkin's Lemma og kendt under navnet *"Standardbeviset"*, er yderst anvendelig. Den kan forfines på mange måder se f.eks. afsnit 1.49 i Hoffmann. En simplere men ofte anvendelig generalisation er indeholdt i flg. resultat.

Monotone Klasse Lemma.
Lad V betegne et reelt vektorrum bestående af begrænsede reelle funktioner defineret på E. Antag at V indeholder alle konstante funktioner samt er stabil under monoton voksende uniformt begrænset punktvis konvergens, d.v.s.

$$\sup_n f_n \in V \text{ hvis } \ (f_n)_{n\geq 1} \subseteq V \text{ og } \ f_n \leq f_{n+1} \leq M \text{ for et } M < \infty.$$

Da er $\mathrm{bM}(\sigma(\mathcal{H})) \subseteq V$ *for enhver delmængde $\mathcal{H} \subseteq V$, som er stabil under multiplikation, d.v.s. opfylder at $f \cdot g \in \mathcal{H}$ for alle $f, g \in \mathcal{H}$.*

Øvelse 7. Faktoriseringssætningen.
Antag at $\mathcal{E} = \sigma(g)$, d.v.s. $\mathcal{E} = g^{-1}(\mathcal{F})$, hvor g er en funktion defineret på E med værdier i et måleligt rum $(F, \mathcal{F})$. Vis at

$$\mathrm{M}(\mathcal{E}) = \{\varphi \circ g \mid \varphi \in \mathrm{M}(\mathcal{F})\}.$$

Vink til $\subseteq$: Anvend Standardbeviset. □

Øvelse 8. Antag $\mathcal{E} = \sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$ for en partition $A_1, \ldots, A_n$ af E. Vis ved brug af Faktoriseringssætningen, at

$$\mathrm{M}(\mathcal{E}) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \mid a_i \in \mathbf{R} \ i = 1, \ldots, n\}.$$

D.v.s. enhver $\mathcal{E}$-målelig funktion er konstant på A_i'erne. Dette er et specialtilfælde af et generelt princip, som siger, at hvis $\mathcal{F}$ er en σ-algebra og $A \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$-*atom*, d.v.s.

$$B \cap A = A \text{ eller } \emptyset \quad \text{for alle } B \in \mathcal{F},$$

da er enhver $\mathcal{F}$-målelig funktion konstant på A. □

Mål.
I mange sammenhænge ønsker man at størrelsesangive mængder ved hjælp af ikke-negative reelle tal. Tænk f.eks. på arealet af plane figurer, rumfang af rumlige legemer eller sandsynligheder af hændelser. Det matematiske værktøj til en sådan måling er et såkaldt mål eller mere præcist et σ-additivt (synonymt tælleligt additivt) mål på en σ-algebra.

Definition. Lad $(E, \mathcal{E})$ betegne et måleligt rum. En funktion $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ kaldes et *mål* på $\mathcal{E}$, hvis $\mu(\emptyset) = 0$ og μ er *σ-additiv* d.v.s.

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{for parvis disjunkte } A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{E}.$$

Mængden af mål på σ-algebraen $\mathcal{E}$ betegnes $\mathrm{m}(\mathcal{E})$, og en simpel overvejelse viser, at $\mathrm{m}(\mathcal{E})$ er stabil under multiplikation med positiv skalar, endelig og tællelig sumdannelse samt under *restriktion*, d.v.s. for ethvert $\mu \in \mathrm{m}(\mathcal{E})$ og ethvert $B \in \mathcal{E}$ er $\mu_B \in \mathrm{m}(\mathcal{E})$, hvor

$$\mu_B(A) := \mu(A \cap B) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Målene inddeles efter størrelse i h.h.t. flg. notation.

a) μ er et *endeligt mål* (*sandsynlighedsmål*), hvis $\mu(E) < \infty$ ($\mu(E) = 1$).

b) μ er et *σ-endeligt mål*, hvis $\exists\,(A_n) \subseteq \mathcal{E} : \bigcup_n A_n = E$ og $\mu(A_n) < \infty$ for alle n.

c) μ er et *sum-endeligt mål*, hvis $\mu = \sum_i \mu_i$, hvor μ_i'erne er endelige mål på $\mathcal{E}$.

Endelige mål er klart σ-endelige, og ethvert σ-endeligt mål er sum-endeligt, thi hvis μ er σ-endeligt og (A_n) en tilhørende overdækning bestående af mængder med endeligt mål, så er $\mu = \sum_{i \geq 1} \mu_{B_i}$ en beskrivelse af μ, som en sum af endelige mål, hvor (B_n) er en disjunktgering af (A_n), f.eks.

$$B_1 := A_1 \quad \text{og} \quad B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \quad n \geq 1.$$

Udover disse operationer indenfor $\mathrm{m}(\mathcal{E})$ kan mål flyttes fra et måleligt rum til et andet ved hjælp af en målelig afbildning. Lad hertil $(F, \mathcal{F})$ betegne endnu et måleligt rum og $f : E \to F$ en målelig afbildning. Da urbilledet af en parvis disjunkt foreningsmængde er den parvise disjunkte foreningsmængde af de enkelte urbilleder, definerer fastsættelsen

$$\mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)) \qquad B \in \mathcal{F}$$

for ethvert $\mu \in \mathrm{m}(\mathcal{E})$ et mål på $(F, \mathcal{F})$. μ_f (mange forfattere bruger betegnelsen $\mu \circ f^{-1}$) kaldes *billedmålet* af μ ved afbildningen f. D.v.s. en målelig afbildning

f inducerer en afbildning fra $\mathrm{m}(\mathcal{E})$ ind i $\mathrm{m}(\mathcal{F})$. Et endeligt mål afbildes herved klart i et endeligt mål og ligeledes for sum-endelige, hvorimod σ-endelighed ikke nødvendigvis bevares under dannelse af billedmål.

Spørgsmålet om eksistens af mål med givne egenskaber udsættes til et senere kapitel. Men vi vil dog straks indføre de såkaldte punktmål. I modsætning til de fleste mere interessante mål, kan disse defineres på hele 2^E.

Notation. For alle $e \in E$ betegner δ_e afbildningen fra 2^E ind i $\mathbf{R}_+$ givet ved

$$\delta_e(A) := \mathbf{1}_A(e) \quad \text{for alle } A \in 2^E.$$

δ_e kaldes *punktmålet* (Dirac målet) i punktet e. Et mål af formen $\sum_i a_i \cdot \delta_{e_i}$, hvor $a_i > 0$ og $e_i \in E$ for $i \geq 1$ kaldes et *diskret* mål. Er summen endelig, bruger man ofte betegnelsen *simpelt* mål. (Læseren bør eftervise, at der er tale om mål på 2^E)

Det er vigtigt straks at afdække de generelle egenskaber ved mål, der ligger gemt i ovenstående definition. Resultaterne samles i flg. lemma.

Lemma 7 *Lad $(E, \mathcal{E})$ betegne et måleligt rum. Ethvert element μ i $\mathrm{m}(\mathcal{E})$ har da flg. egenskaber.*

1) μ er endelig additiv, *d.v.s. $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ for ethvert endeligt sæt af parvis disjunkte $A_1, \ldots, A_n$ i $\mathcal{E}$.*

2) μ er voksende, *d.v.s. $\mu(A) \leq \mu(B)$ for ethvert par $A \subseteq B$ af mængder i $\mathcal{E}$.*

3) μ er opad kontinuert, *d.v.s. $\mu(A_n) \uparrow \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n)$ for enhver følge $(A_n)_{n\geq 1}$ i $\mathcal{E}$, så at $A_n \subseteq A_{n+1}$ for alle n.*

4) μ er nedad kontinuert *på μ-endelige mængder, d.v.s. $\mu(A_n) \downarrow \mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n)$ for enhver følge $(A_n)_{n\geq 1}$ i $\mathcal{E}$, så at $A_n \supseteq A_{n+1}$ for alle n og $\inf_n \mu(A_n) < \infty$.*

5) μ er endelig- *og* tællelig subadditiv, *d.v.s. $\mu(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$ for enhver endelig eller tællelig familie (A_i) i $\mathcal{E}$.*

Bevis. 1) fås af den tællelige additivitet anvendt på $A_1, \ldots, A_n, \emptyset, \emptyset, \ldots$, og 2) af ligheden $B = A \cup (B \backslash A)$, som gælder da $A \subseteq B$.
3) Definer $B_1 := A_1$ og $B_i := A_i \backslash A_{i-1}$ for $i \geq 2$, d.v.s. B_i'erne er parvis disjunkte, og

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{og} \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n \quad \text{for alle } n.$$

Ifølge den endelige og tællelige additivitet gælder derfor, at

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_n \mu(A_n).$$

4) Antag uden tab af generalitet, at $\mu(A_1) < \infty$. Definer $B_n := A_1 \setminus A_n \;\; n \geq 1$. B_n'erne er da voksende, og $B_n \uparrow A_1 \backslash \bigcap_{n\geq 1} A_n$. Ifølge 3) og den endelige additivitet

gælder derfor, at

$$\mu(A_1) - \mu(A_n) = \mu(B_n) \uparrow \mu(A_1 \setminus \bigcap_{n\geq 1} A_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n),$$

d.v.s. $\mu(A_n) \downarrow \mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n)$. 5) Ifølge 3) er det nok at vise endelig subadditivitet, d.v.s. pr. induktion nok at vise at

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Men dette følger af 1) og 2) samt ligheden $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1)$. $\diamond$

Lemma 8 Det første Borel-Cantelli Lemma.
Lad $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ *og* $\mu \in \mathrm{m}(\mathcal{E})$ *være givet. Da gælder*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \;\Rightarrow\; \mu(\limsup_n A_n) = 0 \quad \text{hvor} \quad \limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Bemærk at $\limsup_n A_n = \{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \infty\} = \{e \,|\, e \in A_n \text{ for uendelig mange } n\}$.

Bevis. Sæt $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ for alle $n \geq 1$. Da er $(B_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ og $B_{n+1} \subseteq B_n$ for alle n, og da

$$\mu(B_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

ifølge subadditiviteten, fås af den viste udgave af 'nedad kontinuitet', at

$$\mu(\limsup_n A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_n \mu(B_n) \leq \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) = 0.$$

Øvelse 9. Vis at $\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n)$, hvis μ er et endeligt mål, eller mere generelt hvis $\mu(\bigcup_n A_n) < \infty$. $\square$

Præcisering af et mål μ kræver i princippet kendskab til dets værdi på ethvert element i $\mathcal{E}$. Men σ-additiviteten bevirker, at mindre kan gøre det, thi som konsekvens af Dynkin's Lemma gælder flg. vigtige entydighedsudsagn.

Proposition 2 *To endelige mål* μ *og* ν *på* $\mathcal{E}$ *med samme totale masse, d.v.s.* $\mu(E) = \nu(E)$*, er identiske, hvis de stemmer overens på et mængdesystem* $\mathcal{G}$*, som er stabil under endelig gennemsnit og frembringer* $\mathcal{E}$*, d.v.s.* $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$ *og* $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$.

Korollar *To mål* μ *og* ν *på* $\mathcal{E}$ *er identiske, hvis de stemmer overens på et mængdesystem* $\mathcal{G}$*, som er stabil under endelig gennemsnit, frembringer* $\mathcal{E}$ *og indeholder en følge* $(G_n)_{n\geq 1}$*, så at* $\mu(G_n) < \infty$ *for alle* $n \geq 1$*, og* $G_n \uparrow E$*, d.v.s.* $G_n \subseteq G_{n+1}$ *og* $E = \bigcup_n G_n$.

Bevis. Ifølge antagelsen om samme totale masse og egenskaberne ved mål er

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{E} \mid \mu(B) = \nu(B)\}$$

et d-system, og da $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ er $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}$, d.v.s. $\mu = \nu$. Vedrørende korollaret viser Proposition 2, at restriktionerne μ_{G_n} og ν_{G_n} er ens for alle n. Heraf fås identiteten $\mu = \nu$ ved grænseovergang, thi da mål er opad kontinuerte, konvergerer $\mu_{G_n}(A) = \mu(A \cap G_n) \uparrow \mu(A)$ og tilsvarende $\nu_{G_n}(A) \uparrow \nu(A)$ for alle $A \in \mathcal{E}$. $\diamond$

Ved at kombinere Proposition 2 og Lemma 3 ses, at et ethvert endeligt Borel mål μ på $\mathbf{R}$ h.h.v. $\mathbf{R}^n$ er entydigt bestemt ved funktionen

$$x \mapsto \mu((-\infty, x\,]) \;\text{ h.h.v. }\; \underline{x} \mapsto \mu(\prod_{i=1}^{n}(-\infty, x_i\,]).$$

Med baggrund i Proposition 2 har flg. definitioner god mening.

Definition. For ethvert n betegnes med λ_n det entydigt bestemte σ-endelige mål på $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, som opfylder

$$\lambda_n\left(\prod_{i=1}^{n}\,]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \quad \text{for alle } a_i < b_i \;\; i = 1, \ldots, n.$$

λ_n kaldes *Lebesgue målet* på $\mathbf{R}^n$, men i dimensionerne $1, 2$ og 3 bruges ofte betegnelserne *længde*-, *areal*- eller *rumfangsmålet*. Bemærk at entydigheden sikrer, at λ_n'erne er *translationsinvariante*, d.v.s.

$$\lambda_n(A) = \lambda_n(A + \underline{x}) \quad \text{for alle } \underline{x} \in \mathbf{R}^n \text{ og } A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n).$$

Øvelse 10. Vis at $\lambda_n \circ m_r^{-1} = r^{-n} \cdot \lambda_n$, hvor m_r for $r > 0$ er afbildningen i $\mathbf{R}^n$ svarende til koordinatvis multiplikation med r, d.v.s. $m_r(\underline{x}) = r\,\underline{x}$ for $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$. $\square$

Definition. Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ og $(F, \mathcal{F}, \nu)$ betegne σ-endelige målrum. $\mu \otimes \nu$, omtalt som *produktmålet* med *marginaler* μ og ν, betegner da det entydigt bestemte σ-endelige mål på $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, som opfylder

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}.$$

Tilsvarende betegner $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ det entydigt bestemte σ-endelige mål på produktrummet $(E_1 \times \cdots \times E_n, \mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n)$, som opfylder

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$$

for alle $A_i \in \mathcal{E}_i \; i = 1, \ldots, n$. $(E_i, \mathcal{E}_i, \mu_i)_{1 \le i \le n}$ er her givne σ-endelige målrum.

Øvelse 11. Vis at $\lambda_{n+1} = \lambda_n \otimes \lambda_1 = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1 \; (= \lambda_1^{(n+1)\otimes})$ for alle n. $\square$

Entydigheden er som nævnt klar, hvorimod eksistensen er uafklaret. Vi skal dog senere se, at både Lebesgue målene og de indførte produktmål vitterligt eksisterer.

Som allerede antydet udnyttes et mål μ til at angive størrelse af mængder, sådan at forstå at jo større $\mu(A)$ er, des 'større' er A. Det er derfor naturligt, at mængder med mål 0 anses for at være små. Dette giver anledning til flg. notation.

Notation. Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum. En delmængde $N \subseteq E$ siges at være en μ-*nulmængde*, hvis der findes et $N_0 \in \mathcal{E}$, så at $N \subseteq N_0$ og $\mu(N_0) = 0$.

Mængden af alle μ-nulmængder betegnes $\mathcal{N}_\mu$, d.v.s.

$$\mathcal{N}_\mu := \{N \subseteq E \mid N \text{ er en } \mu\text{-nulmængde}\}.$$

Læseren opfordres til at overveje, at

$$\emptyset \in \mathcal{N}_\mu, \quad \mathcal{N}_\mu \cap \mathcal{E} = \{N \in \mathcal{E} \mid \mu(N) = 0\} \quad \text{og} \quad \mathcal{N}_\mu \text{ er } \bigcup c\text{-stabil}.$$

Endvidere er enhver delmængde af en μ-nulmængde igen en μ-nulmængde.

Med dette begreb på plads siges en egenskab $p(e)$ afhængig af punkter e i E at holde μ-næsten overalt (μ-n.o.) eller synonymt for μ-næsten alle (μ-n.a.) e, hvis

$$\{e \in E \mid p(e) \text{ ikke sand}\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

F.eks. hvis f og g er funktioner defineret på E, betyder $f = g$ μ-n.o. derfor, at $\{e \in E \mid f(e) \neq g(e)\}$ er en μ-nulmængde, og tilsvarende betyder $f \leq g$ μ-n.o. for reelle funktioner f og g, at $\{e \in E \mid f(e) > g(e)\}$ er en μ-nulmængde. Endvidere betegnes for funktioner $(f_n)_{n \geq 1}$ og f defineret på E med værdier i et metrisk rum (S, d) med $f_n \to f$ μ-n.o., at

$$\{e \in E \mid f_n(e) \to f(e) \text{ i } d\text{-metrikken}\}^c \in \mathcal{N}_\mu.$$

Notation a'la $f_n \uparrow f$ μ-n.o. for reelle funktioner betyder altså, at $f_n \to f$ μ-n.o. samt at $f_n \leq f_{n+1}$ μ-n.o. for alle n. Sidste del kan, da $\mathcal{N}_\mu$ er $\bigcup c$-stabil, ækvivalent udtrykkes som, at $f_n \leq f_{n+1}$ for alle n μ-n.o. Det overlades trygt til læseren at tolke andre lignende udtryk.

Som vist i Lemma 5 bevares målelighed ved punktvis konvergens. Dette gælder generelt ikke for konvergens n.o. Men en simpel men vigtig konsekvens af Lemma 5 viser, at hvis

$$f_n \to f \ \mu\text{-n.o. for en følge } (f_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathrm{M}(\mathcal{E}) \text{ og en funktion } f : E \to \mathbf{R},$$

så gælder for det i Lemma 5 konstruerede f_∞, at $f = f_\infty$ μ-n.o. og

$$f_n \to f_\infty \ \mu\text{-n.o.}$$

Skønt nulmængder i mange sammenhænge anses for at være små og betydningsløse, spiller de en ikke ringe rolle i målteorien. De giver blandt andet anledning til følgende relationer mellem forskellige elementer i $\mathrm{m}(\mathcal{E})$.

Notation. Lad μ og ν betegne elementer i $\mathrm{m}(\mathcal{E})$. ν siges da at være μ-*satureret*, hvis $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$, hvilket ækvivalent kan formuleres som

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \quad \text{for } A \in \mathcal{E}.$$

Hvis $\mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}_\mu$ siges μ og ν at være *ækvivalente* (skrives $\mu \approx \nu$); og μ og ν siges at være *singulære* (skrives $\mu \perp \nu$), hvis der findes et $A \in \mathcal{E}$, så at $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$, d.v.s. en målelig mængde A, så at

$$A \in \mathcal{N}_\mu \quad \text{og} \quad A^c \in \mathcal{N}_\nu.$$

For σ-endelige mål er saturering identisk med det bedre kendte begreb *absolut kontinuitet*, som vi senere skal indføre.

ν er μ-satureret, hvis ν er μ-*kontinuert*, d.v.s. hvis

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : \quad \mu(A) \leq \delta \;\Rightarrow\; \nu(A) \leq \epsilon \quad \text{for } A \in \mathcal{E}$$

eller ækvivalent

$$\lim_n \mu(A_n) = 0 \Rightarrow \lim_n \nu(A_n) = 0 \text{ for enhver følge } (A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}.$$

μ-kontinuitet er generelt stærkere end inklusionen $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$, men ensbetydende hermed, hvis ν er et endeligt mål, idet der gælder

$$\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu \text{ og } \nu \text{ endeligt mål } \Rightarrow \; \nu \text{ er } \mu\text{-kontinuert.}$$

Øvelse 12. Vis dette. Vink: Argumenter modsætningsvis, d.v.s. antag der findes et $\epsilon > 0$ og mængder $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$, så at

$$\mu(A_n) \leq 1/n^2 \quad \text{og} \quad \nu(A_n) > \epsilon \quad \text{for alle } n.$$

Betragt nu $\limsup_n A_n$ og udled en modstrid. □

I denne sammenhæng er flg. resultat af en vis interesse.

Proposition 3 *Lad μ og ν betegne elementer i $\mathrm{m}(\mathcal{E})$, så at ν er sum-endelig. Da findes der to mål ν_a og ν_s i $\mathrm{m}(\mathcal{E})$, så at $\nu = \nu_a + \nu_s$, og ν_a er μ-satureret, og ν_s og μ er singulære. (ν_a, ν_s) kaldes* Lebesgue dekompositionen *af ν m.h.t. μ.*

Bevis. Da både $\{m \in \mathrm{m}(\mathcal{E}) \,|\, \mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_m\}$ og $\{m \in \mathrm{m}(\mathcal{E}) \,|\, m \perp \mu\}$ er stabile under sum, kan vi uden tab af generalitet antage, at ν er et endeligt mål. Definer

$$r := \sup\{\nu(A) \,|\, A \in \mathcal{E},\, \mu(A) = 0\}$$

og vælg $(A_n) \subseteq \mathcal{E}$, så at $\mu(A_n) = 0$ for alle n og $\sup_n \nu(A_n) = r$. Definer

$$\nu_a := \nu_{A^c} \quad \text{og} \quad \nu_s := \nu_A.$$

hvor $A := \bigcup_n A_n$, d.v.s. $\mu(A) = 0$ og $\nu(A) = r$ samt $\nu = \nu_a + \nu_s$. Da $\nu_s(A^c) = 0$, er ν_s og μ singulære. For at vise, at ν_a er μ-satureret, betragtes et $B \in \mathcal{E}$ med $\mu(B) = 0$. Vi skal vise, at $\nu_a(B) = \nu(B \cap A^c) = 0$. Men hvis $\nu(B \cap A^c) > 0$ er

$$\nu(A \cup (B \cap A^c)) = \nu(A) + \nu(B \cap A^c) > \nu(A) = r,$$

hvilket strider mod definitionen på r, da $\mu(A \cup (B \cap A^c)) = 0$. $\diamond$

Bemærkning. Dekompositionen $\nu = \nu_a + \nu_s$ er entydig i den forstand, at hvis $\nu = \nu_1 + \nu_2$, hvor ν_1 er μ-satureret, og ν_2 og μ er singulære, så er $\nu_1 = \nu_a$ og $\nu_2 = \nu_s$. (eftervis dette)

Øvelse 13. Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum og $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ en algebra, så at $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$. Vis at

$$\forall \epsilon > 0 \; \forall B \in \mathcal{E} \; \exists B_\epsilon \in \mathcal{A} : \; \mu(B \triangle B_\epsilon) < \epsilon.$$

Vink: Betragt

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{B \in \mathcal{E} \,|\, \forall \epsilon > 0 \; \exists B_\epsilon \in \mathcal{A} : \; \mu(B \triangle B_\epsilon) < \epsilon\}.$$

Overvej at $\tilde{\mathcal{A}}$ er $\complement$-stabil samt $\uparrow$-stabil. Slut derefter ved hjælp af Øvelse 2. $\square$

Øvelse 14. Lad μ være et mål på $(E, \mathcal{E})$. Definer $I : S(\mathcal{E})_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$ ved

$$I(f) := \sum_i a_i \cdot \mu(A_i),$$

hvis $f = \sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ hvor summen er endelig, a_i'erne ikke-negative og A_i'erne parvis disjunkte. Overvej at I er vel defineret.
Vis dernæst at I er positiv addiditiv, d.v.s.

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$$

for alle $f, g \in S(\mathcal{E})_+$ og $a, b \in \mathbf{R}_+$. $\square$

Mål på metriske rum.
Lad (S,d) være et metrisk rum og $\mathcal{B}(S)$ de tilhørende Borel mængder. Da $\mathcal{B}(S)$ pr. definition er frembragt af mængden af åbne h.h.v. mængden af lukkede delmængder af S, er ethvert endeligt Borel mål ifølge Proposition 2 entydigt bestemt ved sine værdier på de åbne h.h.v. de lukkede mængder, da begge disse mængdesystemer er lukkede under endelig gennemsnit. Dette kan præciseres, idet der gælder.

Proposition 4 *Lad μ betegne et endeligt mål på $(S,\mathcal{B}(S))$. Da gælder for ethvert $A \in \mathcal{B}(S)$ flg. ligheder*

$$\sup\{\mu(F) \,|\, F \subseteq A,\ F \text{ lukket}\} = \mu(A) = \inf\{\mu(U) \,|\, A \subseteq U,\ U \text{ åben}\}.$$

Bemærk at der trivielt gælder $\underline{\mu}(A) \leq \mu(A) \leq \overline{\mu}(A)$, hvor for alle $A \in \mathcal{B}(S)$

$$\underline{\mu}(A) := \sup\{\mu(F) \,|\, F \subseteq A,\ F \text{ lukket}\} \quad \text{og} \quad \overline{\mu}(A) := \inf\{\mu(U) \,|\, A \subseteq U,\ U \text{ åben}\}.$$

Resultatet bekrives ofte ved at sige, at μ er *indre regulær* m.h.t. de lukkede mængder og *ydre regulær* m.h.t. de åbne mængder. Ved restriktion ses, at hvis $S = \mathbf{R}$, gælder resultatet uændret for ethvert mål, som er endelig på ethvert endeligt interval, d.v.s. specielt for Lebesgue målet.

Bevis. Vi skal vise, at $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(S) \,|\, \underline{\mu}(A) = \mu(A) = \overline{\mu}(A)\}$ er en σ-algebra, der indeholder alle lukkede mængder. Bemærk at A ligger i $\mathcal{A}$, hvis og kun hvis der for alle $\epsilon > 0$ findes en åben mængde U_ϵ og en lukket mængde F_ϵ så at

$$F_\epsilon \subseteq A \subseteq U_\epsilon \quad \text{og} \quad (\mu(U_\epsilon) - \mu(A)) \vee (\mu(A) - \mu(F_\epsilon) < \epsilon.$$

$\mathcal{A}$ er stabil under komplementærmængde dannelse for hvis $A \in \mathcal{A}$ og for et givent $\epsilon > 0$ F_ϵ lukket og U_ϵ åben er valgt, så at

$$F_\epsilon \subseteq A \subseteq U_\epsilon \text{ og } \ (\mu(U_\epsilon) - \mu(A)) \vee (\mu(A) - \mu(F_\epsilon)) < \epsilon,$$

så er U_ϵ^c lukket og F_ϵ^c åben og $U_\epsilon^c \subseteq A^c \subseteq F_\epsilon^c$ samt

$$(\mu(F_\epsilon^c) - \mu(A^c)) \vee (\mu(A^c) - \mu(U_\epsilon^c) = (\mu(U_\epsilon) - \mu(A)) \vee (\mu(A) - \mu(F_\epsilon)) < \epsilon,$$

da $\mu(B^c) = \mu(S) - \mu(B)$ for alle $B \in \mathcal{B}(S)$. $\mathcal{A}$ indeholder enhver lukket mængde, for er F lukket, er F et aftagende tællelig gennemsnit af åbne mængder, f.eks.

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \,|\, d(x,F) < 1/n\},$$

og derfor element i $\mathcal{A}$, da μ er nedad kontinuert. Vi mangler dermed kun stabiliteten under tællelig foreningsmængde dannelse. Lad $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ samt $\epsilon > 0$ være givet. Vælg for ethvert $n \geq 1$ $F_{n,\epsilon}$ lukket og $U_{n,\epsilon}$ åben, så at

$$F_{n,\epsilon} \subseteq A_n \subseteq U_{n,\epsilon} \quad \text{og} \quad (\mu(U_{n,\epsilon}) - \mu(A_n)) \vee (\mu(A_n) - \mu(F_{n,\epsilon})) \leq \epsilon \cdot 2^{-(n+1)}.$$

Sæt

$$U_\epsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{n,\epsilon} \;\text{ og }\; F_\epsilon := \bigcup_{n=1}^{n_0} F_{n,\epsilon},\; \text{hvor } n_0 \geq 1 : \; \mu(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n) < \epsilon/2.$$

U_ϵ er da åben, F_ϵ lukket og $F_\epsilon \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq U_\epsilon$, d.v.s. resultatet da

$$U_\epsilon \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_{n,\epsilon} \setminus A_n) \;\text{ og }\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus F_\epsilon \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{n_0} (A_n \setminus F_{n,\epsilon})$$

og dermed

$$(\, \mu(U_\epsilon) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\,) \vee (\, \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \mu(F_\epsilon)\,) \leq$$

$$(\, \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(U_{n,\epsilon}) - \mu(A_n))\,) \vee (\, \mu(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n) + \sum_{n=1}^{n_0} (\mu(A_n) - \mu(F_{n,\epsilon}))\,) < \epsilon. \;\; \diamond$$

Som det er bekendt fra $\mathbf{R}^n$, siges en delmængde K af et metrisk rum (S,d) at være *kompakt*, hvis enhver punktfølge $(x_n)_{n\geq 1}$ i K indeholder en delfølge $(x_{n_k})_{k\geq 1}$, som konvergerer mod et punkt i K. I $\mathbf{R}^n$ er de kompakte mængder netop de lukkede og begrænsede mængder. Da kompakthed defineres ved hjælp af konvergens af følger bevares det under skift til en ækvivalent metrik, og en simpel overvejelse viser, at kompakte mængder generelt er lukkede, samt at

$$K \text{ kompakt og } F \text{ lukket} \Rightarrow K \cap F \text{ kompakt}$$

og

$$K_1 \text{ og } K_2 \text{ kompakte } \Rightarrow K_1 \cup K_2 \text{ kompakt.}$$

Hvis (S,d) er et fuldstændigt metrisk rum, gælder flg. alternative kompaktheds karakterisation.

$$K \subseteq S \text{ er kompakt} \Leftrightarrow K \text{ er lukket og } d\text{-total begrænset,}$$

hvor $A \subseteq S$ siges at være *d-total begrænset*, hvis A kan overdækkes med endelig mange kugler med vilkårlig lille radius, d.v.s.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; x_1, \ldots, x_n \in A : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} b(x_k, \epsilon).$$

Kompakthedsbegrebet giver anledning til en skærpelse af ovenstående resultat.

Korollar *Lad (S,d) være et polsk rum, d.v.s. et metrisk rum, hvor der findes en ækvivalent separabel fuldstændig metrik. Da er ethvert endeligt Borel mål μ indre regulær m.h.t. de kompakte mængder, d.v.s. for alle $A \in \mathcal{B}(S)$ er*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \,|\, K \subseteq A,\; K \text{ kompakt}\}.$$

Bevis. Da kompakthed, separabilitet og Borel σ-algebra bevares ved overgang til en ækvivalent metrik, kan og vil vi antage, at d er fuldstændig. Set i lyset af den ovenfor viste regularitet m.h.t. lukkede mængder er det nok at vise, at

$$\mu(F) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq F \text{ kompakt}\}$$

for enhver lukket delmængde $F \subseteq S$. Men hertil er det nok at betragte tilfældet $F = S$, d.v.s. vise

$$\mu(S) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq S \text{ kompakt}\},$$

thi for enhver kompakt mængde K og enhver lukket mængde F er

$$K \cap F \ \text{ kompakt og } \ F \setminus (K \cap F) \subseteq S \setminus K.$$

Lad $\epsilon > 0$ være givet og lad $(x_i)_{i\geq 1}$ betegne en følge af punkter, som er tæt i S. Tætheden betyder, at

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{b(x_i, 1/n)}$$

for ethvert n, hvor $\overline{b(x_i, 1/n)}$ betegner den lukkede kugle med centrum x_i og radius $1/n$, og da μ er opad kontinuert, findes der for ethvert $n \geq 1$ et $k_n \geq 1$, så at

$$\mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k_n} \overline{b(x_i, 1/n)}\right)^c\right) \leq \epsilon \cdot 2^{-n}.$$

Betragt nu mængden

$$K_\epsilon := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \overline{b(x_i, 1/n)}.$$

K_ϵ er pr. definition lukket og total begrænset og derfor kompakt ifølge ovenstående karakterisation af kompakthed i polske rum; og da

$$\mu(S) - \mu(K_\epsilon) = \mu(K_\epsilon^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k_n} \overline{b(x_i, 1/n)}\right)^c\right) \leq \epsilon$$

er påstanden vist. $\diamond$

Borel σ-algebraen i et separabelt metrisk rum er, som tidligere vist, frembragt af mængden af kugler. Det er derfor naturligt at spørge om, hvorvidt et mål er entydigt bestemt ved sine værdier på kugler. Spørgsmålet er generelt vanskeligt at besvare, da mængden af kugler er ikke stabil under endelig gennemsnit. Men vi skal senere vise, at ethvert endeligt Borel mål i $\mathbf{R}^n$ er entydigt bestemt ved sine værdier på Euklidiske kugler.

Integralet, konstruktion og egenskaber.

Lad i det følgende $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et vilkårligt *målrum*, d.v.s. $(E, \mathcal{E})$ er et måleligt rum og μ et mål på $\mathcal{E}$. Vi skal i dette afsnit konstruere det såkaldte integral m.h.t. μ. Integralafbildningen vil senere blive betegnet

$$f \mapsto \int f \, d\mu,$$

men på de næste par sider skrives kort I. Da integralet er stærkt målafhængig, ville en notation som I_μ være mere korrekt. Det er godt at tænke på et integral som et redskab til at måle størrelsen af funktioner, på samme måde som et mål angiver størrelsen af mængder.

Definition. Et *integral* m.h.t. μ er en afbildning I fra $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$ med flg. egenskaber. g, f og $(f_n)_{n \geq 1}$ betegner her elementer i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$.

a) I er *positiv additiv*, d.v.s. $I(af + bg) = a \cdot I(f) + b \cdot I(g)$ for $a, b \in \mathbf{R}_+$.

b) I *udvider* μ, d.v.s. $I(\mathbf{1}_A) = \mu(A)$ for alle $A \in \mathcal{E}$.

c) I er *voksende kontinuert*, d.v.s. $I(f) = \sup_n I(f_n)$ hvis $f_n \uparrow f$ μ-n.o.

Som det fremgår af det nedenstående konvergerer $I(f_n) \uparrow I(f)$ i c), d.v.s. $\sup_n$ kan erstattes af $\lim_n$.

Før vi viser, at der er et og kun et integral m.h.t. μ, vises, at I udover a), b) og c) tillige opfylder følgende egenskaber. g, h, f og $(f_n)_{n \geq 1}$ betegner her elementer i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$.

d) $I(f) = I(g)$ hvis $f = g$ μ-n.o., og derfor ifølge b) $I(f) = I(\mathbf{1}_\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ hvis $f = 0$ μ-n.o.

e) I er voksende, d.v.s. $I(f) \leq I(g)$ hvis $f \leq g$ μ-n.o., og lighedstegn forekommer kun, hvis enten $I(f) = \infty$ eller $f = g$ μ-n.o.

f) $I(f) < \infty \Rightarrow \mu(f = \infty) = 0$, d.v.s. $f < \infty$ μ-n.o.

g) $f_n \downarrow f$ μ-n.o. og $I(f_1) < \infty \Rightarrow I(f_n) \downarrow I(f)$.

h) $I(\liminf_n f_n) \leq \liminf_n I(f_n)$.

i) $\lim_n I(f_n) = I(f)$ og $\lim_n I(|f_n - f|) = 0$, hvis $f_n \to f$ μ-n.o., og der findes et h, så at $I(h) < \infty$ og $f_n \leq h$ μ-n.o. for alle n.

Bevis. d) Definer for alle $n \geq 1$ $g_n := f$, d.v.s. $g_n \uparrow g$ μ-n.o., hvorefter påstanden følger af c).

e) Da $I(f) = \sup_n I(f \wedge n)$ og tilsvarende for g ifølge c), er det nok at vise uligheden for begrænsede f og g. Men for sådanne er $g - f \wedge g$ et vel defineret element i $\mathrm{M}(\mathcal{E})_+$, og da $g \vee f = f + (g - f \wedge g)$ og I er additiv med ikke-negative værdier, er sagen klar, da $g = g \vee f$ μ-n.o. Sidste del i e) vises nedenfor.

f) er en konsekvens af e) og b), idet $a \cdot \mathbf{1}_{\{f=\infty\}} \leq f$ for alle $a \in \mathbf{R}_+$. I beviset for g) kan vi derfor antage, at $f_1 \in$M$(\mathcal{E})_+$, d.v.s. $g_n := f_1 - f_n \wedge f_1$ og $g := f_1 - f \wedge f_1$ definerer elementer i M$(\mathcal{E})_+$, og da $g_n \uparrow g$ μ-n.o. giver a), c) og lighederne

$$f_1 = g_n + f_n \wedge f_1 \ \mu\text{-n.o.} \ \text{ og } f_1 = g + f \wedge f_1 \ \mu\text{-n.o.},$$

at $I(f_n \wedge f_1) \downarrow I(f \wedge f_1)$ d.v.s. resultatet, da $f = f \wedge f_1$ og $f_n = f_n \wedge f_1$ μ-n.o.
h) Pr. definition af lim inf har vi, at

$$\inf_{k \geq n} f_k \uparrow \liminf_n f_n.$$

Punkterne c) og e) viser derfor, at

$$I(\liminf_n f_n) = \sup_n I(\inf_{k \geq n} f_k) \leq \sup_n \inf_{k \geq n} I(f_k) = \liminf_n I(f_n).$$

i) Da $|f_n - f| \leq 2h$ μ-n.o. er det nok at vise første del. Definer hertil for ethvert $n \geq 1$ $g_n = \sup_{k \geq n} f_k$. Da $g_1 \leq h$ og $g_n \downarrow f$ μ-n.o., fås af g), at

$$\limsup_n I(f_n) \leq \limsup_n I(g_n) = \lim_n I(g_n) = I(f).$$

Men ifølge h) gælder også $I(f) \leq \liminf_n I(f_n)$, og i) er derfor vist.
Vi mangler nu kun at vise sidste del af e). Hvis $I(f) = \infty$ er der ingenting at vise. Antag derfor at $I(f) = I(g) < \infty$. Ifølge f) kan vi antage, at både f og g kun antager endelige værdier, hvorfor som før $h := g - f \wedge g$ er et vel defineret element i M$(\mathcal{E})_+$, og da $g = f + h$ μ-n.o. er

$$I(g) = I(f) + I(h).$$

Påstanden er derfor en konsekvens af, at der for et givet h i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ gælder

$$I(h) = 0 \Rightarrow h = 0 \quad \mu\text{-n.o.},$$

hvilket da $n \cdot h \uparrow \infty \cdot \mathbf{1}_{\{h>0\}} \geq \mathbf{1}_{\{h>0\}}$ μ-n.o. følger af uligheden i e), idet

$$\mu(h > 0) = I(\mathbf{1}_{\{h>0\}}) \leq \sup_n I(n \cdot h) = \sup_n n\, I(h) = 0. \qquad \diamond$$

Punkterne a) og b) viser, at I er entydigt bestemt på S$(\mathcal{E})_+$, for hvis $f \in$ S$(\mathcal{E})_+$ er på formen $\sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, er

$$I(f) = \sum_i a_i \cdot \mu(A_i).$$

Specielt er

$$I(f) = \sum_i^n x_i \cdot \mu(f = x_i), \quad \text{hvis } \ f(E) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbf{R}_+,$$

d.v.s. $I(f)$ er en vægtet sum, hvor hver funktionsværdi indgår med en vægt, der svarer til μ-målet af den mængde, hvorpå den pågældende værdi antages.

I følge c) og Lemma 6 er I derfor entydigt bestemt på hele $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, thi for ethvert $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ findes der en følge $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{S}(\mathcal{E})_+$, så at $f_n \uparrow f$ μ-n.o. og dermed $I(f) = \sup_n I(f_n)$.
Vi mangler derfor kun at vise eksistensdelen i flg. udsagn.

På ethvert målrum $(E, \mathcal{E}, \mu)$ findes der et og kun et integral m.h.t. μ, d.v.s. præcis en afbildning I fra $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ ind i $\overline{\mathbf{R}}_+$ opfyldende de definerende krav a), b) og c) *og dermed også punkterne* d), ..., i) *formuleret på næstforegående side. Specielt gælder derfor for ethvert f i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, at*

$$I(f) = \sup\{I(h) \,|\, h \leq f,\ h \in \mathrm{S}(\mathcal{E})_+\}.$$

Bevis. Da formlen er en umiddelbar konsekvens af c), e) og Lemma 6, udestår kun eksistensen. Men som bemærket i Lemma 6 konvergerer $\phi_n(f) \uparrow f$ for ethvert f i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, hvor $\phi_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ er givet ved

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} (k-1)/2^n \cdot \mathbf{1}_{](k-1)/2^n,\, k/2^n]}(x) + n \cdot \mathbf{1}_{]n,\,\infty[}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{]j/2^n,\,\infty[}(x)$$

for alle $x \in \mathbf{R}$ og $n \geq 1$. D.v.s.

$$\phi_n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{\{f > j/2^n\}} \in \mathrm{S}(\mathcal{E})_+,$$

og ifølge a), b) og c) er den eneste kandidat til et eventuelt integral derfor afbildningen $I : \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$ defineret ved

$$I(f) := \sup_n s_n(f) \quad \text{hvor} \quad s_n(f) := \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n2^n} \mu\left(f > j/2^n\right) \quad n \geq 1.$$

Bemærk at da

$$2\mu\left(f > j/2^n\right) \leq \mu\left(f > 2j/2^{n+1}\right) + \mu\left(f > (2j-1)/2^{n+1}\right) \quad \text{for } j = 1, \ldots, n2^n$$

er

$$n \mapsto s_n(f) \quad \text{voksende, d.v.s.} \quad s_n(f) \uparrow I(f).$$

Det er nu let vise, at I opfylder c). For hvis $f_k \uparrow f$ μ-n.o. og dermed $\mu(f_k > t) \uparrow \mu(f > t)$ for alle t, ses at

$$s_n(f_k) \leq s_n(f_{k+1}) \uparrow_{k\to\infty} s_n(f),$$

hvoraf c) følger, idet

$$I(f_k) = \sup_n s_n(f_k) \leq \sup_n s_n(f_{k+1}) = I(f_{k+1}) \quad k \geq 1$$

og
$$I(f)=\sup_n s_n(f)=\sup_n\sup_k s_n(f_k)=\sup_k\sup_n s_n(f_k)=\sup_k I(f_k).$$
I opfylder også b), idet $I(a\mathbf{1}_A)=aI(\mathbf{1}_A)$ for ethvert $A\in\mathcal{E}$ og $a\geq 0$. Thi for alle $j,n\geq 1$ er
$$\mu(a\mathbf{1}_A>j/2^n)=\mu(A)\ \text{ hvis } j/2^n<a \text{ og } 0 \text{ ellers},$$
og derfor, idet $a(n)$ er det hele tal bestemt ved, at $a(n)/2^n<a\leq(a(n)+1)/2^n$,
$$I(a\mathbf{1}_A)=\mu(A)\cdot\sup_n\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{n2^n}\mathbf{1}_{]j/2^n,\infty[}(a)=\mu(A)\cdot\sup_n a(n)^+=a\cdot\mu(A).$$
Tilbage står kun at vise, at I er positiv additiv, d.v.s. opfylder a). Men da I opfylder c), er det ifølge Lemma 6 nok at vise positiv additivitet på $\mathrm{S}(\mathcal{E})_+$. For hvis $f,g\in\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ og (f_n),(g_n) er elementer i $\mathrm{S}(\mathcal{E})_+$, så at $f_n\uparrow f$ og $g_n\uparrow g$, så gælder for alle $a,b\in\mathbf{R}_+$, at $af_n+bg_n\uparrow af+bg$ og dermed, hvis I er positiv additiv på $\mathrm{S}(\mathcal{E})_+$, at
$$I(af+bg)=\sup_n I(af_n+bg_n)=\sup_n\,(aI(f_n)+bI(g_n))=aI(f)+bI(g).$$
Før vi går videre bemærkes, at for enhver $\mathcal{E}$-målelig partion $A_1,\ldots,A_k$ af E er
$$I(f)=\sum_{i=1}^k I(f\cdot\mathbf{1}_{A_i})$$
for ethvert $f\in\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, da $s_n(f)=\sum_{i=1}^k s_n(f\cdot\mathbf{1}_{A_i})$ for alle n, fordi
$$\mu(f>j/2^n)=\sum_{i=1}^k\mu(\{f>j/2^n\}\cap A_i)=\sum_{i=1}^k\mu(f\cdot\mathbf{1}_{A_i}>j/2^n)\ \text{ for alle } j,n\geq 1.$$
D.v.s. hvis $f=\sum_{i=1}^k a_i\cdot\mathbf{1}_{A_i}\in\mathrm{S}(\mathcal{E})_+$ og $g=\sum_{j=1}^l b_j\cdot\mathbf{1}_{B_i}\in\mathrm{S}(\mathcal{E})_+$, hvor A_i'erne og B_j'erne hver især udgør en endelig partition, så gælder for $a,b\geq 0$
$$I(af+bg)=\sum_{i=1}^k I((af+bg)\cdot\mathbf{1}_{A_i})=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l I((af+bg)\cdot\mathbf{1}_{A_i}\cdot\mathbf{1}_{B_j})=$$
$$\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l I((a\cdot a_i+b\cdot b_j)\cdot\mathbf{1}_{A_i\cap B_j})=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l\left(a\cdot I(a_i\cdot\mathbf{1}_{A_i\cap B_j})+b\cdot I(b_j\cdot\mathbf{1}_{A_i\cap B_j})\right)$$
$$=a\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l I(f\cdot\mathbf{1}_{A_i}\cdot\mathbf{1}_{B_j})+b\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l I(g\cdot\mathbf{1}_{A_i}\cdot\mathbf{1}_{B_j})=aI(f)+bI(g).$$
D.v.s. I er positiv additiv på $\mathrm{S}(\mathcal{E})_+$, og eksistens og entydighed af integralet m.h.t. μ er hermed vist. $\diamond$.

Bemærkning. En mere traditionel bevismetode går som følger: Definer I på $\mathrm{S}(\mathcal{E})_+$ som i Øvelse 14. Udvid dernæst I til hele $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ via formlen

$$I(f) = \sup\{I(h) \mid h \leq f,\ h \in \mathrm{S}(\mathcal{E})_+\}$$

og vis nu, at dette I er et integral m.h.t. μ.

Indtil nu er integralet kun defineret på ikke-negative funktioner, men som vi nu skal se kan det udvides til en stor klasse af funktioner, som antager både positive og negative værdier. Det vil dog normalt ikke kunne udvides til hele $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$. Definer hertil

$$L(\mu) := \{f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E}) \mid I(f^+) \wedge I(f^-) < \infty\}$$

og

$$L^1(\mu) := \{f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E}) \mid I(f^+) \vee I(f^-) < \infty\} = \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \mid I(|f|) < \infty\}.$$

$L(\mu)$ består altså af funktioner, hvor enten den 'positive' eller den 'negative' del ikke er 'for stor', og $L^1(\mu)$ af funktioner, hvor ingen af delene er 'for store'. Endvidere antager funktionerne i $L^1(\mu)$ kun reelle værdier.

I's positive linearitet viser sammen med identiteterne

$$x^{\pm}(a\,\cdot) = a\,x^{\pm}(\cdot) \text{ hvis } a \geq 0 \text{ og } \ x^{\pm}(a\,\cdot) = |a|\,x^{\mp}(\cdot) \text{ hvis } a < 0,$$

at $L(\mu)$ og $L^1(\mu)$ er stabile under multiplikation med vilkårlige skalarer, og da $|f+g| \leq |f| + |g|$ ses, at $L^1(\mu)$ er et vektorrum, idet

$$f, g \in L^1(\mu) \Rightarrow af + bg \in L^1(\mu) \quad \text{for alle reelle tal } a, b.$$

$L(\mu)$ er derimod ikke stabil under sum, men subadditiviteten af x^+ og x^- sikrer dog, at $af + bg \in L(\mu)$ for alle $a, b \in \mathbf{R}$, hvis blot f eller g ligger i $L^1(\mu)$.

Definer en afbildning fra $L(\mu)$ ind i $\overline{\mathbf{R}}$ ved fastsættelsen

$$\int f\, d\mu := I(f^+) - I(f^-) \quad \text{for } f \in L(\mu).$$

Da $f^+ = f$ og $f^- \equiv 0$ hvis $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, ses at der er tale om en udvidelse af I, d.v.s.

$$\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+ \subseteq L(\mu) \ \text{ og } \ \int f\, d\mu = I(f) \quad \text{for } f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+.$$

Ønsker man at fremhæve, at f er en funktion af en underliggende variabel skrives f.eks.

$$\int f(e)\, \mu(de) \ \text{ i stedet for } \ \int f\, d\mu.$$

Vi er nu i klar til at formulere og bevise flg. hovedsætning om integraler.

Sætning 2 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et givent målrum. Afbildningen*

$$f \mapsto \int f \, d\mu$$

fra $L(\mu)$ ind i $\overline{\mathbf{R}}$, der kaldes integralet m.h.t. μ, har flg. egenskaber. $(f_n)_{n\geq 1}, f, g, h$ og k betegner her elementer i $L(\mu)$ og a, b reelle tal.

1) Integralet er homogen, positiv og voksende, d.v.s.

$$\int af \, d\mu = a \int f \, d\mu, \quad 0 \leq \int g \, d\mu, \quad \int h \, d\mu \leq \int k \, d\mu$$

hvis $g \geq 0$ og $h \leq k$ μ-n.o., og der kan, hvis en af integralerne er endelig, kun gælde lighedstegn i sidste ulighedstegn, hvis $h = k$ μ-n.o. Specielt gælder

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

2) Integralet er positiv additiv på $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ og et lineært funktional på $L^1(\mu)$ d.v.s.

$$\int f \, d\mu \in \mathbf{R} \;\text{ og }\; \int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu \;\text{ hvis } f, g \in L^1(\mu).$$

Sumformlen holder, blot en af funktionerne ligger i $L^1(\mu)$.

3) **Monoton konvergens***, d.v.s.*

$$\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu \;\text{ hvis } f_n \uparrow f \;\mu\text{-n.o. og } \int f_1 \, d\mu > -\infty.$$

4) **Fatou's Lemma***, d.v.s.*

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu \;\text{ hvis } f_n \geq g \;\mu\text{-n.o. og } \int g \, d\mu > -\infty,$$

eller ækvivalent

$$\int \limsup_n f_n \, d\mu \geq \limsup_n \int f_n \, d\mu \;\text{ hvis } f_n \leq g \;\mu\text{-n.o. og } \int g \, d\mu < \infty.$$

5) **Lebesgue's Sætning om domineret konvergens***, d.v.s.*

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \;\text{ og }\; \lim_n \int |f_n - f| \, d\mu = 0,$$

hvis $f_n \to f$ μ-n.o. og $|f_n| \leq g$ μ-n.o., hvor $\int g \, d\mu < \infty$.

Bemærkning. Da I er voksende gælder for $g \in L(\mu)$ og $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$

$$g \leq f \;\mu\text{-n.o. og } \int g \, d\mu > -\infty \;\Rightarrow\; f \in L(\mu)$$

og

$$|f| \leq g \ \mu\text{-n.o. og} \int g \, d\mu < \infty \ \Rightarrow \ f \in L(\mu),$$

I punkterne 3) og 5) behøver man derfor ikke at forudsætte, at $f \in L(\mu)$, da dette følger af antagelserne.

Bevis. Udnyttes at x^+ er voksende og x^- aftagende samt formlerne vedrørende $x^{\pm}(a\,\cdot)$ omtalt ovenfor, oversættes 1) umiddelbart til tilsvarende og allerede viste egenskaber ved integralafbildningen I. Uligheden følger af homogeniteten og den voksende egenskab, da $f \leq |f|$ og $-f \leq |f|$.

Hvad angår 2), er integralværdierne klart endelige tal, hvorimod lineariteten er ny. Set i lyset af den viste homogenit er det nok at vise, at

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \quad \text{for } f, g \in L^1(\mu).$$

Ved opsplitning i positiv og negativ del har vi for givne f og g

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-),$$

og dermed

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Da I er additiv, fås derfor at

$$I((f+g)^+) + I(f^-) + I(g^-) = I((f+g)^-) + I(f^+) + I(g^+),$$

hvilket, da tallene er endelige, ved omordning giver det ønskede. Læseren bør overveje, at ligheden kun kræver, at en af f eller g ligger i $L^1(\mu)$.

Punkterne 3) og 5) vises ved at oversætte udsagnene til de tilsvarende påstande c), g) og i) omhandlende I. 4) følger af 1) og 3).

3) Antagelserne samt kontinuiteten og monotoniteten af x^+ og x^- bevirker, at

$$f_n^+ \uparrow f^+, \ f_n^- \downarrow f^- \text{ og } f_n^- \leq f_1^- \ \mu\text{-n.o. samt } I(f_1^-) < \infty.$$

Heraf fås 3), da punkterne c) og g) sikrer, at

$$I(f_n^+) \uparrow I(f^+) \text{ og } I(f_n^-) \downarrow I(f^-).$$

4) Da de to udsagn ifølge homogeniteten er ækvivalente, vises kun den første. Da $g \leq \inf_{k \geq n} f_k \leq \liminf_n f_n$ μ-n.o. og $\int g \, d\mu > -\infty$ er

$$\liminf_n f_n \ \text{ og } \ (\inf_{k \geq n} f_k)_{n \geq 1} \ \text{ alle elementer i } L(\mu).$$

Punkt 4) følger derfor af 1) og 3), idet

$$\inf_{k \geq n} f_k \uparrow \liminf_n f_n \ \text{ og } \ g \leq \inf_{k \geq n} f_k \leq f_n \ \mu\text{-n.o. for alle } n.$$

5) Det er nok at vise den første påstand, da den anden er et specialtilfælde heraf. Antagelsen og kontinuiteten af x^+ og x^- sikrer, at $f_n^+ \to f^+$ og $f_n^- \to f^-$ μ-n.o. samt

$$f_n^+ \vee f_n^- \leq |f_n| \leq g^+ \quad \mu\text{-n.o. og} \quad I(g^+) < \infty,$$

og dermed $\lim_n I(f_n^+) = I(f^+)$ og $\lim_n I(f_n^-) = I(f^-)$ ifølge punkt i). 5) er nu umiddelbar, da begge grænseværdier er endelige. ◇

Bemærkning. Hvis $f \in L(\mu)$ har endeligt integral, er f endelig μ-n.o., og $f = \tilde{f}$ μ-n.o., hvor

$$\tilde{f} := f \cdot \mathbf{1}_{\{|f|<\infty\}} \in L^1(\mu).$$

For ethvert $f \in L(\mu)$ og $A \in \mathcal{E}$ er $f \cdot \mathbf{1}_A \in L(\mu)$ (overvej) og

$$\int_A f \, d\mu := \int f \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Man taler her om 'integralet af f over A'. Hvis $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ og $A =]\,a, b\,]$ indføres yderligere

$$\int_a^b f \, d\mu := \int_{]\,a,b\,]} f \, d\mu.$$

Korollar Beppo Levi's Sætning.
Lad $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq L^1(\mu)$ *være givet, så at* $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty$. *Da er* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(e)$ *konvergent i* $\mathbf{R}$ *for* μ*-n.a.* e*, og*

$$s_\infty \in L^1(\mu) \quad \text{samt} \quad \int s_\infty \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu,$$

hvor s_∞ *er dannet som i Lemma 5 ud fra* $(s_n)_{n\geq 1}$*, hvor* $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ $n \geq 1$.

Bevis. Definer for ethvert n

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|,$$

d.v.s. $(g_n)_{n\geq 1} \subseteq L^1(\mu)$ og $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ for alle n. Ifølge Monoton konvergens og lineariteten gælder

$$\int \sup_n g_n \, d\mu = \sup_n \int g_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k| \, d\mu < \infty,$$

og dermed $\sup_n g_n = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| < \infty$ μ-n.o. Fuldstændigheden af $\mathbf{R}$ medfører derfor at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(e)$, d.v.s. $\lim_n s_n(e)$, eksisterer i $\mathbf{R}$ for μ-n.a. e, og udnyttes at

$$|s_n| = |\sum_{k=1}^{n} f_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k| \leq \sup_n g_n \quad \text{for alle } n$$

følger resultatet af Lebesgue's Sætning. ◇

Ud fra μ kan man, som tidligere vist, danne nye mål ved f.eks. restriktion og billedmål dannelse, og det næste resultat beskriver sammenhængen mellem integralerne for sådanne nært beslægtede mål. Punkt B), som omhandler integration med billedmål, er særligt vigtigt og omtales ofte som *Den lille transformationssætning.*

Sætning 3 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et givent målrum.*
A) For ethvert $A \in \mathcal{E}$ er $L(\mu_A) = \{f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E}) \mid f \cdot \mathbf{1}_A \in L(\mu)\}$ og

$$\int f \, d\mu_A = \int f \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu \quad \text{for } f \in L(\mu_A).$$

B) Lad $(F, \mathcal{F})$ være et måleligt rum og $\varphi : E \to F$ en målelig afbildning. Da er

$$L(\mu_\varphi) = \{f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{F}) \mid f \circ \varphi \in L(\mu)\} \text{ og } \int f \, d\mu_\varphi = \int f \circ \varphi \, d\mu \quad \text{for } f \in L(\mu_\varphi).$$

C) Antag $\mu = \sum_i a_i \cdot \mu_i$ for elementer $a_i \geq 0$ og $\mu_i \in \mathrm{m}(\mathcal{E})$. Da er

$$L(\mu) = \{f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E}) \mid \sum_i a_i \int f^+ \, d\mu_i < \infty \text{ eller } \sum_i a_i \int f^- \, d\mu_i < \infty\}$$

og

$$\int f \, d\mu = \sum_i a_i \int f \, d\mu_i \quad \text{for } f \in L(\mu).$$

Bevis. Vi viser kun B), idet de to andre beviser er analoge. Da

$$(f(\varphi))^+ = f^+(\varphi) \text{ og } (f(\varphi))^- = f^-(\varphi)$$

for $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{F})$ følger pr. konstruktion af integralet, at det er nok at vise, at

$$\int f \, d\mu_\varphi = \int f(\varphi) \, d\mu \quad \text{for alle } f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{F})_+.$$

Men dette følger umiddelbart ved brug af Standardbeviset, da Sætning 2 sammen med definitionen på billedmål viser, at

$$V := \{f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{F})_+ \mid \int f \, d\mu_\varphi = \int f \circ \varphi \, d\mu\}$$

opfylder betingelserne a_1), b_1) og c_1) på side 20. ◇

Vi får brug for endnu et resultat af denne type. Thi lad stadig $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum og betragt for givet $g \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ mængdefunktionen ν defineret ved

$$\nu(A) := \int_A g \, d\mu = \int g \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu \quad \text{for } A \in \mathcal{E}.$$

Da $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ for disjunkte mængder A og B, sikrer integralets additivitet på $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ sammen med sætningen om Monoton konvergens, at ν er et mål på $\mathcal{E}$, d.v.s.

$$\nu(\emptyset) = 0 \text{ og } \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \text{ for parvis disjunkte } A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{E}.$$

ν betegnes ofte $g\,d\mu$. I denne sammenhæng gælder nu

1) ν er μ-satureret, d.v.s. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ for $A \in \mathcal{E}$.

2) ν er et endeligt mål hvis $\int g\,d\mu < \infty$.

3) ν er et σ-endeligt mål, hvis μ er σ-endeligt og $g < \infty$ μ-n.o.

Bemærkning. ν er altid sum-endeligt, hvis μ er σ-endeligt.

Bevis. 1) og 2) er åbenbare. Lad $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ være givet, så at $\mu(A_n) < \infty$ for alle n og $\bigcup_{n\geq 1} A_n = E$. Definer for $n, k \geq 1$

$$B_{n,k} := A_n \cap \{g \leq k\}.$$

Integralets positivitet sikrer, at $\nu(B_{n,k}) \leq k \cdot \mu(A_n) < \infty$ for alle n og k, og da $E = \bigcup_{n,k} B_{n,k} \cup \{g = \infty\}$ er påstanden vist, thi da ν ifølge 1) er μ-satureret, er $\nu(g = \infty) = 0$ da $\mu(g = \infty) = 0$. $\diamond$

Med baggrund heri siges et mål ν på $(E, \mathcal{E})$ at være *absolut kontinuert* m.h.t. μ, skrives $\nu \ll \mu$, hvis der findes et $g \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ så at

$$\nu(A) = \int_A g\,d\mu \quad \text{for } A \in \mathcal{E}.$$

g kaldes den *Radon-Nikodym afledede* af ν m.h.t. μ, eller kort den afledede eller *tætheden* af ν m.h.t. μ, og betegnes ofte $d\nu/d\mu$.
Det er oplagt af interesse at vide, i hvor høj grad g er entydigt bestemt ud fra ν og μ. Et brugbart svar er indeholdt i følgende overvejelser.

Proposition 5 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum og lad f, $g \in L(\mu)$ være givet, så at*

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Da er $f \leq g$ μ-n.o. hvis $f, g \in L^1(\mu)$, eller hvis μ er σ-endeligt.

Korollar 1 *For ethvert mål ν på $(E, \mathcal{E})$, som er absolut kontinuert m.h.t. μ, er den Radon-Nikodym afledede $d\nu/d\mu$, entydigt bestemt op til μ-nulmængder, hvis enten ν er et endeligt mål, eller μ er σ-endeligt.*

Korollar 2 *To funktioner $f, g \in L^1(\mu)$ er μ-identiske, d.v.s. $f = g$ μ-n.o., hvis*

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{G},$$

hvor $\mathcal{G}$ er $\cap f$-stabil, indeholder E samt frembringer $\mathcal{E}$, d.v.s. $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$.

Korollar 1 er klar, og nr. 2 følger af Proposition 2, idet man først ved linearitet og opsplitning i positiv og negativ del reducerer til ikke-negative f og g.

Bevis for Proposition 5. Antag at f, $g \in L^1(\mu)$ og dermed $f \cdot \mathbf{1}_A$, $g \cdot \mathbf{1}_A$ samt $f \wedge g = f \cdot \mathbf{1}_{\{f\leq g\}} + g \cdot \mathbf{1}_{\{g<f\}}$ indeholdt i $L^1(\mu)$ for alle $A \in \mathcal{E}$. D.v.s.

$$\int f \wedge g\,d\mu = \int_{\{f\leq g\}} f\,d\mu + \int_{\{g<f\}} g\,d\mu \geq \int_{\{f\leq g\}} f\,d\mu + \int_{\{g<f\}} f\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Men da $f \geq f \wedge g$ og integralet er voksende, må der gælde

$$\int f \wedge g \, d\mu = \int f \, d\mu$$

og dermed ifølge Sætning 2 punkt 1 $f = f \wedge g \leq g$ μ-n.o.
Antag dernæst at μ er σ-endeligt, og lad $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ være givet, så at

$$\mu(A_n) < \infty \quad \text{for alle } n \geq 1 \quad \text{og} \quad A_n \subseteq A_{n+1} \uparrow E.$$

Vi skal vise $\mu(g < f) = 0$. Hertil er det, da

$$\{g < f\} = \bigcup_{r_1, r_2 \in \mathbf{Q}} \{g < r_1 < r_2 < f\} = \bigcup_{r_1, r_2 \in \mathbf{Q}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n$$

nok at vise, at $\mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n) = 0$ for alle $n \geq 1$ og alle rationale tal $r_1 < r_2$. Men da integralet er voksende, er

$$\int_{\{g<r_1<r_2<f\} \cap A_n} f \, d\mu \geq r_2 \cdot \mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n)$$

og

$$\int_{\{g<r_1<r_2<f\} \cap A_n} g \, d\mu \leq r_1 \cdot \mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n)$$

og derfor ifølge antagelsen

$$r_2 \cdot \mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n) \leq r_1 \cdot \mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n).$$

Men da

$$\mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n) \leq \mu(A_n) < \infty,$$

er dette kun muligt, hvis $\mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n) = 0$. D.v.s. $\mu(g < f) = 0$ og dermed $f \leq g$ μ-n.o. $\diamond$

Det næste resultat omhandler integration m.h.t. til et absolut kontinuert mål.

Sætning 4 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et givent målrum, og lad $\nu \in \mathrm{m}(\mathcal{E})$ være absolut kontinuert m.h.t. μ med Radon-Nikodym afledet $g \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$. Da er*

$$L(\nu) = \{f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E}) \mid f \cdot g \in L(\mu)\} \quad \text{og} \quad \int f \, d\nu = \int f \cdot g \, d\mu \quad \text{for } f \in L(\nu).$$

Bevis. Da g er ikke-negativ, er

$$(f \cdot g)^+ = f^+ \cdot g \quad \text{og} \quad (f \cdot g)^- = f^- \cdot g \quad \text{for alle } f.$$

Pr. konstruktion af integralet er det derfor nok at se på ikke-negative funktioner, d.v.s. vise

$$\int f \, d\nu = \int f \cdot g \, d\mu \quad \text{for } f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+.$$

Men dette følger af Standardbeviset ved først at betragte indikatorfunktioner, dernæst simple funktioner o.s.v. Detaljerne overlades til læseren. $\diamond$

Øvelse 15. Lad situationen være som i Sætning 4. Vis at $g > 0$ ν-n.o., samt at ν og μ er ækvivalente, hvis også $g > 0$ μ-n.o. $\square$

Vi afslutter kapitlet med at se lidt nærmere på målrummet $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$. Mere præcist er vi interesseret i sammenhængen mellem det netop definerede Lebesgue integral, og det fra tidligere kurser kendte Riemann integral. Som bekendt er en funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Riemann integrabel over et endeligt interval $[\,a, b\,]$, hvis

$$-\infty < \sup_{\pi} \sum_{i \geq 1} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \inf_{\pi} \sum_{i \geq 1} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \infty,$$

hvor sup og inf tages over alle endelige inddelinger $\pi :\ a = t_0 < \ldots < t_n = b$ af intervallet $[\,a, b\,]$, og

$$m_i := \inf_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} f(t) \quad \text{og} \quad M_i := \sup_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} f(t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

for enhver inddeling $\pi :\ a = t_0 < \ldots < t_n = b$. Den fælles værdi betegnes i givet fald $\mathrm{R}\int_a^b f(x)\,dx$ og kaldes Riemann integralet af f over intervallet $[\,a, b\,]$.

Den tætte forbindelse mellem Riemann integralet og stamfunktionsbegrebet betyder, at mange Riemann integraler kan beregnes eksplicit. Set ud fra et beregningssynspunkt er det derfor af åbenbar interesse at vide, at Lebesgue integralet er en udvidelse af Riemann integralet, idet der gælder følgende resultat.

Riemann versus Lebesgue integral.
Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være Borel målelig. Hvis f er Riemann integrabel over et endeligt interval $[\,a, b\,]$, så er $f \cdot \mathbf{1}_{[\,a,b\,]} \in L^1(\lambda_1)$ og

$$\int f \cdot \mathbf{1}_{[\,a,b\,]}\, d\lambda_1 = R\int_a^b f(x)\,dx.$$

Bevis. Pr. definition af Riemann integralet er $f \cdot \mathbf{1}_{[\,a,b\,]}$ en begrænset Borel funktion, d.v.s. element i $L^1(\lambda_1)$, og for enhver endelig inddeling $\pi :\ a = t_0 < \ldots < t_n = b$ af intervallet $[\,a, b\,]$ med m_i og M_i som ovenfor definerer

$$\underline{f}^{\,\pi} := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \mathbf{1}_{]\,t_{i-1}, t_i\,[} \quad \text{og} \quad \overline{f}^{\,\pi} := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \mathbf{1}_{[\,t_{i-1}, t_i\,]}$$

to simple Borel funktioner, så at $\underline{f}^{\,\pi} \leq f \cdot \mathbf{1}_{[\,a,b\,]} \leq \overline{f}^{\,\pi}$. Egenskaber ved Lebesgue integralet sikrer derfor

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \int \underline{f}^{\,\pi}\, d\lambda_1 \leq \int f \cdot \mathbf{1}_{[\,a,b\,]}\, d\lambda_1 \leq \int \overline{f}^{\,\pi}\, d\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}),$$

hvoraf den ønskede lighed let udledes. $\diamond$

Det netop viste resultat er med til at begrunde, at man i forbindelse med integration med λ_1 ofte skriver dx i stedet for $d\lambda_1$.

Uligheder.
Lad fortsat $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum. Vi skal i dette afsnit beskæftige os med integraluligheder. Vi har allerede mødt en sådan ulighed nemlig

$$|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu \quad \text{for } f \in L(\mu).$$

Denne vil vi nu generalisere, og vi starter med én set ikke blot med nationale øjne meget interessant ulighed.

Proposition 6 Jensen's ulighed.
Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et sandsynlighedsfelt, og lad $f \in L^1(\mu)$ være givet, så at $\mu(f \in J) = 1$, hvor J er et interval i $\mathbf{R}$. Da er $\varphi(f) \in L(\mu)$ for enhver Borel funktion $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er konveks på J, og

$$\int f\, d\mu \in J \quad \text{og} \quad \varphi\Big(\int f\, d\mu\Big) \leq \int \varphi(f)\, d\mu.$$

Bevis. Betegnes J's venstre og højre endepunkt a og b, er $a \leq f \leq b$ μ-n.o. og derfor ved integration (μ er et sandsynlighedsmål)

$$a \leq m \leq b \quad \text{hvor } m := \int f\, d\mu.$$

Da $f \in L^1(\mu)$ er $m \in \mathbf{R}$, d.v.s. $m = a$ betyder $a \in \mathbf{R}$ og $\mu(f = a) = 1$. a og dermed m ligger derfor i J og $\varphi(f) = \varphi(a)$ μ-n.o., d.v.s. $\varphi(f) \in L(\mu)$ samt

$$\varphi(m) = \varphi(a) = \int \varphi(f)\, d\mu.$$

$m = b$ klares analogt. Vi kan derfor antage, at $m \in]a, b[\subseteq J$, og da φ er konveks, findes der som vist i appendikset en reel konstant c_m, så at

$$\varphi(x) \geq c_m(x - m) + \varphi(m) \text{ for } x \in J \quad \text{d.v.s. } \varphi(f) \geq \varphi(m) + c_m(f - m) \ \mu\text{-n.o.}$$

Da $\varphi(m) + c_m(f - m) \in L^1(\mu)$ viser dette, at $\varphi(f) \in L(\mu)$ samt

$$\int \varphi(f)\, d\mu \geq \int (\varphi(m) + c_m(f - m))\ d\mu = \varphi(m) + c_m \int f\, d\mu - c_m \cdot m = \varphi(m),$$

da integralet er voksende og lineær på $L^1(\mu)$. $\diamond$

Bemærkning. Resultatet gælder uændret for φ med værdier i $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Korollar *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et sandsynlighedsfelt. Afbildningen*

$$p \mapsto \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p}$$

fra $\mathbf{R}_+$ ind i $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ er voksende for alle $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$.

Bevis. Det er nok at se på $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$. Lad derfor et sådant f samt $0 < p_1 < p_2$ være givet. Da funktionen $x \mapsto x^{p_2/p_1}$ er konveks på intervallet $[0, \infty)$, gælder ifølge Jensen's ulighed for ethvert $n \geq 1$, at

$$\Big(\int (f \wedge n)^{p_1}\, d\mu\Big)^{p_2/p_1} \leq \int ((f \wedge n)^{p_1})^{p_2/p_1}\, d\mu = \int (f \wedge n)^{p_2}\, d\mu$$

d.v.s.

$$\Big(\int (f \wedge n)^{p_1}\, d\mu\Big)^{1/p_1} \leq \Big(\int (f \wedge n)^{p_2}\, d\mu\Big)^{1/p_2} \leq \Big(\int f^{p_2}\, d\mu\Big)^{1/p_2}.$$

Hvoraf påstanden følger ved brug af sætningen om Monoton konvergens. ◇

Bemærkning. Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et sandsynlighedsfelt og f et element i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$. I forlængelse af korollaret er det oplagt at spørge om værdien af grænseværdierne

$$\lim_{p \uparrow \infty} \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p} \quad \text{og} \quad \lim_{p \downarrow 0} \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p}.$$

Simple uligheder viser, at

$$\lim_{p \uparrow \infty} \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p} = \sup\{M > 0 \mid \mu(|f| > M) > 0\},$$

og brug af logaritmefunktionen samt Lebesgue's Sætning viser, at

$$\lim_{p \downarrow 0} \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p} = exp\Big(\int \log|f|\, d\mu\Big) \quad \text{hvis} \quad f \in \bigcup_{p>0} L^p(\mu).$$

Jensen's ulighed holder kun for sandsynlighedsmål, dog kan der ved passende normering udledes et 'lignende' resultat for endelige mål. Men en udvidelse til uendelige målrum er ikke mulig. Derimod holder de vigtige Hölder's og Minkowski's uligheder i alle målrum. Formuleringerne kræver lidt ny notation. Bemærk at der for $p = 1$ er overensstemmelse med tidligere indført notation.

Notation. For ethvert $p > 0$ defineres

$$L^p(\mu) := \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \mid \int |f|^p\, d\mu < \infty\}.$$

Ulighederne

$$|ax|^p = |a|^p|x|^p, \quad |x + y|^p \leq 2^p(|x|^p + |y|^p) \ \text{ for } x, y, a \in \mathbf{R}$$

viser, at $L^p(\mu)$-rummene er vektorrum, d.v.s. stabile under addition og multiplikation med skalar, og da

$$|x|^{p_1} \leq |x|^{p_2} + 1 \quad \text{for } x \in \mathbf{R} \text{ og } p_1 \leq p_2$$

er $L^{p_2}(\mu) \subseteq L^{p_1}(\mu)$, hvis μ er et endeligt mål og $p_1 \leq p_2$. D.v.s. i endelige målrum bliver L^p mindre, når p bliver større. For uendelige målrum, d.v.s. $\mu(E) = \infty$, er der ingen tilsvarende alment gyldige inklusioner mellem $L^p(\mu)$-rummene.

Proposition 7 Hölder's ulighed.
Lad positive reelle tal p og q være givet, så at $1/p+1/q = 1$. For alle $f, g \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$ er

$$\int |f| \cdot |g| \, d\mu \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int |g|^q \, d\mu\Big)^{1/q}.$$

Specielt er $f \cdot g \in L^1(\mu)$, hvis $f \in L^p(\mu)$ og $g \in L^q(\mu)$.

Bevis. Det er klart nok at se på ikke-negative funktioner, og da uligheden er oplagt, hvis højresiden er uendelig eller $f = 0$ μ-n.o., kan vi uden tab af generalitet antage $g \in L^q(\mu)$ og $f \in L^p(\mu)$ samt $\mu(f > 0) > 0$ og dermed $m := \int f^p \, d\mu > 0$. Definer

$$\nu(A) := \frac{1}{m} \int_A f^p \, d\mu \quad \text{for } A \in \mathcal{E}.$$

Som tidligere vist er ν et mål og på grund af normeringen derfor et sandsynlighedsmål. Bruges nu Korollaret til Jensen's ulighed på den ikke-negative funktion $u = g \cdot f^{1-p} \cdot \mathbf{1}_{\{f>0\}}$ fås ifølge Sætning 4, da $1 < q$,

$$\frac{1}{m} \int g \cdot f \, d\mu = \int u \, d\nu \leq \Big(\int u^q \, d\nu\Big)^{1/q} = \frac{1}{m^{1/q}} \Big(\int_{\{f>0\}} g^q \cdot f^{q(1-p)} \cdot f^p \, d\mu\Big)^{1/q},$$

og dermed den ønskede ulighed da $q(1-p) = -p$ og $1 - 1/q = 1/p$. ◇

Positive tal p og q, som opfylder $1/p+1/q = 1$, siges at være *konjugerede*. Specielt er 2 konjugeret med sig selv, og tilfældet $p = 2$, d.v.s. uligheden

$$\int |f| \cdot |g| \, d\mu \leq \Big(\int |f|^2 \, d\mu\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int |g|^2 \, d\mu\Big)^{1/2},$$

er også kendt under navnet **Cauchy-Schwarz's** ulighed.

Proposition 8 Minkowski's ulighed.
Lad $1 \leq p < \infty$ være givet. For alle $f, g \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$ er

$$\Big(\int |f+g|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int |g|^p \, d\mu\Big)^{1/p}.$$

Bevis. Tilfældet $p = 1$ overlades til læseren. Lad derfor $p > 1$ og f og g være givet. Ligesom ovenfor kan vi uden tab af generalitet antage, at f og g og dermed også $f+g$ ligger i $L^p(\mu)$. Da $q(p-1) = p$ er $|f+g|^{p-1}$ derfor indeholdt i $L^q(\mu)$, hvor q er det til p konjugerede tal. Ved brug af trekantsuligheden fås, at

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq \int |f+g|^{p-1} \cdot |f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1} \cdot |g| \, d\mu.$$

Men ifølge Hölder's ulighed er

$$\int |f+g|^{p-1} \cdot |f| \, d\mu \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int |f+g|^{q(p-1)} \, d\mu\Big)^{1/q}$$

og

$$\int |f+g|^{p-1} \cdot |g| \, d\mu \leq \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int |f+g|^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/q},$$

hvilket sammen med ligheden $p = q(p-1)$ ved addition giver

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq \left(\left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \right) \cdot \left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Hvoraf resultatet fås ved forkortning, da tallene er endelige og $1/p = 1 - 1/q$. $\diamond$

Bemærkning: Vi har kun formuleret Hölder's og Minkowski's uligheder for funktioner i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, men de kan selvfølgelig uden videre formuleres for elementer i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$. Dog skal $f+g$ omgås med en vis omhyggelighed.

I modsætning til Hölder's og Minkowski's uligheder gælder den sidste ulighed, vi skal betragte, for alle $p > 0$.

Proposition 9 Markov's ulighed.
For alle $p > 0$ og alle $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})$ er

$$\mu(|f| \geq t) \leq \frac{1}{t^p} \int |f|^p \, d\mu \quad \text{for } t > 0.$$

Bevis. Lad $p > 0$ og $t > 0$ være givet. Igen behøver vi kun se på ikke-negative funktioner. For et sådant $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ fås ifølge egenskaber ved integralet, da

$$t \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq t\}} \leq f \quad \text{og dermed} \quad t^p \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq t\}} \leq f^p,$$

at

$$t^p \cdot \mu(f \geq t) = \int t^p \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq t\}} \, d\mu \leq \int f^p \, d\mu,$$

hvoraf resultatet følger. $\diamond$

Da argumentet kun udnytter, at $t \mapsto t^p$ er voksende på $\mathbf{R}_+$ har man en 'Markov ulighed' for enhver voksende funktion $\psi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$.

Ifølge Markov's ulighed er $\lim_{t\to\infty} \mu(|f| \geq t) = 0$ for ethvert $f \in \bigcup_{p>0} L^p(\mu)$, og som en udvidelse af de indførte L^p-rum defineres

$$L^0(\mu) := \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \mid \lim_{t\to\infty} \mu(|f| \geq t) = 0\}.$$

$L^0(\mu)$, der som nævnt, omfatter $L^p(\mu)$ for ethvert $p > 0$, er tydeligvis stabil under addition og multiplikation med skalar, d.v.s. $L^0(\mu)$ er et funktionsvektorrum. Hvis μ er et sandsynlighedsmål eller mere generelt et endeligt mål, er $L^0(\mu) = \mathrm{M}(\mathcal{E})$, hvorimod $L^0(\mu)$ er en ægte delmængde af $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, hvis f.eks. μ er σ-endelig men $\mu(E) = \infty$.

Produktmål, eksistens og egenskaber.
Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ og $(F, \mathcal{F}, \nu)$ betegne to σ-endelige målrum. Som tidligere indført, betegner $\mu \otimes \nu$ det entydigt bestemte mål på $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, hvis værdi på en produktmængde $A \times B$ er $\mu(A) \cdot \nu(B)$. I dette afsnit vises, at produktmålet vitterligt eksisterer, samt hvordan integraler m.h.t. dette mål kan beregnes. Hertil får vi brug for flg. lemma.

Lemma 9 *For ethvert $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ er $x \mapsto \nu(U(x))$ $\mathcal{E}$-målelig og tilsvarende er $y \mapsto \mu(U(y))$ $\mathcal{F}$-målelig. $U(x)$ og $U(y)$ betegner her h.h.v. x og y sektionen af U. Mere generelt gælder for ethvert $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_+$, at*

$$x \mapsto \int_F f(x,y)\,\nu(dy) \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+ \ \text{og}\ y \mapsto \int_E f(x,y)\,\mu(dx) \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{F})_+.$$

Bevis. Ifølge M5 er

$$y \mapsto f(x,y) \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{F})_+ \text{ for } x \in E \text{ og } x \mapsto f(x,y) \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+ \text{ for } y \in F,$$

for alle $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_+$, og da

$$\nu(U(x)) = \int_F \mathbf{1}_U(x,y)\,\nu(dy) \ \ x \in E \ \ \text{og} \ \ \mu(U(y)) = \int_E \mathbf{1}_U(x,y)\,\mu(dx) \ \ y \in F$$

for alle $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, viser Standardbeviset ved brug af stabiliteten af $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ og $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{F})_+$ under endelig sum og tællelig sup-dannelse, at det er nok at vise, at

$$x \mapsto \nu(U(x)) \ \mathcal{E}\text{-målelig og } y \mapsto \mu(U(y)) \ \mathcal{F}\text{-målelig for alle } U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}.$$

Vi viser det første. Da ν er σ-endelig, findes der $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$, så at $B_n \uparrow F$ og $\nu(B_n) < \infty$ for alle n. D.v.s. $\nu(U(x) \cap B_n) \uparrow \nu(U(x))$ for alle $x \in E$ og $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, og det er derfor nok at vise, at for givent $n \geq 1$ er $\mathcal{D}_n = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, hvor

$$\mathcal{D}_n := \{U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \,|\, x \mapsto \nu(U(x) \cap B_n) \in \mathrm{M}(\mathcal{E})\}.$$

Men da $\mathrm{M}(\mathcal{E})$ er stabil under grænseovergang samt et vektorrum, er $\mathcal{D}_n$ et d-system og derfor hele $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, da den indeholder enhver produktmængde, idet

$$\nu((A \times B)(x) \cap B_n) = \nu(B \cap B_n) \cdot \mathbf{1}_A(x) \ \ x \in E,\ A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F}. \ \ \diamond$$

Da positive målelige funktioner er integrable, er der ved fastsættelsen

$$m(U) := \int_E \nu(U(x))\,\mu(dx) \ \ \text{og} \ \ \tilde{m}(U) := \int_F \mu(U(y))\,\nu(dy)$$

for $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, derfor defineret to ikke-negative mængdefunktioner på $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$. Formlerne for sektionsdannelse, integralets linearitet samt Monoton konvergens viser, at både m og $\tilde{m}$ er mål på $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, og da det ovenstående sikrer, at

$$m(A \times B) = \tilde{m}(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

for enhver produktmængde $A \times B$, har vi dermed påvist eksistensen af produktmålet $\mu \otimes \nu$ samt ligheden $\mu \otimes \nu = m = \tilde{m}$. D.v.s. for alle $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ er

$$\mu \otimes \nu(U) = \int_E \nu(U(x))\, \mu(dx) = \int_F \mu(U(y))\, \nu(dy)$$

eller ækvivalent

$$\int_{E\times F} \mathbf{1}_U \, d\mu \otimes \nu = \int_E \{\int_F \mathbf{1}_U(x,y)\, \nu(dy)\}\, \mu(dx) = \int_F \{\int_E \mathbf{1}_U(x,y)\, \mu(dx)\}\, \nu(dy).$$

Udnyttes igen integralets linearitet samt Monoton konvergens ses ved brug af Standardbeviset, at denne integrallighed udvider til alle ikke-negative målelige funktioner, og vi har hermed vist flg. sætning, hvor første del normalt tilskrives Tonelli og anden Fubini. Det er vigtigt, at målene i det mindste er sum-endelige.

Sætning 5 Tonelli-Fubini.
Produktmålet $\mu \otimes \nu$ eksisterer, og for ethvert $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_+$ er

$$\int_{E\times F} f \, d\mu \otimes \nu = \int_F \{\int_E f(x,y)\, \mu(dx)\}\, \nu(dy) = \int_E \{\int_F f(x,y)\, \nu(dy)\}\, \mu(dx),$$

specielt er

$$\mu \otimes \nu(U) = \int_F \mu(U(y))\, \nu(dy) = \int_E \mu(U(x))\, \mu(dx) \qquad U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}.$$

Endvidere er $f \in \mathrm{M}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ element i $L^1(\mu \otimes \nu)$, hvis og kun hvis

$$\int_E \{\int_F |f(x,y)|\, \nu(dy)\}\, \mu(dx) \text{ og dermed } \int_F \{\int_E |f(x,y)|\, \mu(dx)\}\, \nu(dy)$$

er endelig. I givet fald er $\mu(E \backslash A_1^f) = \nu(F \backslash A_2^f) = 0$, hvor

$$A_1^f := \{x \in E \mid \int |f(x,y)|\, \nu(dy) < \infty\} = \{x \in E \mid y \mapsto f(x,y) \in L^1(\nu)\}$$

$$A_2^f := \{y \in F \mid \int |f(x,y)|\, \mu(dx) < \infty\} = \{y \in F \mid x \mapsto f(x,y) \in L^1(\mu)\},$$

og der gælder $I_1^f \in L^1(\mu)$ og $I_2^f \in L^1(\nu)$ samt beregningsformlen

$$\int_{E\times F} f \, d\mu \otimes \nu = \int_E I_1^f(x)\, \mu(dx) = \int_F I_2^f(y)\, \nu(dy),$$

hvor

$$I_1^f(x) := \int_F f(x,y)\, \nu(dy) \cdot \mathbf{1}_{A_1^f}(x) \quad x \in E$$

og

$$I_2^f(y) := \int_E f(x,y)\, \mu(dx) \cdot \mathbf{1}_{A_2^f}(y) \quad y \in F.$$

Bemærk at Fubini's Sætning er særlig simpel for $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$ hvor $A_1^f = E$ og $A_2^f = F$. F.eks. hvis μ og ν er endelige mål, og f er begrænset. Opskriv formlen.

Da $\lambda_{n+1} = \lambda_n \otimes \lambda_1$ for $n \geq 1$ er eksistensen af Lebesgue målet på $\mathbf{R}^n$ ifølge Tonelli's sætning et spørgsmål om eksistens af Lebesgue målet på $\mathbf{R}$.

Integrationsformel.
Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et σ-endeligt målrum. For ethvert $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ er

$$\int_E f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(f > t) \, \lambda_1(dt).$$

D.v.s. da $t \mapsto \mu(f > t)$ er aftagende, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(f > k) \leq \int_E f \, d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(f > k) + \mu(f > 0).$$

Bevis. Lad $f \in \overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ være givet. Da den sidste påstand følger ved brug af simple uligheder, ser vi kun på den første. Definer

$$H := \{(e,t) \in E \times \mathbf{R} \,|\, 0 < t < f(e)\},$$

d.v.s. H er 'området under grafen'. H er en produktmålelig mængde, idet

$$H = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}_+} \{f > q\} \times]0, q] \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}),$$

hvor $\mathbf{Q}$ er de rationale tal, og $H(t) = \emptyset$ for $t \leq 0$ samt

$$H(t) = \{f > t\} \quad t > 0 \quad \text{og} \quad H(e) =]0, f(e)[\quad e \in E.$$

D.v.s.

$$\mu \otimes \lambda_1(H) = \int_{\mathbf{R}} \mu(H(t)) \, \lambda_1(dt) = \int_0^\infty \mu(f > t) \, \lambda_1(dt)$$

og

$$\mu \otimes \lambda_1(H) = \int_E \lambda_1(H(e)) \, \mu(de) = \int_E f(e) \, \mu(de) = \int_E f \, d\mu,$$

hvilket er den søgte lighed. ◇

I tilfældet $E = \mathbf{R}$ og $\mu = \lambda_1$ og dermed $\mu \otimes \lambda_1 = \lambda_2$ har vi undervejs vist det vel kendte udsagn om, at integralet af en ikke-negativ funktion er lig arealet af området under grafen.

Da $t \mapsto \mu(f > t)$ er aftagende og ikke-negativ og dermed Riemann integrabel over ethvert endeligt interval, viser sammenhængen mellem Lebesgue og Riemann integralet, at ligheden også kan formuleres som

$$\int_E f \, d\mu = \mathrm{UR} \int_0^\infty \mu(f > t) \, dt = \lim_n 2^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(f > k 2^{-n}).$$

Integranten $t \mapsto \mu(f > t)$ kan erstattes af $t \mapsto \mu(f \geq t)$, da $\mu(f \geq t) \neq \mu(f > t)$ for højst tællelig mange t, d.v.s. en λ_1-nulmængde (tænk over dette).

Konvergensformer.
I dette afsnit indføres i tilknytning til et givent målrum $(E, \mathcal{E}, \mu)$ tre konvergensformer for følger af reelle målelige funktioner, og relationerne mellem dem studeres. Begreberne defineres for reelle funktioner, men specielt de to første generaliserer uden videre til situationer, hvor funktionerne tager værdier i et generelt separabelt metrisk rum (S, d), blot skal $|\cdot - \cdot|$ her erstattes af $d(\cdot, \cdot)$.

Notation. Lad $(f_n)_{n\geq 1}$ og f betegne elementer i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$. Vi siger og skriver da

a) Konvergens *μ-n.o.*

$$f_n \to f \;\; \mu\text{-n.o.} \;\; \text{hvis } |f_n(e) - f(e)| \to_{n\to\infty} 0 \;\; \text{for } \mu\text{-n.a. } e.$$

b) Konvergens i *μ-mål*.

$$f_n \to f \;\; \text{i } \mu\text{-mål} \;\; \text{hvis } \mu(|f_n - f| \geq \epsilon) \to_{n\to\infty} 0 \;\; \text{for alle} \;\; \epsilon > 0.$$

c) Konvergens i *μ-p-middel* $(0 < p < \infty)$.

$$f_n \to f \;\; \text{i } \mu\text{-}p\text{-middel} \;\; \text{hvis } \int |f_n - f|^p \, d\mu \to_{n\to\infty} 0.$$

(Hvis $p = 1$ siges kort *μ-middel*, og hvis $p = 2$ bruges ofte vendingen *μ-kvadratisk middel*.)

For alle tre konvergensformer betyder vendingen '$\lim_n f_n$ eksisterer', at der findes et f i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, så at $f_n \to f$ på den relevante facon.

Da $\mathbf{R}$ er et vektorrum, og vi derfor kan addere funktioner samt multiplicere med en skalar, er det værd at bemærke, at de tre konvergensformer alle harmonerer med den lineære struktur, idet en linearkombination af konvergente følger konvergerer mod den tilsvarende linearkombination af grænseværdierne. Ligeledes kan vi give mening til en uendelig sum, idet dette som sædvanligt oversættes til et spørgsmål om konvergens af den tilhørende afsnitsfølge.

Grænseværdierne er entydigt bestemt μ-n.o. for hver af de tre konvergensformer. For hvis $\to$ betegner enten konvergens μ-n.o., μ-mål eller μ-p-middel, gælder

$$f_n \to f \text{ og } f_n \to g \;\Rightarrow\; f = g \;\; \mu\text{-n.o.}$$

Dette er åbenbart for konvergens μ-n.o., hvorimod det for de to andre kræver et argument baseret på trekantsuligheden. F.eks. har vi for alle $\epsilon > 0$ og $n \geq 1$ at

$$\mu(|g - f| \geq \epsilon) \leq \mu(|g - f_n| \geq \epsilon/2) + \mu(|f_n - f| \geq \epsilon/2),$$

hvoraf grænseovergangen $n \to \infty$ viser, at $\mu(|g - f| \geq \epsilon) = 0$ for ethvert $\epsilon > 0$, og dermed $f = g$ μ-n.o. Tilsvarende for konvergens i p-middel er

$$\int |g - f|^p \, d\mu \leq 2^p \int |g - f_n|^p \, d\mu + 2^p \int |f_n - f|^p \, d\mu \to_{n\to\infty} 0,$$

d.v.s. $\int |g - f|^p \, d\mu = 0$, hvilket igen betyder, at $f = g$ μ-n.o..

Det næste resultat beskriver relationerne mellem de indførte konvergensformer.

Proposition 10 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum og lad $p > 0$ samt elementer $(f_n)_{n\geq 1}$ og f i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$ være givet. Da gælder*

1) $f_n \to f$ i μ-p-middel $\Rightarrow$ $f_n \to f$ i μ-mål.

2) $f_n \to f$ i μ-mål $\Rightarrow$ $\exists\, (n_k)_{k\geq 1}$ delfølge så at $f_{n_k} \to f$ μ-n.o.

Hvis μ er et endeligt mål, d.v.s. $\mu(E) < \infty$, gælder yderligere

3) $f_n \to f$ μ-n.o. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ i μ-mål.

4) $f_n \to f$ i μ-p-middel $\Rightarrow$ $f_n \to f$ i μ-r-middel for $0 < r < p$.

Bevis. 4) følger af Korollaret til Jensen's ulighed, og da

$$\mu(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \epsilon^{-p} \int |f_n - f|^p \, d\mu$$

for alle n og ϵ ifølge Markov's ulighed er 1) ligeledes klar. Vi mangler derfor kun at vise 2) og 3).
3) Hvis $f_n \to f$ μ-n.o. er $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \epsilon\}$ en μ-nulmængde for ethvert $\epsilon > 0$, thi på denne mængde konvergerer f_n ikke mod f; og da μ er et endeligt mål, gælder derfor for alle $\epsilon > 0$, at

$$\mu(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \epsilon\}) \downarrow_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \epsilon\}) = 0.$$

2) Vælg en delfølge $(n_k)_{k\geq 1}$, så at $\mu(A_k) \leq 2^{-k}$ for $k \geq 1$, hvor

$$A_k = \{|f - f_{n_k}| > 1/k\} \text{ for } k \geq 1.$$

Ifølge Borel Cantelli Lemmaet er $\mu(\limsup_k A_k)$ derfor lig 0, hvilket netop er det ønskede, thi hvis $e \notin \limsup_k A_k$ holder uligheden

$$|f(e) - f_{n_k}(e)| \leq 1/k$$

for alle pånær højst endelig mange k, d.v.s. fra et vist trin at regne. ◇

Som en ofte benyttet konsekvens af 1) og 2) fås

$$f_n \to f \text{ og } f_n \geq g \;\; \mu\text{-n.o. for alle } n \Rightarrow f \geq g \;\; \mu\text{-n.o.}$$

Konvergensformen kan her enten være μ-n.o., μ-mål eller i μ-p-middel.

Proposition 10 indeholder alle alment gældende implikationer mellem de indførte konvergensformer. Men som Lebesgue's Sætning viser, er det under visse omstændigheder muligt at slutte konvergens i middel ud fra konvergens n.o. Dette aspekt vil vi nu undersøge nærmere. Hertil får vi brug for et nyt begreb nemlig uniform integrabilitet. Uniform integrabilitet kan defineres i vilkårlige målrum, se Hoffmann afsnit 3.22, men da vi kun skal gøre brug af det i sandsynlighedsfelter, koncentrerer vi os om endelige målrum, hvor tingene er simplere.

Definition. Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et endeligt målrum. En delmængde $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ siges at være *μ-uniformt integrabel* hvis

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists K > 0 : \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f| \geq K\}} |f| \, d\mu \leq \epsilon.$$

Bemærk at $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ-uniformt integrabel, hvis og kun hvis $\{|f| \,|\, f \in \mathcal{H}\}$ er μ-uniformt integrabel.

Øvelse 16. Vis at $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ-uniformt integrabel, hvis $\mathcal{H}$ er en endelig mængde eller mere generelt hvis $|f| \leq g$ for alle $f \in \mathcal{H}$ for et $g \in L^1(\mu)$.

Øvelse 17. Vis at $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ-uniformt integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ findes et $M_\epsilon < \infty$, så at $\mathcal{H} \subseteq B_\infty(M_\epsilon) + B_1(\epsilon)$, hvor for alle $r > 0$

$$B_\infty(r) := \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \,|\, |f| \leq r \ \mu\text{-n.o.}\} \ \text{ og } \ B_1(r) := \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \,|\, \int |f| \, d\mu \leq r\}.$$

I beviset for hovedsætningen benyttes en alternativ beskrivelse af uniform integrabilitet. Kriteriet er inspireret af følgende kontinuitetsprincip, hvis bevis overlades til læseren.

$$f \in L^1(\mu) \ \Rightarrow \ \int |f| \, d\mu < \infty \ \text{ og } \ \lim_{\mu(A) \downarrow 0} \int_A f \, d\mu = 0.$$

Lemma 10 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et endeligt målrum. En delmængde $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ-uniformt integrabel hvis og kun hvis*

$$\text{i) } \sup_{f \in \mathcal{H}} \int |f| \, d\mu < \infty \ \text{ og } \ \text{ii) } \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_A |f| \, d\mu \leq \epsilon \text{ hvis } \mu(A) \leq \delta.$$

D.v.s. $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, hvis og kun hvis $\mathcal{H}$ er begrænset i L^1, og integralet over en given mængde er lille uniformt for funktioner i $\mathcal{H}$, hvis μ-målet af mængden er lille nok.

Korollar 1 *Hvis $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subseteq L^1(\mu)$ er μ-uniformt integrable er ligeledes $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \{f_1 + f_2 \,|\, f_i \in \mathcal{H}_i \ i = 1, 2\}$ og $\{g \in L^1(\mu) \,|\, \exists f \in \mathcal{H}_1 : |g| \leq |f| \ \mu\text{-n.o.}\}$ μ-uniformt integrable.*

Korollar 2 *Lad $(f_n)_{n \geq 1}$ betegne elementer i $L^1(\mu)$. Da er $\{f_n \,|\, n \geq 1\}$ uniformt integrabel, hvis $f_n \to 0$ i μ-middel.*

Bevis. Antag at $\mathcal{H}$ er μ-uniformt integrabel. For alle $K > 0$ og $f \in \mathcal{H}$ gælder for ethvert $A \in \mathcal{E}$

$$\int_A |f| \, d\mu \leq \int_{A \cap \{|f| < K\}} |f| \, d\mu + \int_{A \cap \{|f| \geq K\}} |f| \, d\mu \leq K \cdot \mu(A) + \int_{\{|f| \geq K\}} |f| \, d\mu.$$

Da der i følge den uniforme integrabilitet findes et $K_1 > 0$, så at sidste led er mindre end 1, ses ved at sætte $A = E$, at $\mathcal{H}$ er begrænset i $L^1(\mu)$, idet

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \int |f| \, d\mu \leq K_1 \cdot \mu(E) + 1 < \infty;$$

og hvis vi for givet ϵ vælger K_ϵ så at $\sup_{f\in\mathcal{H}}\int_{\{|f|\geq K_\epsilon\}}|f|\,d\mu \leq \epsilon/2$ gælder for $A\in\mathcal{E}$ med $\mu(A)<\epsilon/(2K_\epsilon)$ at

$$\int_A |f|\,d\mu = \int_{A\cap\{\{|f|<K_\epsilon\}}|f|\,d\mu + \int_{A\cap\{\{|f|\geq K_\epsilon\}}|f|\,d\mu \leq K_\epsilon\cdot\mu(A)+\epsilon/2\leq\epsilon$$

for alle $f\in\mathcal{H}$. For at vise den manglende del af Proposition 10 lader vi for givet $\epsilon>0$ δ være bestemt i h.h.t. ii). Markov's Ulighed

$$\mu(|f|\geq K)\leq\frac{1}{K}\int|f|\,d\mu\leq\sup_{f\in\mathcal{H}}\int|f|\,d\mu/K \quad \text{for } f\in\mathcal{H}$$

viser, at vi kan bestemme et $K_\epsilon>0$, så at $\sup_{f\in\mathcal{H}}\mu(|f|\geq K_\epsilon)\leq\delta$ og dermed pr. valg af δ

$$\sup_{f\in\mathcal{H}}\int_{\{|f|\geq K_\epsilon\}}|f|\,d\mu\leq\epsilon. \quad \diamond$$

Korollar 1 overlades til læseren. Betragt derfor Korollar 2. Da $\lim_n\int|f_n|\,d\mu=0$ følger i) umiddelbart, da enhver konvergent reel talfølge specielt er begrænset. For alle $n_0\geq 1$ og $A\in\mathcal{E}$ er

$$\sup_n\int_A|f_n|\,d\mu\leq\sup_{1\leq n\leq n_0}\int_A|f_n|\,d\mu+\sup_{n\geq n_0}\int|f_n|\,d\mu\leq\int_A\sum_{n=1}^{n_0}|f_n|\,d\mu+\sup_{n\geq n_0}\int|f_n|\,d\mu.$$

Dette viser ii). Thi givet $\epsilon>0$ bestemmes et n_0, så at sidste led er mindre end $\epsilon/2$, hvorefter integrabiliteteten af $\sum_{n=1}^{n_0}|f_n|$ sikrer, at vi kan vælge $\delta>0$, så at

$$\sup_n\int_A|f_n|\,d\mu\leq\epsilon \quad \text{hvis } \mu(A)<\delta. \quad \diamond$$

Sætning 6 *Lad $(E,\mathcal{E},\mu)$ betegne et endeligt målrum og $(f_n)_{n\geq1}$ og f elementer i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$. Flg. påstande er da ækvivalente.*

a) $f_n\to f$ i μ-mål og $\{f_n\,|\,n\geq1\}$ er μ-uniformt integrabel.

b) $(f_n)_{n\geq1}$ og f er elementer i $L^1(\mu)$ og $f_n\to f$ i μ-middel.

Korollar *For ethvert $p>0$ er flg. påstande ligeledes ækvivalente.*

a)$_p$ $f_n\to f$ i μ-mål og $\{|f_n|^p\,|\,n\geq1\}$ er μ-uniformt integrabel.

b)$_p$ $(f_n)_{n\geq1}$ og f er elementer i $L^p(\mu)$ og $f_n\to f$ i μ-p-middel.

Bevis for sætningen. b) $\Rightarrow$ a) : Konvergensen $f_n\to f$ i μ-mål er vist i Proposition 10, og da

$$f_n\to f \text{ i } \mu\text{-middel} \Leftrightarrow (f_n-f)\to 0 \text{ i } \mu\text{-middel}$$

er $\{f_n-f\,|\,n\geq1\}$ ifølge Korollar 2 ovenfor uniformt integrabel, og derfor ifølge Korollar 1 også $\{f_n\,|\,n\geq1\}$ da

$$|f_n|\leq|f_n-f|+|f| \quad \text{for alle } n\geq1.$$

a) $\Rightarrow$ b) : Ifølge Proposition 10 findes der en delfølge $(n_k)_{k\geq 1}$, så at $|f_{n_k}| \to |f|$ μ-n.o., d.v.s. $f \in L^1(\mu)$ da

$$\int |f|\, d\mu \leq \liminf_k \int |f_{n_k}|\, d\mu \leq \sup_n \int |f_n|\, d\mu < \infty.$$

ifølge Fatou's Lemma. Korollar 1 og ulighederne $|f - f_n| \leq |f| + |f_n|$ for $n \geq 1$ viser derfor, at $\{f - f_n \,|\, n \geq 1\}$ er μ-uniformt integrabel. Men for ethvert $0 < \epsilon < K$ er $\int |f_n - f|\, d\mu$ lig med

$$\int_{\{|f_n - f| \leq \epsilon\}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\{\epsilon < |f_n - f| \leq K\}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\{|f_n - f| > K\}} |f_n - f|\, d\mu$$

$$\leq \epsilon \cdot \mu(E) + K \cdot \mu(|f_n - f| \geq \epsilon) + \sup_n \int_{\{|f_n - f| > K\}} |f_n - f|^p\, d\mu.$$

Dette sikrer, at $\lim_n \int |f_n - f|\, d\mu = 0$. Thi for ϵ og K valgt, så at første og tredie led er så lille som ønsket, konvergerer det midterste mod 0 som følge af konvergensen i mål. $\diamond$

Bevis for korollaret. Lad $p > 0$ være givet. Antag b)$_p$. Konvergensen $f_n \to f$ i μ-mål er vist i Proposition 10, og da

$$f_n \to f \text{ i } \mu\text{-}p\text{-middel} \Leftrightarrow |f_n - f|^p \to 0 \text{ i } \mu\text{-middel}$$

er $\{|f_n - f|^p \,|\, n \geq 1\}$ uniformt integrabel, og derfor også $\{|f_n|^p \,|\, n \geq 1\}$ da

$$|f_n|^p \leq 2^p\, |f_n - f|^p + 2^p\, |f|^p \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

Antag omvendt a)$_p$. Ifølge Proposition 10 findes der en delfølge $(n_k)_{k\geq 1}$, så at $|f_{n_k}|^p \to |f|$ μ-n.o. og dermed $f \in L^p(\mu)$ da

$$\int |f|^p\, d\mu \leq \liminf_k \int |f_{n_k}|^p\, d\mu \leq \sup_n \int |f_n|^p\, d\mu < \infty.$$

Ulighederne $|f - f_n|^p \leq 2^p\, (|f|^p + |f_n|^p)$ for $n \geq 1$ viser derfor, at $\{|f - f_n|^p \,|\, n \geq 1\}$ er μ-uniformt integrabel. Men da

$$\mu(|f - f_n|^p > \epsilon) = \mu(|f - f_n| > \epsilon^{1/p}) \quad \text{og} \quad |f - f_n|^p \leq 2^p\, |f_n|^p + 2^p\, |f|^p$$

for alle ϵ og n er

$$\{|f - f_n|^p \,|\, n \geq 1\} \ \text{ uniformt integrabel og } |f - f_n|^p \to 0 \text{ i } \mu\text{-mål.}$$

Påstanden følger nu umiddelbart af sætningen. $\diamond$

Sætning 6 gør det interessant at kunne afgøre, om en given mængde af funktioner er uniformt integrabel. I denne sammenhæng er flg. resultat nyttigt.

Proposition 11 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et endeligt målrum. $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ-uniformt integrabel, hvis der findes en funktion $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, så at*

$$\lim_{x\to\infty} x/\varphi(x) = 0 \quad \text{og} \quad \sup_{f\in\mathcal{H}} \int \varphi(|f|)\, d\mu < \infty.$$

F.eks. er $\mathcal{H}$ μ-uniformt integrabel, hvis $\mathcal{H}$ er begrænset i $L^\alpha(\mu)$ for et $\alpha > 1$, d.v.s.

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \int |f|^\alpha\, d\mu < \infty.$$

Bevis. Positiviteten af integralet sikrer for ethvert $K > 0$ og ethvert $f \in \mathcal{H}$, at

$$\int_{\{|f|>K\}} |f|\, d\mu = \int_{\{|f|>K\}} \varphi(|f|) \cdot \frac{|f|}{\varphi(|f|)}\, d\mu \leq \sup_{x>K} \frac{x}{\varphi(x)} \int \varphi(|f|)\, d\mu,$$

hvilket viser det ønskede, da $\lim_{K\to\infty} \sup_{x>K} x/\varphi(x) = 0$. ◇

Det næste resultat, der gælder i vilkårlige målrum, anviser et andet sæt af betingelser, der sikrer konvergens i middel ud fra punktvis konvergens.

Sætning 7 Scheffe's Lemma.
Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum og $(f_n)_{n\geq 1}$ og f givne elementer i $L^1(\mu)$, så at $f_n \to f$ μ-n.o. eller $f_n \to f$ μ-mål. Da gælder

$$f_n \to f \ \text{ i } \mu\text{-middel} \Leftrightarrow \lim_n \int |f_n|\, d\mu = \int |f|\, d\mu.$$

Bevis. Implikationen $\Rightarrow$, som følger af uligheden $|\,|f| - |f_n|\,| \leq |f - f_n|$, udnytter hverken, at $f_n \to f$ μ-n.o. eller $f_n \to f$ μ-mål.
Hvad angår $\Leftarrow$) behandles kun n.o.-tilfældet, da mål-tilfældet kan udledes heraf ved brug af et delfølgeargument baseret på Proposition 10 punkt 2). Da $x \mapsto |x|$ er kontinuert, konvergerer $|f_n| \to |f|$ μ-n.o. Skriv nu

$$f_n = f_n \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|\leq 2\cdot|f|\}} + f_n \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>2\cdot|f|\}} =: h_n + k_n,$$

og tilsvarende

$$|f_n| = |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|\leq 2\cdot|f|\}} + |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>2\cdot|f|\}} = |h_n| + |k_n|.$$

Da $|h_n| \leq 2 \cdot |f|$ og $h_n \to f$ og derfor $|h_n| \to |f|$ μ-n.o., viser Lebesgue's Sætning, at $h_n \to f$ og $|h_n| \to |f|$ i μ-middel. Det sidste medfører specielt, at

$$\lim_n \int |k_n|\, d\mu = \lim_n \int (|f_n| - |h_n|)\, d\mu = \lim_n \int |f_n|\, d\mu - \lim_n \int |h_n|\, d\mu = 0.$$

D.v.s. $k_n \to 0$ i μ-middel, og ved addition af de to konvergente L^1-følger $(h_n)_{n\geq 1}$ og $(k_n)_{n\geq 1}$ følger derfor at $f_n \to f$ i μ-middel. ◇

Vi afslutter kapitlet med at se lidt nærmere på konvergens i mål. Resultaterne formuleres for reelle funktioner, men gælder 'uændret' for funktioner med værdier i et fuldstændigt separabelt metrisk rum (S, d).

Lemma 11 *Lad* $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *betegne et målrum og* $(f_n)_{n\geq 1}$ *en følge af elementer i* $\mathrm{M}(\mathcal{E})$*. Da gælder flg. påstande.*

a) Hvis der findes en følge $(\epsilon_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}_+$*, så at*

$$\sum_n \epsilon_n < \infty \text{ og } \sum_n \mu(|f_n - f_{n+1}| \geq \epsilon_n) < \infty,$$

eksisterer der et $f \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$*, så at* $f_n \to f$ μ*-n.o. og i* μ*-mål.*

b) $f_n \to 0$ μ*-n.o. og i* μ*-mål hvis der findes en følge* $(\epsilon_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{R}_+$ *så at*

$$\epsilon_n \to 0 \text{ og } \sum_n \mu(|f_n| \geq \epsilon_n) < \infty.$$

Bevis. a) Definer

$$A_n = \{|f_n - f_{n+1}| \geq \epsilon_n\} \text{ for } n \geq 1.$$

Antagelserne og det første Borel-Cantelli Lemma viser, at $\mu(\limsup_n A_n) = 0$, og for $e \notin \limsup_n A_n$ er $|f_n(e) - f_{n+1}(e)| \leq \epsilon_n$ fra et vist trin at regne, d.v.s.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(e) - f_{n+1}(e)| < \infty,$$

hvilket ifølge fuldstændigheden af $\mathbf{R}$ sikrer at talfølgen $(f_n(e))_{n\geq 1}$ er konvergent i $\mathbf{R}$. D.v.s. $\lim_n f_n(e)$ eksisterer i $\mathbf{R}$ for μ-n.a. e. Lad f betegne det i Lemma 5 definerede f_∞. f er da målelig, og det netop viste betyder, at $f_n \to f$ μ-n.o. For at vise at der også er konvergens i μ-mål, lader vi $\epsilon > 0$ være givet, og n_0 vælges, så at $\sum_{k\geq n_0} \epsilon_k < \epsilon$. Da $f_k \to f$ μ-n.o. gælder for alle n

$$|f_n - f| = \lim_k |f_n - f_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |f_k - f_{k+1}| \quad \mu\text{-n.o.},$$

d.v.s. for $n \geq n_0$ er

$$\mu(|f_n - f| > \epsilon) \leq \mu(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k - f_{k+1}| > \epsilon)$$

$$\leq \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f_{k+1}| > \epsilon_k\}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(|f_k - f_{k+1}| > \epsilon_k) \to_{n\to\infty} 0,$$

hvoraf konvergensen i μ-mål følger.

b) Definer $A_n := \{|f_n| \geq \epsilon_n\}$ for $n \geq 1$. Igen er $\mu(\limsup_n A_n) = 0$, og da

$$\{n \geq 1 \,|\, |f_n(e)| \geq \epsilon_n\} \text{ er endelig}$$

for ethvert $e \notin \limsup_n A_n$ følger, at $f_n(e) \to 0$ for alle $e \notin \limsup_n A_n$ og dermed μ-n.o. Konvergensen i μ-mål er åbenbar, da

$$\lim_n \mu(|f_n| \geq \epsilon) \leq \lim_n \mu(|f_n| \geq \epsilon_n) = 0 \text{ for alle } \epsilon > 0. \qquad \diamond$$

Vi er nu i stand til at vise, at konvergens i mål samt p-middel for en følge $(f_n)_{n\geq 1}$ kan afgøres uden forhåndskendskab til en eventuel grænseværdi. Der gælder nemlig følgende fuldstændighedsudsagn.

Proposition 12 *Lad* $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *betegne et målrum og lad* $(f_n)_{n\geq 1}$ *betegne en følge af elementer i* $\mathrm{M}(\mathcal{E})$. *Da eksisterer* $\lim_n f_n$ *i* μ*-mål hvis*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(|f_n - f_m| \geq \epsilon) = 0 \quad \text{for alle } \epsilon > 0.$$

Bevis. Antagelserne sikrer eksistens af en delfølge $(n_k)_{k\geq 1}$, så at

$$\mu(|f_{n_k} - f_m| \geq 2^{-k}) < 2^{-k} \quad \text{for alle } m \geq n_k \text{ og alle } k \geq 1,$$

d.v.s. specielt

$$\mu(|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \geq 2^{-k}) < 2^{-k} \quad \text{for alle } k \geq 1.$$

Ifølge Lemma 11 findes der derfor et f i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, så at $f_{n_k} \to f$ μ-n.o. og i μ-mål. Dette er grænsefunktionen, vi søger, thi givet ϵ, $\delta > 0$ kan vi vælge et k, så at

$$2^{-k} \leq (\epsilon \wedge \delta)/2 \quad \text{og} \quad \mu(|f - f_{n_k}| > \epsilon/2) \leq \delta/2;$$

og for ethvert $m \geq n_k$ gælder derfor

$$\begin{aligned}\mu(|f - f_m| > \epsilon) &\leq \mu(|f_{n_k} - f_m| > \epsilon/2) + \mu(|f - f_{n_k}| > \epsilon/2) \\ &\leq \mu(|f_{n_k} - f_m| > 2^{-k}) + \delta/2 \leq 2^{-k} + \delta/2 \leq \delta,\end{aligned}$$

hvilket viser den ønskede konvergens. ◇

Korollar *Lad* $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *betegne et målrum og lad* $(f_n)_{n\geq 1}$ *betegne en følge af elementer i* $\mathrm{M}(\mathcal{E})$. *For ethvert* $p > 0$ *eksisterer* $\lim_n f_n$ *i* μ*-*p*-middel, hvis*

$$\lim_{m,n\to\infty} \int |f_n - f_m|^p \, d\mu = 0.$$

Bevis. Markov's ulighed viser, at $(f_n)_{n\geq 1}$ opfylder betingelsen i Proposition 12, og propositionerne 10 og 12 sikrer derfor eksistensen af et $f \in \mathrm{M}(\mathcal{E})$ og en delfølge (n_k), så at $f_{n_k} \to f$ μ-n.o. Heraf fås ved brug af Fatou's Lemma at for $n \geq 1$ er

$$\int |f - f_n|^p \, d\mu \leq \liminf_k \int |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu \leq \sup_{k\geq n} \int |f_k - f_n|^p \, d\mu,$$

hvilket ifølge antagelsen giver det ønskede resultat. ◇

Konvergens i mål er pr. definition et spørgsmål om, at bestemte mængder har lille mål. Det er derfor klart ud fra tidligere overvejelserne om indbyrdes kontinuitet af mål, at konvergens i mål er sammenfaldende for ækvivalente endelige mål. D.v.s. hvis μ_1 og μ_2 er to ækvivalente endelige mål på $(E, \mathcal{E})$, så konvergerer en følge $(f_n)_{n\geq 1}$ i μ_1-mål, hvis og kun hvis den konvergerer i μ_2-mål. Det tilsvarende gælder naturligvis også for konvergens n.o., hvorimod situationen er mere kompliceret for konvergens i p-middel.

Til slut skal det nævnes, at konvergens i mål er metrisk, d.v.s. svarer til konvergens i en metrik. Denne egenskab, der er vigtig i mange bevissammenhænge, gælder også for konvergens i p-middel, men derimod ikke for konvergens n.o. Da vi primært skal beskæftige os med konvergens i mål i forbindelse med sandsynlighedsmål, nøjes vi med flg. overvejelser. Definer

$$d_0(f,g) := \int |f-g| \wedge 1 \, d\mu \quad \text{for } f,g \in \mathrm{M}(\mathcal{E}).$$

En simpel overvejelse viser, at der herved, hvis μ er et endeligt mål, er defineret en metrik (pseudo) på $\mathrm{M}(\mathcal{E})$. Trekantsuligheden beror på, at

$$(x+y) \wedge 1 \leq x \wedge 1 + y \wedge 1 \ \text{ for alle } x, y \in \mathbf{R}_+,$$

Der gælder nu flg. resultat.

Lemma 12 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et endeligt målrum og lad $(f_n)_{n\geq 1}$ og f betegne elementer i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$. Da gælder*

$$f_n \to f \text{ i } \mu\text{-mål} \Leftrightarrow d_0(f, f_n) \to_{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow \int |f - f_n| \wedge 1 \, d\mu \to_{n\to\infty} 0.$$

Bevis. Da

$$f_n \to f \text{ i } \mu\text{-mål} \Rightarrow |f - f_n| \wedge 1 \to 0 \text{ i } \mu\text{-mål}$$

og $\{|f - f_n| \wedge 1 \,|\, n \geq 1\}$ er uniform integrabel, da funktionerne alle er domineret af 1, følger $\Rightarrow$ umiddelbart af Sætning 6. For ethvert $\epsilon > 0$ og ethvert n viser Markov's ulighed, da $x \mapsto x \wedge 1$ er voksende på $\mathbf{R}_+$, at

$$\mu(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu(|f_n - f| \wedge 1 \geq \epsilon \wedge 1) \leq (\epsilon \wedge 1)^{-1} \int |f_n - f| \wedge 1 \, d\mu,$$

hvoraf den anden implikation følger. ◇

Bemærkning. $x \mapsto x \wedge 1$ kan erstattes af enhver anden begrænset, voksende og konkav funktion, som er 0 i 0. F.eks. $x \mapsto \arctan x$ eller $x \mapsto x/(1+x)$.

Som en simpel anvendelse af Lemma 12 vises flg. resultat.

Proposition 13 *Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et endeligt målrum og lad $(f_n)_{n\geq 1}$ og f betegne elementer i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, så at $f_n \to f$ i μ-mål. Da konvergerer $\psi(f_n) \to \psi(f)$ i μ-mål for enhver kontinuert funktion $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, og konvergensen sker også i μ-1-middel, hvis enten ψ er begrænset, eller $(\psi(f_n))_{n\geq 1}$ er μ-uniformt integrabel.*

Bevis. Lad ψ betegne en kontinuert reel funktion. Ifølge Lemma 12 skal vi vise

$$d_0(\psi(f_n), \psi(f)) \to 0 \ \text{ for } n \to \infty.$$

Men gælder dette ikke, eksisterer der et $\epsilon > 0$ og en delfølge $(n_k)_{k\geq 1}$, så at

$$d_0(\psi(f_{n_k}), \psi(f)) \geq \epsilon \ \text{ for alle } k \geq 1$$

samt ifølge Proposition 10 en yderligere delfølge $(k_l)_{l\geq 1}$, så at

$$f_{n_{k_l}} \to f \;\; \mu\text{-n.o., og dermed } |\psi(f_{n_{k_l}}) - \psi(f)| \wedge 1 \to 0 \;\mu\text{-n.o.,}$$

da ψ er kontinuert. Ifølge Lebesgue's Sætning konvergerer derfor

$$d_0(\psi(f_{n_{k_l}}), \psi(f)) = \int |\psi(f_{n_{k_l}}) - \psi(f)| \wedge 1 \, d\mu \to 0 \;\; \text{for } l \to \infty,$$

hvilket strider mod valget af delfølgen $(n_k)_{k\geq 1}$. Hvis ψ yderligere er begrænset, eller $(\psi(f_n))_{n\geq 1}$ er uniformt integrabel, er

$$\{|\psi(f_n) - \psi(f)| \,|\, n \geq 1\} \;\; \mu\text{-uniformt integrabel,}$$

og da, som netop vist,

$$|\psi(f_n) - \psi(f)| \to 0 \text{ i } \mu\text{-mål,}$$

følger resten af Sætning 6. ◇

Bemærk at beviset kun udnytter, at ψ er kontinuert μ_f-n.o., d.v.s. at mængden af punkter, hvori ψ ikke er kontinuert, er en μ_f-nulmængde. μ_f er her billedmålet dannet ud fra μ og f.

Læseren opfordres i denne forbindelse til at overveje, at for enhver Borel funktion $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er mængden af diskontinuitetspunkter, d.v.s.

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, h \text{ ikke kontinuert i } x\},$$

en tællelig foreningsmængde af lukkede mængder, d.v.s. specielt en Borel mængde. Overgang til komplementet viser derfor, at

$$C_h := \{x \in \mathbf{R} \,|\, h \text{ kontinuert i } x\}$$

er et tælleligt gennemsnit af åbne mængder.
Vink til et bevis. Vis og udnyt at et punkt x er et diskontinuitetspunkt for h, hvis og kun hvis

$$\exists\, m \geq 1, \forall n \geq 1 \; \exists z, y \in \mathbf{R} : |x - y| \vee |x - z| \leq 1/n \text{ og } |h(y) - h(z)| > 1/m.$$

Lad mig endnu en gang understrege at hovedparten af det, der i dette afsnit er sagt om reelle funktioner, kan ved at udskifte $|\cdot - \cdot|$ med $d(\cdot, \cdot)$ uændret oversættes til funktioner, som tager værdier i et separabelt metrisk rum (S, d). Dette gælder blandt andet Lemma 12 og dermed Proposition 13, hvilket specielt viser, at konvergens i μ-mål af stokastiske funktioner med værdier i et separabelt metrisk rum (S, d) bibeholdes ved overgang til en ækvivalent metrik. D.v.s. konvergens i μ-mål afhænger ikke eksplicit af den valgte metrik.

L^p-rum.
I dette afsnit vil vi ganske kort se nærmere på L^p-rummene med særlig vægt på L^2. Lad derfor $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et givent måleligt rum. Vi har tidligere for ethvert $p > 0$ indført

$$L^p(\mu) = \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \mid \int |f|^p \, d\mu < \infty\},$$

og vi observerede, at $L^p(\mu)$ er et vektorrum, d.v.s.

$$af + bg \in L^p(\mu) \quad \text{hvis } f, g \in L^p(\mu) \text{ og } a, b \in \mathbf{R}.$$

For ethvert $p \geq 1$ og $f \in L^p(\mu)$ definerer

$$\|f\|_p := \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p}$$

et reelt tal kaldet $L^p(\mu)$-*normen* af f, og ifølge integralets homogenitet og Minkowski's ulighed gælder, at

1) $\|af\|_p = |a| \cdot \|f\|_p \quad$ for $f \in L^p(\mu)$ og $a \in \mathbf{R}$. (*homogenitet*)

2) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad$ for $f, g \in L^p(\mu)$. (*trekantsuligheden*)

3) $\|f\|_p = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$ μ-n.o.

For $p \geq 1$ kan vi derfor definere en pseudometrik på $L^p(\mu)$ ved fastsættelsen

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p \quad \text{for } f, g \in L^p(\mu).$$

Som allerede nævnt gælder 2) ikke for $0 < p < 1$. Men da funktionen $x \mapsto x^p$ er subadditiv på $\mathbf{R}_+$, d.v.s. $(x+y)^p \leq x^p + y^p$, kan vi tilsvarende for ethvert $p \in]0, 1[$ definere en pseudometrik på $L^p(\mu)$ ved fastsættelsen

$$d_p(f, g) := \int |f - g|^p \, d\mu \quad \text{for } f, g \in L^p(\mu).$$

Som det er sædvane i metriske rum, siges en følge $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^p(\mu)$ at være konvergent i $L^p(\mu)$ med grænseværdi $f \in L^p(\mu)$, normalt betegnet $f_n \to f$ i $L^p(\mu)$, hvis

$$\lim_n d_p(f, f_n) = 0.$$

En følge $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^p(\mu)$ siges kort at være konvergent i $L^p(\mu)$, hvis der findes et $f \in L^p(\mu)$, så at $f_n \to f$ i $L^p(\mu)$, og den siges at være en L^p-*Cauchy-følge*, hvis

$$\lim_{n,m \to \infty} d_p(f_m, f_n) = \lim_n \sup_{m \geq n} d_p(f_m, f_n) = 0.$$

Trekantsuligheden viser, at enhver konvergent følge er en Cauchy-følge, samt at enhver L^p-Cauchy-følge $(f_n)_{n\geq 1}$ er *begrænset* i $L^p(\mu)$, d.v.s.

$$\sup_n \int |f_n|^p \, d\mu < \infty.$$

Der gælder endog

$$(f_n)_{n\geq 1} \ L^p \text{ -Cauchy-følge } \Rightarrow \lim_n \int |f_n|^p \, d\mu \text{ eksisterer i } \mathbf{R}$$

eller ækvivalent , da $\mathbf{R}$ er fuldstændig, at integralfølgen er en reel Cauchy-følge, thi for $0 < p \leq 1$ er

$$\left| \int |f_n|^p \, d\mu - \int |f_m|^p \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f_m|^p \, d\mu$$

ifølge subadditiviteten, og for $p \geq 1$ viser Minkowski's ulighed, at

$$\left| \, \|f_n\|_p - \|f_m\|_p \, \right| \leq \|f_n - f_m\|_p.$$

Tilsvarende ses at $f_n \to f$ i $L^p(\mu) \Rightarrow |f_n|^p \to |f|^p$ i μ-middel og derfor

$$\lim_n \int |f_n|^p \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu \quad \text{hvis } f_n \to f \text{ i } L^p(\mu).$$

Igen beror dette for $p \leq 1$ på subadditiviteten af $x \mapsto x^p$, hvorimod man for $p > 1$ får brug for Hölder's ulighed samt flg. konsekvens af Middelværdisætningen

$$\left| \, |x|^p - |y|^p \, \right| \leq p \cdot (|x|^{p-1} + |y|^{p-1}) \cdot |x - y| \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Konvergensbegrebet hørende til metrikken d_p er tydeligvis identisk med konvergens i μ-p-middel, og korollaret til Proposition 12 viser derfor, at $L^p(\mu)$ er fuldstændig, d.v.s. enhver L^p-Cauchy-følge er konvergent i $L^p(\mu)$. Dette vigtige resultat formuleres som en selvstændig sætning.

Sætning 8 *Lad $0 < p < \infty$ være givet. Enhver L^p-Cauchy følge $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq L^p(\mu)$ er da konvergent i $L^p(\mu)$.*

Bevis. Korollaret til Proposition 12 viser eksistensen af et f i $\mathrm{M}(\mathcal{E})$, så at $f_n \to f$ μ-p-middel, og f ligger i $L^p(\mu)$, thi for ethvert $n \geq 1$ er

$$\int |f|^p \, d\mu \leq 2^p \int |f_n|^p \, d\mu + 2^p \int |f - f_n|^p \, d\mu. \quad \diamond$$

Korollar *Lad $p \geq 1$ og $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq L^p(\mu)$ være givet. Da gælder*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \ \text{ konvergent i } L^p(\mu).$$

Bevis. Minkowski's ulighed viser, at afsnitssummerne $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\geq 1}$ udgør en L^p-Cauchy-følge, og rækken er derfor konvergent. $\diamond$

For fuldstændighedens skyld bør det nævnes, at der også findes et $L^\infty(\mu)$ med en pseudometrik $d_\infty(\cdot,\cdot)$. Vi nøjes her med blot at give de relevante definitioner.

$$L^\infty(\mu) := \{f \in \mathrm{M}(\mathcal{E}) \,|\, \exists\, 0 < c < \infty : \mu(|f| > c) = 0\},$$

$$d_\infty(f,g) := \inf\{c > 0 \,|\, \mu(|f-g| > c) = 0\} \quad \text{for } f,g \in L^\infty(\mu).$$

Tilfældet $p = 2$ er specielt vigtigt, thi ifølge Cauchy-Schwarz's ulighed definerer fastsættelsen

$$< f, g > := \int f \cdot g \, d\mu \quad \text{for } f,g \in L^2(\mu).$$

en positiv, symmetrisk bilineær form på $L^2(\mu)$. $< \cdot,\cdot >$ er altså et såkaldt *skalarprodukt* eller rettere et pseudo skalarprodukt, idet $< f, f >= 0$ kun betyder, at $f = 0$ μ-n.o.
Cauchy-Schwarz's ulighed viser, at $< \cdot,\cdot >$ er separat kontinuert, d.v.s.

$$\forall\, f \in L^2(\mu) : \lim_n < f, g_n > = < f, g > \quad \text{hvis } g_n \to g \text{ i } L^2(\mu).$$

Endvidere er $< \cdot,\cdot >$ nært forbundet med $L^2(\mu)$-normen, da

$$\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >} \quad \text{for alle } f \in L^2(\mu),$$

$\|\cdot\|_2$ er altså den til skalarproduktet $< \cdot,\cdot >$ tilknyttede norm, og da $\|\cdot\|_2$, er fuldstændig, er $L^2(\mu)$ dermed et såkaldt *Hilbert rum*, d.v.s. et vektorrum udstyret med en fuldstændig norm stammende fra et skalarprodukt.

Eksistensen af et underliggende skalarprodukt gør det muligt at overføre det fra $\mathbf{R}^n$ kendte orthogonalitetsbegreb til $L^2(\mu)$.

Definition. $f, g \in L^2(\mu)$ kaldes *orthogonale*, betegnet $f \perp g$, hvis $< f, g >= 0$.

Som det er sædvane defineres $V^\perp := \{h \in L^2(\mu) \,|\, h \perp g \text{ for alle } g \in V\}$ for enhver delmængde V af $L^2(\mu)$. Følgende resultat er vel kendt i $\mathbf{R}^n$.

Proposition 14 *For $f, g \in L^2(\mu)$ gælder*

Pythagoras: $\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$ *hvis* $f \perp g$.

Parallelogramreglen: $\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = 2 \cdot \|f\|_2^2 + 2 \cdot \|g\|_2^2$.

Bevis. Opskriv $\|\cdot\|_2^2$ ved hjælp af $< \cdot,\cdot >$ og udnyt bilineariteten. $\diamond$

Som en vigtig anvendelse heraf udledes følgende resultat.

Sætning 9 Projektionssætningen.
Lad $V \subseteq L^2(\mu)$ være et lukket underrum, d.v.s. lukket under addition, multiplikation med skalar samt konvergens i kvadratisk middel (enhver følge i V, som er

konvergent i kvadratisk middel, konvergerer mod et punkt i V). Da findes der til ethvert f i $L^2(\mu)$ et element $f_V \in V$, så at

$$f - f_V \in V^{\perp} \quad \text{og} \quad \|f - f_V\|_2 = \inf_{g \in V} \|f - g\|_2.$$

f_V er entydigt bestemt μ-n.o. og kaldes f's orthogonale projektion på V.

Bevis. Lad $f \in L^2(\mu)$ være givet og vælg en følge $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq V$, så at

$$c := \inf_{g \in V} \|f - g\|_2 = \lim_n \|f - f_n\|_2.$$

Bemærk at $c < \infty$. Ved hjælp af parallelogramreglen har vi for alle $n, m \geq 1$

$$\|f - f_n\|_2^2 + \|f - f_m\|_2^2 = 2 \cdot \|f - (f_n + f_m)/2\,\|_2^2 + 2 \cdot \|(f_n - f_m)/2\,\|_2^2$$

d.v.s.

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = 2\left(\|f - f_n\|_2^2 + \|f - f_m\|_2^2 - 2 \cdot \|f - (f_n + f_m)/2\,\|_2^2\right).$$

Men da $\frac{1}{2}(f_n + f_m) \in V$, da V er et vektorrum og derfor specielt konveks, er

$$\|f - \frac{1}{2}(f_n + f_m)\|_2^2 \geq c^2 \quad \text{for alle } n, m,$$

hvoraf fås, at $\lim_{m,n} \|f_n - f_m\|_2$ er lig 0, d.v.s. $(f_n)_{n\geq 1}$ er en L^2-Cauchy-følge. Følgen er derfor konvergent i $L^2(\mu)$, og da V er lukket under konvergens i kvadratisk middel, er der en grænseværdi f_V i V. Dette viser sætningens første del, thi ved brug af trekantsuligheden fås, at

$$\|f - f_V\|_2 = \lim_n \|f - f_n\|_2 = c.$$

Bemærk at vi kun udnyttede, at V var lukket og konveks (endog kun $f, g \in V \Rightarrow (f+g)/2 \in V$). Disse to egenskaber sikrer også entydigheden, thi hvis f_V og $\tilde{f}_V$ i V begge realiserer minimalafstanden c, fås af parallelogramreglen

$$c^2 \leq \|f - 1/2(f_V + \tilde{f}_V)\|_2^2 = 2 \cdot \|(f - f_V)/2\,\|_2^2 + 2 \cdot \|(f - \tilde{f}_V)/2\,\|_2^2$$

$$-\|(f_V - \tilde{f}_V)/2\,\|_2^2 = c^2 - \|(f_V - \tilde{f}_V)/2\,\|_2^2 \leq c^2,$$

d.v.s. $\|f_V - \tilde{f}_V\|_2^2 = 0$ og dermed $f_V = \tilde{f}_V$ μ-n.o. For at vise orthogonaliteten lader vi $g \in V$ være givet. Da V er et underrum, er $f_V + t \cdot g \in V$ for alle $t \in \mathbf{R}$, og 0 er dermed minimumspunkt for andengrads polynomiet

$$t \mapsto \|f - (f_V + t \cdot g)\|_2^2 = \|f - f_V\|_2^2 - 2t < f - f_V, g > + t^2 \cdot \|g\|_2^2,$$

hvilket betyder, at $< f - f_V, g >= 0$, og dermed den ønskede orthogonalitet. $\diamond$

Øvelse 18. Lad $\mathcal{G}$ betegne en del σ-algebra i $\mathcal{E}$, d.v.s. $\mathcal{G}$ er en σ-algebra i E og $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$. Vis at

$$L^2(\mu, \mathcal{G}) := \{g \in L^2(\mu) \mid g \text{ er } \mathcal{G}\text{-målelig}\}$$

er et underrum i $L^2(\mu)$, som opfylder betingelserne i Projektionssætningen. Antag yderligere at μ er et endeligt mål. Vis ved at udnytte at $\mathbf{1}_A \in L^2(\mu, \mathcal{G})$ for alle $A \in \mathcal{G}$, at der til ethvert $f \in L^2(\mu)$ findes netop et (entydigheden er op til μ-n.o.) element $f_{\mathcal{G}} \in L^2(\mu, \mathcal{G})$, så at

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f_{\mathcal{G}} \, d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{G}. \quad \square$$

Øvelse 19. Vis at underrummet $V := span(f_1, \ldots, f_n)$ opfylder betingelserne i Projektionssætningen for ethvert endeligt sæt $f_1, \ldots, f_n$ af elementer i $L^2(\mu)$. $\square$

Kombineres Phytagoras og fuldstændigheden fås følgende særdeles nyttige udsagn om konvergens i $L^2(\mu)$. Sammenlign med korollaret til Sætning 8.

Lemma 13 *Lad $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq L^2(\mu)$ være givet, så at f_n'erne er parvis orthogonale, d.v.s. $f_n \perp f_m$ for $n \neq m$. Da er*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ konvergent i } L^2(\mu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2^2 < \infty.$$

Bevis. Ifølge Pythagoras har vi for alle $n \leq m$

$$\|\sum_{k=1}^{m} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k\|_2^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_2^2.$$

Heraf fås påstanden umiddelbart, da konvergens i $L^2(\mu)$ og $\mathbf{R}$ er fuldstændig. $\diamond$

Korollar *Lad $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq L^2(\mu)$ være givet, så at $f_k \perp (f_{n+1} - f_n)$ for alle $1 \leq k \leq n$. Da er $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergent i $L^2(\mu)$, hvis og kun hvis* $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$.

Bevis. Benyt Lemma 13 på $(g_n)_{n\geq 1}$, hvor $g_1 = f_1$ og $g_k = f_{k+1} - f_k$ $k \geq 2$. $\diamond$

Monoton konvergens viser sammen med Lemma 6, at de ikke-negative simple funktioner $\mathrm{S}(\mathcal{E})_+$ er tæt i $L^1(\mu)_+$, d.v.s.

$$\forall f \in L^1(\mu)_+ \; \forall \epsilon > 0 \; \exists g \in \mathrm{S}(\mathcal{E})_+ \cap L^1(\mu) : \; \|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Ved opsplitning i positiv og negativ del samt brug af trekantsuligheden følger derfor, at $\mathrm{S}(\mathcal{E})$ er tæt i $L^1(\mu)$, d.v.s.

$$\forall f \in L^1(\mu) \; \forall \epsilon > 0 \; \exists g \in \mathrm{S}(\mathcal{E}) \cap L^1(\mu) : \; \|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Da

$$\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\|_1 = \mu(A \triangle B) \quad \text{for } A, B \in \mathcal{E}$$

viser Øvelse 13, at hvis $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ er en algebra, som frembringer $\mathcal{E}$, så er også $\mathrm{S}(\mathcal{A})$ tæt i $L^1(\mu)$, hvor

$$\mathrm{S}(\mathcal{A}) := \mathit{span}\,\{\mathbf{1}_A \,|\, A \in \mathcal{A}\}.$$

D.v.s. hvis $\mathcal{E}$ er tællelig frembragt og derfor på formen $\sigma(\mathcal{A})$ for en tællelig algebra $\mathcal{A}$, så er $L^1(\mu)$ seperabel, idet den tællelige mængde

$$\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \,|\, n \geq 1,\ \alpha_i \in \mathbf{Q},\ A_i \in \mathcal{A}\}$$

er tæt i $L^1(\mu)$.

Det er ofte vigtigt at vide, at en bestemt mængde af 'pæne' funktioner et tæt i $L^1(\mu)$. I denne forbindelse er flg. resultat interessant. Bemærk at $\mathbf{R}$ og mere generelt $\mathbf{R}^n$ udstyret med Lebesgue målet opfylder betingelserne.

Proposition 15 *Lad (S, d) betegne et metrisk rum og μ et Borel mål på S. Antag at der findes en følge af voksende åbne mængder $(U_n)_{n\geq 1}$, så at $S = \bigcup_n U_n$ og $\mu(U_n) < \infty$ for alle n. Da er $C(S)$, d.v.s. mængden af kontinuerte reelle funktioner defineret på S, tæt i $L^1(\mu)$, d.v.s.*

$$\forall f \in L^1(\mu)\ \forall \epsilon > 0\ \exists\, g \in C(S) \cap L^1(\mu) :\ \|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Bevis. Da $\mathrm{S}(\mathcal{E})$ er tæt i $L^1(\mu)$, viser trekantsuligheden, at det er nok at betragte funktioner $f \in \mathrm{S}(\mathcal{E}) \cap L^1(\mu)$, d.v.s. funktioner på formen $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, hvor $A_i \in \mathcal{E}$ og $\mu(A_i) < \infty$ for $i = 1, \ldots, k$. Men da

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i \cap U_n}\|_1 = \|\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot (\mathbf{1}_{A_i} - \mathbf{1}_{A_i \cap U_n})\|_1$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \cdot \|\mathbf{1}_{A_i} - \mathbf{1}_{A_i \cap U_n}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |a_i| \cdot \mu(A_i \backslash U_n),$$

ses, at vi uden tab af generalitet kan antage, at $A_i \subseteq U_{n_0}$ for alle i for et $n_0 \geq 1$. Lad nu $\epsilon > 0$ være givet og sæt $a := \sup_i |a_i|$. Da $\mu_{U_{n_0}}$ er et endeligt Borel mål, findes der ifølge Proposition 4 åbne mængder $(V_i)_{i=1,\ldots,k}$, så at

$$A_i \subseteq V_i \subseteq U_{n_0} \ \text{ og }\ \mu(V_i \backslash A_i) = \mu_{U_{n_0}}(V_i \backslash A_i) < \frac{\epsilon}{2ak}.$$

Men for ethvert i findes der en følge $(g_{n,i})_{n\geq 1} \subseteq C(S)_+$, så at $g_{n,i} \uparrow \mathbf{1}_{V_i}$, f.eks.

$$g_{n,i} :\ x \mapsto n \cdot d(x, V_i^c) \wedge 1.$$

Bemærk at $\{g_{n,i} = 1\} = \{x \in V_i \,|\, d(x, V_i^c) \geq 1/n\}$. Ifølge Monoton konvergens findes der derfor et $n_1 \geq 1$, så at

$$|\int \mathbf{1}_{V_i}\, d\mu - \int g_{n_1,i}\, d\mu| < \frac{\epsilon}{2ak}$$

for $i = 1, \ldots, k$, hvilket ved brug af trekantuligheden medfører, at

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot g_{n_1,i}\|_1 \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mathbf{1}_{V_i}\|_1 + \|\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mathbf{1}_{V_i} - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot g_{n_1,i}\|_1$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \cdot \mu(V_i \backslash A_i) + \sum_{i=1}^{k} |a_i| \cdot |\int \mathbf{1}_{V_i}\, d\mu - \int g_{n_1,i}\, d\mu| \leq \epsilon$$

og dermed det ønskede resultat. $\diamond$

Bemærkning. Resultatet er formuleret for $L^1(\mu)$, men gælder uændret for $L^p(\mu)$ for ethvert $p > 0$.

Som en umiddelbar konsekvens af Proposition 15 kan man, da Lebegue målene er translationsinvariante, ved hjælp af Lebegue's Sætning uddrage flg. interessante resultat omhandlende målrummet $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \lambda_n)$.

For ethvert $p > 0$ og ethvert $f \in L^p(\lambda_n)$ er afbildningen

$$\mathbf{R}^n \ni \underline{x} \mapsto f(\cdot + \underline{x}) \in L^p(\lambda_n)$$

kontinuert, hvis $\mathbf{R}^n$ udstyres med den sædvanlige Euklidiske metrik og $L^p(\lambda_n)$ med $d_p(\cdot, \cdot)$-metrikken.

Korollar *For ethvert $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ med $\lambda_n(A) > 0$ findes der et $\epsilon > 0$, så at*

$$b(\underline{0}, \epsilon) \subseteq A - A = \{\underline{y} \in \mathbf{R}^n \,|\, \underline{y} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2 \text{ for } \underline{x}_i \in A \ i = 1, 2\}.$$

Radon-Nikodym's Sætning.
Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et σ-endeligt målrum. Som tidligere omtalt definerer afbildningen

$$A \mapsto \int_A g \, d\mu$$

for ethvert g i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$ et μ-satureret sum-endeligt mål på $(E, \mathcal{E})$. I dette afsnit vises omvendt, at der til ethvert $\nu \in \mathrm{m}(E)$, som er μ-satureret og sum-endelig, svarer et g i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, så at

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Tætheden g er som tidligere vist entydigt bestemt op til μ-nulmængder. Hvis ν er σ-endelig kan g vælges i $\mathrm{M}(\mathcal{E})_+$. Resultatet, der specielt viser, at saturerethed og absolut kontinuitet er det samme for σ-endelige mål, formuleres som flg. sætning.

Sætning 10 Radon-Nikodym's Sætning.
Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et σ-endeligt målrum, og lad ν være et sum-endeligt mål på $(E, \mathcal{E})$, så at $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$. Da eksisterer der et g i $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{E})_+$, så at

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Bevis. Da ν er sum-endelig og μ-satureret, er $\nu = \sum_i \nu_i$, hvor ν_i er endelig og μ-satureret for alle $i \geq 1$. Har vi derfor vist, at $\nu_i = g_i \, d\mu$ for alle i, sikrer ligheden $\nu = \sum_i \nu_i$ og integralets egenskaber, at $\sum_i g_i$ er en tæthed for ν m.h.t. μ. D.v.s. vi kan og vil antage, at ν er et endeligt mål. Vi kan ligeledes antage, at μ er et endeligt mål. Thi da μ er σ-endeligt, findes der en overalt strengt positiv funktion $\varphi \in L^1(\mu)$. Et eksempel er

$$\varphi := \sum_{n \geq 1} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(B_n)} \cdot \mathbf{1}_{B_n},$$

hvor $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ er valgt så at $E = \bigcup_n B_n$ og $\mu(B_n) < \infty$ for ethvert n. Defineres herudfra

$$\tilde{\mu}(A) := \int_A \varphi \, d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E},$$

er $\tilde{\mu}$ et endeligt mål på $(E, \mathcal{E})$, og ν er $\tilde{\mu}$-satureret, da $\tilde{\mu}$ og μ er ækvivalente. Kan vi derfor vise eksistensen af en tæthed g for ν m.h.t. $\tilde{\mu}$, vil $g \cdot \varphi$ ifølge Sætning 4 være en tæthed for ν m.h.t. μ. Alt i alt drejer det sig altså om at vise:

Til givne endelige mål μ og ν, hvor ν er μ-satureret, findes der et ikke-negativt element $g \in L^1(\mu)$, så at

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Vi beviser først påstanden under antagelsen, at $\mathcal{E}$ er tællelig frembragt, d.v.s.

$$\exists\,(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E} : \ \mathcal{E} = \sigma((A_n)_{n\geq 1}).$$

For alle $n \geq 1$ findes der som tidligere omtalt en endelig partition $\{B_1^n, \ldots, B_{2^n}^n\}$ af E, så at

$$\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \sigma(\{B_1^n, \ldots, B_{2^n}^n\}),$$

og beskrivelsen af σ-algebraen frembragt af en partition, (se side 5), viser, at for ethvert $n \geq 1$ og $A \in \sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$ er

$$A \cap B_i^n = B_i^n \ \text{ eller } \emptyset \quad \text{d.v.s. } \ A = \bigcup_{i:\, B_n^i \subseteq A} B_i^n.$$

Definer for ethvert $n \geq 1\,(0/0 := 0)$

$$f_n := \sum_{i=1}^{2^n} \frac{\nu(B_i^n)}{m(B_i^n)} \cdot \mathbf{1}_{B_i^n},$$

hvor $m = \mu + \nu$. Da $0 \leq f_n \leq 1$ for alle n, er $(f_n)_{n\geq 1}$ begrænset i $L^2(m)$, og for ethvert $1 \leq l \leq n$ og $i \leq 2^l$ er ifølge ovenstående observation

$$\int_{B_i^l} f_n \, dm = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{\nu(B_j^n)}{m(B_j^n)} \int_{B_i^l} \mathbf{1}_{B_j^n} \, dm$$

$$= \sum_{j=1}^{2^n} \frac{\nu(B_j^n)}{m(B_j^n)} \cdot m(B_i^l \cap B_j^n) = \sum_{j:\, B_j^n \subseteq B_i^l} \nu(B_j^n) = \nu(B_i^l).$$

Ved linearitet følger heraf, at for alle $1 \leq l \leq n$ er

$$\int f_l \cdot f_n \, dm = \int f_l \cdot f_{n+1} \, dm,$$

d.v.s. $f_l \perp (f_{n+1} - f_n)$ i $L^2(m)$ for alle $1 \leq l \leq n$. Ifølge korollaret til Lemma 13 eksisterer $\lim_n f_n$ derfor i $L^2(m)$. Grænseværdien, som betegnes f, kan naturligvis antages at opfylde ulighederne $0 \leq f \leq 1$.

For alle $n \geq 1$ og $i \leq 2^n$ har vi derfor ifølge kontinuiteten af skalarproduktet, at

$$\int_{B_i^n} f \, dm = < f, \mathbf{1}_{B_i^n} > = \lim_l < f_l, \mathbf{1}_{B_i^n} > = \lim_l \int_{B_i^n} f_l \, dm = \nu(B_i^n),$$

hvilket ved addition betyder, at

$$\nu(A) = \int_A f \, dm \quad \text{for alle } A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\{A_1, \ldots, A_n\}).$$

De to endelige mål ν og $f\,dm$ stemmer altså overens på en algebra, som frembringer $\mathcal{E}$, og ifølge Proposition 2 er de derfor identiske. D.v.s.

$$\nu(A) = \int_A f\,dm \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E},$$

hvilket, da $m = \mu + \nu$, også kan skrives som

$$\int_A f\,d\mu = \int_A (1-f)\,d\nu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Ved at bruge dette for $A = \{f = 1\}$ ses, at $\mu(f = 1) = 0$ og dermed $\nu(f = 1) = 0$, d.v.s. $1 - f = (1 - f) \cdot \mathbf{1}_{\{f<1\}}$ ν-n.o., hvoraf fås ved brug af Sætning 4, at

$$\nu(A) = \int_A \frac{f}{1-f} \cdot \mathbf{1}_{\{f<1\}}\,d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Eksistensen af en tæthed for ν m.h.t. μ er hermed vist, forudsat at $\mathcal{E}$ er tællelig frembragt. For at fjerne denne antagelse argumenteres som følger.
Som netop set er det nok at vise, at der findes et $f \in L^2(m)$, så at $0 \leq f \leq 1$ og

$$\nu(A) = \int_A f\,dm \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Som netop vist, findes der for enhver tællelig frembragt del σ-algebra $\mathcal{F}$ i $\mathcal{E}$ et $f_{\mathcal{F}} \in L^2(m, \mathcal{F})$, så at $0 \leq f_{\mathcal{F}} \leq 1$ og

$$\nu(A) = \int_A f_{\mathcal{F}}\,dm \quad \text{for alle } A \in \mathcal{F}.$$

Vælg nu en følge $(\mathcal{F}_i)_{i\geq 1}$ af tællelig frembragte del σ-algebraer i $\mathcal{E}$, så at

$$\lim_i \int f_{\mathcal{F}_i}^2\,dm = \sup_{\mathcal{F}} \int f_{\mathcal{F}}^2\,dm \leq m(E) < \infty,$$

hvor sup tages over alle tællelig frembragte del σ-algebraer i $\mathcal{E}$. Definer $\mathcal{F}^* := \sigma(\bigcup_{i\geq 1} \mathcal{F}_i)$. Da $\mathcal{F}^*$ er tællelig frembragt, har det mening at betragte $f_{\mathcal{F}^*}$, og da $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}^*$ er $f_{\mathcal{F}_i}$ og $f_{\mathcal{F}^*} - f_{\mathcal{F}_i}$ orthogonale i $L^2(m)$ for ethvert i, thi

$$\int f_{\mathcal{F}_i} \cdot (f_{\mathcal{F}^*} - f_{\mathcal{F}_i})\,dm = \int f_{\mathcal{F}_i} \cdot f_{\mathcal{F}^*}\,dm - \int f_{\mathcal{F}_i} \cdot f_{\mathcal{F}_i}\,dm = \int f_{\mathcal{F}_i}\,d\nu - \int f_{\mathcal{F}_i}\,d\nu = 0.$$

Ifølge Pythagoras gælder derfor, at $\int f_{\mathcal{F}_i}^2\,dm \leq \int f_{\mathcal{F}^*}^2\,dm$ for alle i og dermed

$$\int f_{\mathcal{F}^*}^2\,dm = \sup_{\mathcal{F}} \int f_{\mathcal{F}}^2\,dm.$$

Men dette viser, at $f_{\mathcal{F}^*}$ er funktionen, vi søger. Thi lad $A \in \mathcal{E}$ være givet. Da σ-algebraen $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F}^*, A)$ er tællelig frembragt og indeholder $\mathcal{F}^*$, vises som før, at $f_{\mathcal{F}^*}$ og $f_{\overline{\mathcal{F}}} - f_{\mathcal{F}^*}$ er orthogonale i $L^2(m)$, men på grund af maksimaliteten af $\int f_{\mathcal{F}^*}^2\,dm$ må der gælde $f_{\overline{\mathcal{F}}} - f_{\mathcal{F}^*} = 0$ m-n.o., d.v.s.

$$\nu(A) = \int_A f_{\overline{\mathcal{F}}}\,dm = \int_A f_{\mathcal{F}^*}\,dm.$$

Sætningen er hermed vist. $\diamond$

Konstruktion af mål.
Indtil nu har vi arbejdet under antagelsen, at målrummet $(E, \mathcal{E}, \mu)$, d.v.s. et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$ udstyret med et mål μ, på forhånd var givet. Men de eneste mål, vi på nuværende tidspunkt faktisk ved eksisterer, er såkaldte *diskrete mål*, d.v.s. mål af typen

$$\sum_i a_i \cdot \delta_{x_i} \quad \text{hvor } a_i > 0,\ x_i \in E.$$

I dette afsnit skal vi derfor beskæftige os med eksistensen af mere interessante mål som f.eks. Lebesgue målet på $\mathbf{R}$. Problemet, vi ønsker at løse, kan formuleres på følgende måde. Lad der være givet et system $\mathcal{G}$ af 'pæne' delmængder af E, hvor det antages, at $\emptyset \in \mathcal{G}$, samt en funktion μ

$$\mu : \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}_+ \quad \text{så at } \ \mu(\emptyset) = 0.$$

Under hvilke omstændigheder findes der da et mål på $\sigma(\mathcal{G})$, som stemmer overens med μ på $\mathcal{G}$? Eller kort, hvornår kan μ udvides til et mål på $\sigma(\mathcal{G})$?

Vigtigt eksempel: $E = \mathbf{R}$, $\mathcal{G} = \{\,]\, a, b]\,|\, -\infty < a \leq b < \infty\}$ og $\mu(]\, a, b\,]) = b - a$.

Problemets løsning ligger gemt i følgende resultat af Carathéodory.

Sætning 11 Carathéodory's Sætning.
Lad m betegne en ikke-negativ mængdefunktion defineret på alle delmængder af E, d.v.s. $m : 2^E \to \overline{\mathbf{R}}_+$ så at $m(\emptyset) = 0$. Til m tilordnes de såkaldte m-målelige mængder $\mathcal{M}(m)$ defineret ved

$$\mathcal{M}(m) := \{B \in 2^E \,|\, m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c) \text{ for alle } A \in 2^E\}.$$

$\mathcal{M}(m)$ er da en algebra, og m er endelig additiv på $\mathcal{M}(m)$. Hvis m er voksende og tællelig subadditiv, er $\mathcal{M}(m)$ en σ-algebra, og m er et mål på $\mathcal{M}(m)$.

Bemærk at hvis m er subadditiv, er $B \in 2^E$ element i $\mathcal{M}(m)$, hvis og kun hvis

$$m(A) \geq m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$$

for ethvert $A \in 2^E$ med $m(A) < \infty$, og hvis m yderligere er voksende, indeholder $\mathcal{M}(m)$ derfor alle m-nulmængder, d.v.s. delmængder $B \subseteq E$ med $m(B) = 0$.

Bevis for Sætning 11. Definitionsligningen viser umiddelbart, at $E, \emptyset \in \mathcal{M}(m)$, samt at denne er stabil under komplementærmængde dannelse. Lad B_1 og B_2 i $\mathcal{M}(m)$ være givet. Ved først at udnytte at $B_1 \in \mathcal{M}(m)$ og dernæst at $B_2 \in \mathcal{M}(m)$ fås for ethvert $A \in 2^E$, at

$$m(A \cap (B_1 \cup B_2)) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c)$$

$$= m(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + m(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c)$$

$$= m(A \cap B_1) + m(A \cap B_2 \cap B_1^c) + m(A \cap B_1^c \cap B_2^c),$$

$$= m(A \cap B_1) + m(A \cap B_1^c) = m(A).$$

D.v.s. $\mathcal{M}(m)$ er en algebra, og hvis B_1 og B_2 er disjunkte elementer i $\mathcal{M}(m)$, har vi for alle $A \in 2^E$ tilsvarende

$$m(A \cap (B_1 \cup B_2)) = m(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + m(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c)$$

$$= m(A \cap B_1) + m(A \cap B_2).$$

Dette viser specielt (sæt $A = E$), at m er endelig additiv på $\mathcal{M}(m)$, samt da $\mathcal{M}(m)$ er en algebra

$$m(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k) = m(A \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k) + m(A \cap B_k) \text{ for alle } n \text{ hvis } (B_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}(m) \text{ p.d.}$$

Hvoraf fås ved induktion, at

$$m(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} m(A \cap B_k) \text{ for alle } n \text{ hvis } (B_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}(m) \text{ p.d.}$$

Antag nu yderligere, at m er voksende og tællelig subadditiv. σ-additiviten på $\mathcal{M}(m)$ er nu umiddelbar, thi hvis $(B_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}(m)$ er parvis disjunkte gælder, da m er voksende, endelig additiv og tællelig subadditiv, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \geq m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \geq \sup_n m(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sup_n \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k),$$

d.v.s. m er σ-additiv på $\mathcal{M}(m)$. Da $\mathcal{M}(m)$, som vist, er en algebra, er den en σ-algebra, hvis den yderligere er stabil under tællelig disjunkt forening. Lad derfor $(B_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}(m)$ parvis disjunkte være givet. Da m er subadditiv, gælder det om at vise, at for et givet $A \in 2^E$ er

$$m(A) \geq m(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) + m(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)^c).$$

Men som netop vist, er m endelig additiv på algebaen $\mathcal{M}(m)$, d.v.s. $m(A)$ er lig

$$m(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k) + m(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k)^c) = \sum_{k=1}^{n} m(A \cap B_k) + m(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k)^c)$$

for alle $n \geq 1$, og da m også er voksende, er $m(A)$ derfor større end eller lig

$$\sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} m(A \cap B_k) + m(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)^c) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A \cap B_k) + m(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)^c).$$

Heraf fås nu af den tællelige subadditivitet at

$$m(A\cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) + m(A\cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A\cap B_k) + m(A\cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)^c) \leq m(A).$$

D.v.s. $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{M}(m)$, og sætningen er hermed vist. $\diamond$

Lad i det følgende $\mathcal{G}$ og μ som ovenfor være givet. Set i lyset af Proposition 2 og det tilhørende Korollar er situationen, hvor $\mathcal{G}$ er stabil under endelig gennemsnit samt indeholder en voksende følge $(G_n)_{n\geq 1}$ så at $E = \bigcup_n G_n$ og $\mu(G_n) < \infty$ for alle n, specielt vigtig, idet der her højst eksisterer én udvidelse.
For at kunne udnytte Carathéodory's Sætning må vi først ud fra μ konstruere en ikke-negativ mængdefunktion defineret på hele 2^E. Dette kan gøres på flere måder, men vi holder os til det såkaldte *ydre mål* μ^* defineret ved

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \,|\, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \quad G_i \in \mathcal{G}\} \quad \text{for } A \in 2^E.$$

Definitionen viser umiddelbart, at μ^* er voksende og $\mu^*(\emptyset) = 0$. Endvidere er

i) $\mu^*(G) \leq \mu(G)$ for $G \in \mathcal{G}$ og ii) μ^* tællelig subadditiv.

Bevis. i) følger klart af at

$$G \subseteq G \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots \text{ og } \emptyset \in \mathcal{G} \text{ med } \mu(\emptyset) = 0.$$

Betragt derfor ii). Lad $(A_i)_{i\geq 1} \subseteq 2^E$ være givet og antag, at $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \infty$, thi i modsat fald er der intet at vise.
Vælg for givet $\epsilon > 0$ for ethvert $k \geq 1$ $(G_i^k)_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, så at

$$A_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^k \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i^k) \leq \mu^*(A_k) + \epsilon \cdot 2^{-k} \quad \text{for alle } k \geq 1.$$

Rearrangeres $\{G_i^k \,|\, i, k \geq 1\}$ som én følge, fås en følge $(\overline{G}_i)_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, hvis forening overdækker $\bigcup_i A_i$, og da man i en sum med lutter ikke-negative led frit kan omordne leddene, uden at summen ændres, ses at

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\overline{G}_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i^k) \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \epsilon,$$

hvilket viser ii), da $\epsilon > 0$ er vilkårlig. $\diamond$

Ifølge Carathéodory's Sætning er μ^* et mål på $\mathcal{M}(\mu^*)$, og restriktionen af μ^* til $\mathcal{M}(\mu^*)$ er derfor en udvidelse af den rigtige type, hvis flg. to betingelser er opfyldte.

$$\mathcal{G} \text{ og dermed } \sigma(\mathcal{G}) \text{ er indeholdt i } \mathcal{M}(\mu^*) \quad \text{og} \quad \mu^* = \mu \text{ på } \mathcal{G}.$$

Dette giver anledning til følgende løsning på ovenstående eksistensproblem. Bemærk at b), c) og d) også er nødvendige for eksistensen af måludvidelse.

Sætning 12 *Antag at $\mathcal{G}$ er stabil under endelig gennemsnit. Da udvider μ til et mål på $\sigma(\mathcal{G})$, hvis følgende betingelser er opfyldte.*

a) $\forall\, G_1, G_2 \in \mathcal{G}\ \exists\, G_1^*, \ldots, G_n^* \in \mathcal{G}$ parvis disjunkte : $G_1 \cap G_2^c = \bigcup_{i=1}^n G_i^*$.

b) $\forall\, G_1, G_2 \in \mathcal{G} :\ \mu(G_1) \leq \mu(G_2),$ hvis $G_1 \subseteq G_2$.

c) $\forall\, G, G_1, G_2, \ldots \in \mathcal{G} :\ \mu(G) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(G_i),$ hvis $G = \bigcup_{i=1}^\infty G_i$.

d) $\forall\, G, G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G} :\ \mu(G) \geq \sum_{i=1}^n \mu(G_i),$ hvis $\bigcup_{i=1}^n G_i \subseteq G$ og $G_1, \ldots, G_n$ parvis disjunkte.

Udvidelsen er entydigt bestemt, hvis der findes $(G_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, så at $E = \bigcup_n G_n$ og $G_n \subseteq G_{n+1}$ for alle n.

Da entydigheden allerede er afklaret, behandles kun eksistensen. Beviset opdeles i to dele, idet vi særskilt viser

Lemma 14 *Med samme notation som i Sætning 12 gælder*
1) b), c) $\Rightarrow\ \mu = \mu^*$ på $\mathcal{G}$.
2) c), d) $\Rightarrow\ \mu^*(\bigcup_{i=1}^n G_i) = \sum_{i=1}^n \mu^*(G_i)$ *for parvis disjunkte $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$.*

Bevis. Lad $G \in \mathcal{G}$ være givet. Som før nævnt er det nok at vise $\mu^*(G) \geq \mu(G)$. Lad hertil $(G_i)_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{G}$ være givet, så at $G \subseteq \bigcup_i G_i$. Antagelserne giver nu

$$\sum_{i=1}^\infty \mu(G_i) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu(G_i \cap G) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty (G_i \cap G)\right) = \mu(G),$$

og dermed at $\mu^*(G) \geq \mu(G)$. D.v.s. vi har vist punkt 1).
I punkt 2) er det nok at vise $\geq$, da $\leq$ følger af, at μ^* er subadditiv. Lad derfor parvis disjunkte $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$ være givet, og betragt en følge $(\tilde{G}_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, hvis foreningsmængde overdækker $G_1 \cup \ldots \cup G_n$.
Da $G_i \cap \tilde{G}_j \subseteq \tilde{G}_j$ for $i,\ j \geq 1$ fås af d)

$$\sum_{j=1}^\infty \mu(\tilde{G}_j) \geq \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^n \mu(G_i \cap \tilde{G}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^\infty \mu(G_i \cap \tilde{G}_j) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(G_i),$$

hvilket pr. definition af μ^* giver den søgte ulighed. $\diamond$

Bevis for Sætning 12. Da $\mu = \mu^*$ på $\mathcal{G}$, mangler vi ifølge Carathéodory's Sætning kun at vise, at $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$, d.v.s. pr. definition af μ^* og $\mathcal{M}(\mu^*)$ at vise, at for ethvert givet $G \in \mathcal{G}$ og $A \in 2^E$ er

$$\sum_{i=1}^\infty \mu(G_i) \geq \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A \cap G^c)$$

for enhver følge $(G_i)_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, så at $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Lad derfor G, A og $(G_i)_{i\geq 1}$ med de nævnte egenskaber være givet. For ethvert i eksisterer der ifølge a) parvis disjunkte $G^*_{1,i}, \ldots, G^*_{n(i),i} \in \mathcal{G}$ så at

$$G_i = (G_i \cap G) \cup (G_i \cap G^c) = (G_i \cap G) \cup \bigcup_{j=1}^{n(i)} G^*_{j,i};$$

og ifølge Lemma 14 gælder derfor for alle i, at

$$\mu(G_i) = \mu^*(G_i) = \mu^*(G_i \cap G) + \sum_{j=1}^{n(i)} \mu^*(G^*_{j,i}) \geq \mu^*(G_i \cap G) + \mu^*(G_i \cap G^c).$$

Den søgte ulighed følger nu ved summation under brug af subadditiviteten af μ^* samt inklusionerne $A \cap G \subseteq \bigcup_i (G_i \cap G)$ og $A \cap G^c \subseteq \bigcup_i (G_i \cap G^c)$, thi

$$\mu^*(A \cap G) + \mu^*(A \cap G^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(G_i \cap G) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(G_i \cap G^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i). \ \diamond$$

Flg. klassiske resultat er et specialtilfælde af Sætning 12.

Korollar *Enhver ikke-negativ tællelig additiv mængdefunktion defineret på en algebra $\mathcal{A}$ udvider til et mål på $\sigma(\mathcal{A})$, og udvidelsen er entydig, hvis $\mathcal{A}$ indeholder en følge af elementer, som alle har endeligt mål, og hvis foreningsmængde overdækker hele rummet.*

En mængdefunktion λ på en algebra $\mathcal{A}$, siges at være tællelig additiv, hvis $\lambda(\emptyset) = 0$ og

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i),$$

hvis $(A_i)_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ er parvis disjunkte og $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Bemærk at tællelig additivitet på $\mathcal{A}$ medfører endelig additivitet. Ved at betragte $(B_n)_{n\geq 1}$, hvor

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \qquad n \geq 1,$$

ses, at hvis hele rummet har endeligt λ mål, så er λ tællelig additiv på $\mathcal{A}$, hvis og kun hvis λ er endelig additiv og *kontinuert i* $\emptyset$, d.v.s. opfylder

$$\lim_n \lambda(B_n) = \inf_n \lambda(B_n) = 0$$

for alle $(B_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ hvor $B_n \downarrow \emptyset$, d.v.s.

$$B_n \supseteq B_{n+1} \ \text{ for } n \geq 1 \ \text{ og } \ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset.$$

I forlængelse af Korollaret er det på sin plads at nævne flg. vigtige anvendelse af resultaterne i dette afsnit.
Lad (S, d) betegne et separabelt metrisk rum. Tilfældet $S = \mathbf{R}$ med den sædvanlige metrik eller S en endelig mængde udstyret med den diskrete metrik er specielt vigtige.
Sæt

$$S^\infty := \{ (x_i)_{i\geq 1} \,|\, x_i \in S \ i \geq 1 \}$$

og definer for $n \geq 1$

$$p_n : S^\infty \to S^n \quad p_n((x_i)_{i\geq 1}) := (x_1, \ldots, x_n)$$

d.v.s. p_n er projektionsafbilbningen ned på de første n koordinater. Da

$$p_n^{-1}(A_n) = p_{n+1}^{-1}(A_n \times \mathbf{R})$$

for ethvert $n \geq 1$ og $A_n \in \mathcal{B}(S^n)$ er

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}(\mathcal{B}(S^n))$$

en algebra i S^∞, og da $\mathcal{B}(S^n) = \mathcal{B}(S)^n$ er $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(S)^\infty$. Bemærk at hvis

$$p_n^{-1}(A_n) = p_m^{-1}(A_m) \text{ for } n \leq m \text{ og } A_n \in \mathcal{B}(S^n),\ A_m \in \mathcal{B}(S^m),$$

så er

$$A_m = A_n \times S \times \cdots \times S \quad (m - n \text{ faktorer}).$$

Heraf følger at for givne $(\mu_n)_{n\geq 1}$ opfyldende flg. konsistensbetingelse:
For ethvert $n \geq 1$ er μ_n er for ethvert $n \geq 1$ et sandsynlighedsmål på $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$ og

$$\mu_n(A) = \mu_{n+1}(A \times S) \text{ for } n \geq 1 \text{ og } A \in \mathcal{B}(S^n).$$

så er der ved fastsættelsen

$$\lambda(A) := \mu_n(A_n) \text{ hvis } A = p_n^{-1}(A_n) \ n \geq 1 \ A_n \in \mathcal{B}(S^n)$$

defineret en endelig additiv mængdefunktion på $\mathcal{A}$ med total masse 1. λ er derfor tællelig additiv på $\mathcal{A}$, hvis den er kontinuert i $\emptyset$, og i givet fald udvider λ til et sandsynlighedsmål $\overline{\lambda}$ på $(S^\infty, \mathcal{B}(S)^\infty)$, hvis marginalfordelinger er de givne $(\mu_n)_{n\geq 1}$, d.v.s.

$$\mu_n = \overline{\lambda} \circ p_n^{-1} \quad n \geq 1.$$

Kolmogorov's Konsistens Sætning viser, at dette er tilfældet, hvis S er et polsk rum. Specialtilfældet, hvor S er en endelig mængde, er simpelt, idet et kompakthedsargument her viser, at hvis

$$(A_n) \subseteq \mathcal{A} \ \ A_n \downarrow \emptyset \ \Rightarrow \exists\, n_0 \geq 1 : \ A_n = \emptyset \ \ n \geq n_0.$$

D.v.s. λ er automatisk kontinuert i $\emptyset$ og derfor tællelig additiv.

Lebesgue-Stieltjes mål på R.
Lad E betegne $\mathbf{R}$ og definer $\mathcal{G} := \{\,]\,a,b\,]\mid -\infty < a \leq b < \infty\}$. Det ses let, at $\mathcal{G}$ indeholder $\emptyset$ og er stabil under endelig gennemsnit. Endvidere er $G_1 \setminus G_2 = G_1 \cap G_2^c$ for ethvert par af mængder G_1 og G_2 i $\mathcal{G}$ enten element i $\mathcal{G}$ eller kan skrives som en disjunkt forening af to elementer fra $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ opfylder dermed punkt a) i Sætning 12, og da $\mathbf{R}$ er en tællelig foreningsmængde af en følge af voksende elementer $(G_n)_{n\geq 1}$ fra $\mathcal{G}$, f.eks. $G_n =]-n,n]$, opfylder $\mathcal{G}$ samtlige betingelserne nævnt i Sætning 12.
Lad nu $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ betegne en given voksende og højrekontinuert funktion og definer for alle $]\,a,b\,] \in \mathcal{G}$

$$\lambda_F(]\,a,b\,]) := F(b) - F(a).$$

Det overlades til læseren at overveje, at λ_F opfylder b) og d) i Sætning 12. For at vise λ_F kan udvides til $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbf{R})$, mangler vi derfor kun at eftervise punkt c), d.v.s. den tællelige subadditivitet. Vi skal med andre ord vise

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) \quad \text{hvis }]\,a,b\,] = \bigcup_i \,]\,a_i,b_i\,].$$

Hertil får vi brug for flg. lemma.

Lemma 15 *For alle $n \geq 1$ og alle reelle tal $a \leq b$ og $a_i < b_i$ $i = 1,\ldots,n$ gælder*

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)) \quad \text{hvis } [\,a,b\,] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \,]\,a_i,b_i\,[.$$

Bevis. Induktion efter n. $n = 1$ siger kun, at

$$F(b) - F(a) \leq F(b_1) - F(a_1) \quad \text{hvis } [\,a,b\,] \subseteq \,]\,a_1,b_1\,[,$$

hvilket er klar, da F er voksende. Antag det gælder for $n-1 \geq 1$ og alle valg af $a \leq b$ og $a_i < b_i$ $i = 1,\ldots,n-1$. Betragt tilfældet n. Da påstanden gælder for $n = 1$, kan vi forudsætte, at $[\,a,b\,]$ ikke er indeholdt i nogen af $]\,a_i,b_i\,[$ $i = 1,\ldots,n$.

$$[\,a,b\,] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \,]\,a_i,b_i\,[\Rightarrow \exists i_0 \; a \in \,]\,a_{i_0},b_{i_0}\,[\quad \text{og} \quad [\,b_{i_0},b\,] \subseteq \bigcup_{i=1,\,i\neq i_0}^{n} \,]\,a_i,b_i\,[.$$

Da F er voksende fås ved brug af induktionshypotesen, at

$$F(b) - F(a) = F(b) - F(b_{i_0}) + F(b_{i_0}) - F(a) \leq F(b) - F(b_{i_0}) + F(b_{i_0}) - F(a_{i_0})$$

$$\leq \sum_{i=1,\,i\neq i_0}^{n} (F(b_i) - F(a_i)) + F(b_{i_0}) - F(a_{i_0}) = \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)) \quad \diamond$$

Bevis for subadditiviteten. Da F er højrekontinuert og voksende, fås ved et 'kompakthedsargument' (se Heine-Borel nedenfor), at der for givet $\epsilon > 0$ eksisterer et $b_i^\epsilon > b_i$ og $1 \leq n_\epsilon < \infty$, så at

$$F(b_i^\epsilon) \leq F(b_i) + \epsilon/2^i \quad \text{for alle } i \quad \text{og} \quad [\, a+\epsilon, b\,] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon}]\, a_i, b_i^\epsilon\, [.$$

Ved brug af ovenstående Lemma gælder derfor

$$F(b) - F(a+\epsilon) \leq \sum_{i=1}^{n_\epsilon} (F(b_i^\epsilon) - F(a_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) + \epsilon,$$

og dermed $F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^\infty (F(b_i) - F(a_i))$ ved grænseovergang $\epsilon \downarrow 0$. $\diamond$

Eksistensen af *Lebesgue-Stieltjes målet* λ_F hørende til en voksende højrekontinuert reel funktion F er hermed vist. Specialtilfældet $F(x) = x$ svarer til det en-dimensionale Lebesgue mål λ_1, d.v.s. målet på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ bestemt ved

$$\lambda_1(]\, a, b\,]) = b - a \quad \text{for alle } a < b.$$

I forbindelse med integration med λ_F skrives ofte dF i stedet for $d\lambda_F$ i lighed med dx i stedet for $d\lambda_1$.

Proposition 16 Heine-Borel.
Hvis $[\, a, b\,] \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty]\, a_i, b_i\, [$ *findes der et* $n \geq 1$ *så at* $[\, a, b\,] \subseteq \bigcup_{i=1}^n]\, a_i, b_i\, [$.

Bevis. Hvis påstanden ikke holder, kan vi for ethvert n vælge et punkt x_n, så at

$$x_n \in [\, a, b\,] \quad \text{og} \quad x_n \notin \bigcup_{i=1}^n]\, a_i, b_i\, [.$$

Hvert af intervallerne $]\, a_i, b_i\, [$ indeholder derfor højst endelig mange x_n'er. Men da $[\, a, b\,]$ er lukket og begrænset, eksisterer der en delfølge $(n_k)_{k\geq 1}$, så at $x_{n_k} \to x_\infty \in [\, a, b\,]$, og der findes derfor et interval $]\, a_{i_0}, b_{i_0}\, [$, som indeholder x_∞, og dermed, da $]\, a_{i_0}, b_{i_0}\, [$ er åben, x_{n_k}'erne fra et vist trin at regne. Dette er en klar modstrid, og sætningen er hermed vist. $\diamond$

Ved bestemmelse af fordelingsmål har man ofte brug for at vide, om et Lebesgue-Stieltjes mål λ_F hørende til en given voksende og højrekontinuert funktion F er absolut kontinuert m.h.t. Lebesgue målet λ_1, eller hvad der er det samme, da målene er σ-endelige, om λ_F er satureret m.h.t. λ_1. Da punkter er λ_1-nulmængder og

$$\lambda_F(\{x\}) = F(x) - F(x-) \quad \text{for alle } x \in \mathbf{R},$$

skal F i det mindste være kontinuert for at absolut kontinuitet kan komme på tale, og vi vil derfor i det følgende antage, at F er kontinuert.
Ved at udnytte at $]-n, n\,[\, \uparrow \mathbf{R}$ ses, at

$$\lambda_F \ll \lambda_1 \;\Leftrightarrow\; \lambda_{F,n} \ll \lambda_{1,n} \quad \text{for alle } n \geq 1,$$

hvor $\lambda_{F,n}$ og $\lambda_{1,n}$ er restriktionen af λ_F og λ_1 til intervallet $]-n,n[$. Da disse mål alle er endelige, viser Proposition 4, at $\lambda_F \ll \lambda_1$ hvis og kun hvis enhver begrænset åben mængde U har lille λ_F-mål, hvis dens λ_1-mål er tilstrækkeligt lille. Men som vist i Appendiks C er enhver begrænset åben delmængde af den reelle akse en højst tællelig disjunkt forening af åbne intervaller, og der gælder derfor flg. kriterium for absolut kontinuitet.

Lebesgue-Stieltjes målet λ_F hørende til en voksende kontinuert funktion F er absolut kontinuert m.h.t. λ_1, d.v.s. $\lambda_F \ll \lambda_1$, hvis og kun hvis

$$\forall n \geq 1 \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \sum_{i \geq 1} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i \geq 1} (F(b_i) - F(a_i)) < \epsilon$$

for enhver følge af parvis disjunkte intervaller $]a_i, b_i[\subseteq]-n,n[$.

Men vi er også interesseret i at kende en eventuel tæthed. Hertil betragtes funktionsfølgen $(f_n)_{n\geq 1}$ defineret ved

$$f_n(x) := n\,(F(x+1/n) - F(x)) \quad x \in \mathbf{R}.$$

f_n'erne er da kontinuerte og ikke-negative og udnyttes, at Lebesgue målet er translationsinvariant, fås for alle $n \geq 1$ og alle reelle tal $a < b$, at

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = n\left(\int_{a+1/n}^{b+1/n} F(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx\right)$$

og dermed

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = n\left(\int_b^{b+1/n} F(x)\,dx - \int_a^{a+1/n} F(x)\,dx\right) \to_{n\to\infty} F(b) - F(a).$$

Ud fra f_n'erne defineres som i Lemma 5 f_∞ ved fastsættelsen

$$f_\infty(x) = \lim_n f_n(x), \text{ hvis denne eksisterer i } \mathbf{R}, \text{ og } f_\infty(x) = 0 \text{ ellers.}$$

Med denne notation på plads gælder nu flg. resultat. Husk at F er antaget at være kontinuert.

Proposition 17 $\lim_n f_n(x)$ *eksisterer i* $\mathbf{R}$ *for* λ_1*-n.a.* x*, d.v.s.* $f_n \to f_\infty$ λ_1*-n.o., og* λ_F *er absolut kontinuert m.h.t.* λ_1 *med tæthed* f_∞ *hvis og kun hvis*

$$\int_{-k}^k f_\infty \, d\lambda_1 = F(k) - F(-k) \quad \text{for vilkårligt store } k,$$

eller ækvivalent, hvis $\lambda_F(\mathbf{R}) < \infty$,

$$\int_{\mathbf{R}} f_\infty \, d\lambda_1 = \lambda_F(\mathbf{R}).$$

I beviset benyttes flg. dybe resultat, som vi ikke viser.

A : *Enhver kontinuert voksende funktion* $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *er differentiabel* λ_1*-n.o.*

Bevis for Proposition 17. Eksistensen af $\lim_n f_n$ i $\mathbf{R}$ λ_1-n.o. er en konsekvens af A, og da 'kun hvis'-delen er åbenbar, koncentrerer vi os om 'hvis'-delen.
Lad μ betegne målet $f_\infty \, d\lambda_1$. Ved brug af Fatou's lemma har vi, hvis $I_{a,b}$ er et endeligt interval med venstre og højre endepunkt lig a og b, at

$$\mu(I_{a,b}) = \int_a^b f_\infty \, d\lambda_1 \leq \lim_n \int_a^b f_n \, d\lambda_1 = F(b) - F(a) = \lambda_F(I_{a,b}) < \infty.$$

D.v.s. $\mu(I) \leq \lambda_F(I)$ på ethvert endeligt interval, men da de pr. antagelse stemmer overens på intervaller af formen $[-k, k\,]$ for vilkårligt store k, følger ved additivitet, at de stemmer overens på alle endelige intervaller. Ifølge Proposition 2 er derfor $\mu = \lambda_F$, d.v.s. λ_F er absolut kontinuert m.h.t. λ_1 med tæthed f_∞. $\diamond$

Det er måske på sin plads at nævne, at hvis Lebesgue-Stieltjes målet λ_F er absolut kontinuert m.h.t. λ_1, så er f_∞ en tæthed. Dette er en direkte konsekvens af flg. variant af resultat A.

B : *Lad* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ *være en Borel funktion, som er integrabel m.h.t.* λ_1 *over ethvert endeligt interval. Da er for ethvert* $a \in \mathbf{R}$ *funktionen*

$$\Phi_a : \quad r \mapsto \int_a^r f(x) \, \lambda_1(dx) \quad r \geq a$$

differentiabel i t *med* $\Phi_a'(t) = f(t)$ *for* λ_1*-n.a.* $t > a$.

I mange sammenhænge er flg. resultat vigtigt. Beviset udelades.

Proposition 18 *Lad* F *være en kontinuert voksende funktion. Da er* $\lambda_F \ll \lambda_1$, *hvis* $t \mapsto F(t)$ *er differentiabel i ethvert punkt i en mængde* $D \subseteq \mathbf{R}$, *hvor* $\mathbf{R} \backslash D$ *er højst tællelig; og i givet fald er*

$$t \mapsto F'(t) \cdot \mathbf{1}_D(t)$$

en tæthed.

Betragt igen $\mathcal{G} = \{\,]a, b] \mid -\infty < a \leq b < \infty\}$ og $\lambda(]a, b]) := b - a$. Ifølge Carathéodory's Sætning er det tilhørende ydre mål λ^* et σ-additivt mål på $\mathcal{M}(\lambda^*)$, og som hovedsætningen viser, er

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{M}(\lambda^*) \;\text{ og }\; \lambda^* = \lambda_1 \text{ på } \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

Dette giver anledning til flg. spørgsmål.

Er $\mathcal{M}(\lambda^*)$ større end $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ og i givet fald hvor meget ?

For at besvare dette vises først identiteten

$$\mathcal{N}_{\lambda_1} = \{A \subseteq \mathbf{R} \,|\, \lambda^*(A) = 0\}.$$

Bevis. $A \in \mathcal{N}_{\lambda_1} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) : A \subseteq B$ og $\lambda_1(B) = 0$. Men λ^* er voksende og lig λ_1 på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, d.v.s.

$$0 \leq \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) = 0.$$

Antag omvendt at $\lambda^*(A) = 0$. Pr. definition af λ^* findes der for ethvert n en følge $(G_{kn})_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R})$, så at

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{kn} \quad \text{og} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(G_{kn}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_{kn}) < 1/n,$$

d.v.s., hvis $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{kn}$, så er $A \subseteq B$ og B en Borel mængde, og da

$$\lambda_1(B) \leq \inf_n \lambda_1(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{kn}) \leq \inf_n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(G_{kn}) = 0$$

er $A \in \mathcal{N}_{\lambda_1}$. $\diamond$

Vi kan nu give en 'nøjagtig' beskrivelse af $\mathcal{M}(\lambda^*)$.

Proposition 19 $\mathcal{M}(\lambda^*) = \sigma\,(\mathcal{B}(\mathbf{R}) \cup \mathcal{N}_{\lambda_1})$ *og for ethvert* $B \in \mathcal{M}(\lambda^*)$ *findes der Borel mængder* B' og B'', *så at*

$$B' \subseteq B \subseteq B'' \quad \text{og} \quad \lambda_1(B'' \backslash B') = 0.$$

Specielt er $B'' \backslash B \in \mathcal{N}_{\lambda_1}$ *og* $\lambda^*(B) = \lambda_1(B') = \lambda_1(B'')$, *d.v.s.* $\mathcal{M}(\lambda^*)$ *er lukket under translation, og* λ^* *er translationsinvariant.*

Korollar *For ethvert* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *som er målelig m.h.t.* $(\mathcal{M}(\lambda^*), \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, *findes der funktioner* f_1 *og* f_2 *i* $\mathrm{M}(\mathbf{R})$, *så at*

$$f_1 \leq f \leq f_2 \quad \text{og} \quad f_1 = f_2 \ \ \lambda_1\text{-n.o.}$$

Bevis. Korollaret er åbenbart for simple funktioner, og fås derfor generelt via Lemma 6 og linearitet. Detaljerne overlades til læseren. Bemærkningen efter Carathéodory's Sætning og den netop viste identitet viser, at $\mathcal{N}_{\lambda_1} \subseteq \mathcal{M}(\lambda^*)$ og dermed

$$\sigma\,(\mathcal{B}(\mathbf{R}) \cup \mathcal{N}_{\lambda_1}) \subseteq \mathcal{M}(\lambda^*).$$

Lad $B \in \mathcal{M}(\lambda^*)$ være givet. Definer for $n \geq 1$ $B_n := B \cap I_n$, hvor $I_n :=]-n, n]$. Da $\lambda^*(B_n) < \infty$ for alle n, findes der pr. definition af λ^* for ethvert k en følge $(G^n_{ik})_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R})$, så at

$$B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G^n_{ik} \subseteq I_n \text{ og } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1(G^n_{ik}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(G^n_{ik}) < \lambda^*(B_n) + 1/k.$$

D.v.s.

$$B_n'' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ik}^n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \text{ og } B_n \subseteq B_n'' \subseteq I_n$$

samt

$$\lambda^*(B_n'') = \lambda_1(B_n'') \le \inf_k \lambda_1(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ik}^n) \le \inf_k \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1(G_{ik}) = \inf_k(\lambda^*(B_n) + \frac{1}{k}) = \lambda^*(B_n)$$

og dermed ligheden $\lambda^*(B_n''\backslash B_n) = \lambda^*(B_n'') - \lambda^*(B_n) = 0$, da $B_n \in \mathcal{M}(\lambda^*)$. Tilsvarende eksisterer der en Borel mængde $\tilde{B} \subseteq I_n$, så at

$$I_n\backslash B_n \subseteq \tilde{B} \text{ og } \lambda^*(\tilde{B}) = \lambda^*(I_n\backslash B_n).$$

$B_n' := I_n\backslash\tilde{B}$ er derfor en Borel mængde indeholdt i B_n, men med samme λ^*-mål. Definer nu Borel mængder B' og B'' ved

$$B' := \bigcup_n B_n' \text{ og } B'' := \bigcup_n B_n''.$$

Pr. konstruktion er $B' \subseteq B \subseteq B''$, og da

$$B\backslash B' = \bigcup_n (B_n\backslash B') \subseteq \bigcup_n (B_n\backslash B_n') \text{ og } B''\backslash B = \bigcup_n (B_n''\backslash B) \subseteq \bigcup_n (B_n''\backslash B_n)$$

ses, at

$$\lambda^*(B''\backslash B) \le \sum_n \lambda^*(B_n''\backslash B_n) = 0,$$

og tilsvarende at $\lambda^*(B\backslash B') = 0$. Ved addition fås derfor, at $\lambda_1(B''\backslash B') = 0$ og dermed

$$B = B''\backslash(B''\backslash B) \in \sigma\left(\mathcal{B}(\mathbf{R}) \cup \mathcal{N}_{\lambda_1}\right)$$

samt

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B'') = \lambda_1(B'') = \lambda_1(B'). \qquad \diamond$$

Proposition 19 gælder ikke kun for Lebesgue målet, men generaliserer uændret til ethvert σ-endeligt mål.

Mængdesystemet $\mathcal{M}(\lambda^*)$, som omtales som de *Lebesgue målelige* mængder, indeholder ikke alle delmængder af den reelle akse. D.v.s. Lebesgue målet kan <u>ikke</u> udvides til et σ-additivt mål på hele $2^{\mathbf{R}}$. Denne umulighed er den væsentligste grund til, at vi er tvunget til at indføre begrebet σ-algebra. Et 'simpelt' eksempel på en ikke Lebesgue målelig mængde kan ved brug af det såkaldte *Udvalgsaksiom* konstrueres på flg. måde.

Lad $\tilde{M}$ betegne mængden af sideklasser til $\mathbf{Q}$ i den kommutative gruppe $(\mathbf{R}, +)$, d.v.s. elementerne i $\tilde{M}$ er af formen $r + \mathbf{Q}$ for et reelt tal r. Da $\mathbf{Q}$ er tæt i $\mathbf{R}$, indeholder alle sideklasser mindst et element fra intervallet $]0,1[$, d.v.s. det har mening (tænk over dette) at betragte en mængde M med flg. egenskaber

$$M \subseteq]0,1[\quad \text{og} \quad \sharp(M \cap \tilde{m}) = 1 \quad \text{for alle } \tilde{m} \in \tilde{M},$$

hvor $\sharp$ står for antal elementer i mængden. Dette M er ikke Lebesgue målelig, thi da M kun indeholder et element fra hver sideklasse er mængderne $q + M$ disjunkte for forskellige valg af rationale tal q, men

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbf{Q} \cap [-1,1]} (q + M) \subseteq [-1,2],$$

d.v.s. hvis M og derfor også $q + M$ er Lebesgue målelig, skal den fælles værdi $a := \lambda^*(M) = \lambda^*(q + M)$ være positiv, men samtidigt skal der gælde $na \leq 3$ for alle n, hvilket klart er umuligt.

Lebesgue målet på $\mathbf{R}^n$.
På grund af Lebesgue målets store betydning skal vi i dette afsnit se nærmere på målene λ_n. Som allerede nævnt er de alle translationsinvariante, og som næste resultat viser, er denne egenskab fundamental for Lebesgue målene.

Lemma 16 *Lad m betegne et translationsinvariant mål på $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, hvis værdi på enhver begrænset n-dimensional kasse er endelig. Da er*

$$m = c_m \cdot \lambda_n \quad \text{hvor } c_m = m(]0,1]^n).$$

Bevis. Lad for ethvert $k \geq 1$ $(D_i^k)_{i\geq 1}$ være en nummerering af de akseparallelle dyadisk rationale kasser med kantlængde 2^{-k}, d.v.s. alle kasser af formen

$$\prod_{j=1}^{n}](i_j - 1)/2^k, i_j/2^k] \quad \text{hvor } i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{Z}.$$

Bemærk at $(D_i^k)_{i\geq 1}$'erne for ethvert k udgør en tællelig partition af $\mathbf{R}^n$. Translationsinvariansen betyder, at tallene $m(D_i^k)$ og $\lambda_n(D_i^k)$ kun afhænger af k, d. v.s. er uafhængige af i. Men da $]0,1]^n$, som har λ_n-mål 1, er en disjunkt forening af 2^{kn} D_i^k'er, betyder dette, at

$$m(D_i^k) = c_m \cdot \lambda_n(D_i^k) \quad \text{for alle } i, k \geq 1,$$

og dermed $m = c_m \cdot \lambda_n$ ifølge Proposition 2, da $\{D_i^k \mid i, k \geq 1\} \cup \{\emptyset\}$ ifølge Øvelse 3 er stabil under endelig gennemsnit og frembringer $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. Det sidste følger af, at enhver åben mængde er en foreningsmængde af visse af D_i^k'erne. $\diamond$

Ud fra Lemma 16 kan vi nu vise den såkaldte *lineære transformationssætning.*

Proposition 20 *Hvis $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er på formen $\underline{x} \mapsto T(\underline{x}) = \underline{x}_0 + T_1(\underline{x})$, hvor $\underline{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ og T_1 er en lineær bijektion af $\mathbf{R}^n$ på $\mathbf{R}^n$, er*

$$\lambda_{n,T} := \lambda_n \circ T^{-1} = \frac{1}{|\det T_1|} \cdot \lambda_n.$$

Bevis. For ethvert $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ og $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ er

$$T^{-1}(A + \underline{x}) = T_1^{-1}(A + \underline{x} - \underline{x}_0) = T_1^{-1}(A) + \underline{\tilde{y}} \ \text{ hvor } T_1(\underline{\tilde{y}}) = \underline{x} - \underline{x}_0,$$

og dermed da λ_n er translationsinvariant

$$\lambda_{n,T}(A + \underline{x}) = \lambda_{n,T_1}(A) \ \text{ for alle } \underline{x} \in \mathbf{R}^n \text{ og } A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n).$$

D.v.s. $\lambda_{n,T}$ er translationsinvariant og $\lambda_{n,T} = \lambda_{n,T_1}$. Vi kan og vil derfor antage, at $T = T_1$, d.v.s. at T er en lineær bijektion, og da $\lambda_{n,T} = \lambda_{n,T}(]0,1]^n) \cdot \lambda_n$

ifølge Lemma 16, mangler vi kun at vise, at konstanten $c_T := \lambda_{n,T}(]0,1]^n)$ er lig $1/|\det T|$. Dette er let, hvis T er en multiplikationsafbildning, d.v.s. på formen

$$T(\underline{x}) = (d_1 \cdot x_1, \dots, d_n \cdot x_n) \quad \text{for } \underline{x} = (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbf{R}^n,$$

hvor $d_1, \dots, d_n$ er givne strengt positive reelle tal. Thi her er

$$T^{-1}(]\,0,1]^n) = \prod_{i=1}^{n}]\,0, d_i^{-1}]$$

og dermed

$$c_T = \lambda_{n,T}(]\,0,1]^n) = \prod_{i=1}^{n} d_i^{-1} = \frac{1}{\det T} = \frac{1}{|\det T|}.$$

Beregningen af c_T for en generel lineær bijektion udnytter udover produktformlen

$$c_{T_1 \circ T_2} = c_{T_1} \cdot c_{T_2},$$

som let verificeres ved brug af reglerne for billedmål dannelse, at der ifølge teorien om positive selvadjungerede afbildninger til enhver lineær bijektion T findes en lineær isometri O og en multiplikationsafbildning D af ovennævnte type, så at

$$O^{-1} \circ T^* \circ T \circ O = D \;\text{ og dermed } T^* \circ T = A \circ A,$$

hvor $A := O \circ \sqrt{D} \circ O^{-1}$, og notationen $*$ betegner den adjungerede lineære afbildning. A er altså en selvadjungeret lineær bijektion og $c_A = c_{\sqrt{D}}$. Ifølge regneregler for determinanter gælder derfor, at

$$\det A = \det \sqrt{D} = \sqrt{\det D} = \sqrt{\det T^* \cdot \det T} = |\det T|,$$

og da $\lambda_{n,T} = c_T \cdot \lambda_n$ og $\lambda_{n,A} = c_A \cdot \lambda_n$ fås, idet $< \cdot, \cdot >$ er det indre produkt i $\mathbf{R}^n$,

$$c_T \int e^{-<x,x>} \lambda_n(dx) = \int e^{-<T(x),T(x)>} \lambda_n(dx) = \int e^{-<T^* \circ T(x),x>} \lambda_n(dx)$$

$$= \int e^{-<A \circ A(x),x>} \lambda_n(dx) = \int e^{-<A(x),A(x)>} \lambda_n(dx) = c_A \int e^{-<x,x>} \lambda_n(dx)$$

og dermed ved forkortning, da integralet er endeligt, at

$$c_T = c_A = c_{\sqrt{D}} = 1/\det \sqrt{D} = 1/|\det T|.$$

Proposition 20 er hermed vist. $\diamond$

Ved brug af Tonelli's Sætning ses umiddelbart, at

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-<x,x>} \lambda_n(dx) = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbf{R}} e^{-x_i^2} \lambda_1(dx_i) = \pi^{n/2},$$

og beregnes integralet ligeledes ved hjælp af integrationsformlen

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-<x,x>} \lambda_n(dx) = \int_0^\infty \lambda_n(e^{-<\cdot,\cdot>} > t)\, dt = \int_0^1 \lambda_n(b(\underline{0}, \sqrt{\log 1/t}))\, dt$$

fås ved hjælp af Proposition 20, at

$$\pi^{n/2} = \lambda_n(b(\underline{0}, 1)) \int_0^1 (\log 1/t)^{n/2}\, dt = \lambda_n(b(\underline{0}, 1)) \int_0^\infty x^{n/2} \cdot e^{-x}\, dx,$$

d.v.s. for alle $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ og alle $r > 0$ gælder

$$\lambda_n(b(\underline{x}, r)) = \lambda_n(b(\underline{0}, r)) = r^n \cdot \lambda_n(b(\underline{0}, 1)) = \frac{\pi^{n/2} \cdot r^n}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}\,.$$

Vi afslutter kapitlet med at formulere og bevise en meget vigtig udvidelse af den lineære transformationssætning. Resultatet kan generaliseres yderligere, se f.eks. Hoffmann's bind II for en mere generel udgave.

Sætning 13 Transformationssætningen.
Lad U og V betegne to åbne mængder i $\mathbf{R}^n$, og lad $T : U \to V$ være en bijektion af klasse C^1, hvorom det yderligere antages, at

$$|\det T'(x)| > 0 \quad \text{for alle } x \in U.$$

Idet S betegner T^{-1}, gælder flg. formel

$$\lambda_{U,T} \ll \lambda_V \quad \text{og} \quad \frac{d\lambda_{U,T}}{d\lambda_V}(\cdot) = |\det T'(S(\cdot))|^{-1},$$

hvor λ_U og λ_V betegner restriktionen af λ_n til h.h.v. U og V, og $\lambda_{U,T}$ er billedmålet af λ_U under afbildningen T. Udtrykt ved hjælp af integraler gælder altså

$$\int_U f(T(x))\, \lambda_n(dx) = \int_V \frac{f(y)}{|\det T'(S(y))|}\, \lambda_n(dy)$$

for alle $f \in \mathrm{M}(\mathcal{B}(\mathbf{R}^n))_+$.

Ifølge den såkaldte *open mapping theorem* er S af samme type som T, d.v.s. S er en bijektion af klasse C^1 af V på U og $|\det S'(y)| > 0$ for alle $y \in V$.

Bevis for sætningen. Vi skal vise, at

$$\lambda_{U,T}(B) = \int_B |\det T'(S(y))|^{-1}\, \lambda_V(dy) \quad \text{for alle } B \in \mathcal{B}(V).$$

Men ifølge symmetrien mellem S og T er det nok at vise $\leq$. Thi antag dette vist for enhver afbildning af nævnte type, d.v.s. specielt både for S og T.
For ethvert $A \in \mathcal{B}(U)$ har vi da

$$\lambda_U(A) = \lambda_{U,T}(S^{-1}(A)) \leq \int_{S^{-1}(A)} |\det T'(S(y))|^{-1}\, \lambda_V(dy)$$

$$= \int |\det T'(S(y))|^{-1} \cdot \mathbf{1}_A(S(y))\, \lambda_V(dy) = \int |\det T'(x)|^{-1} \cdot \mathbf{1}_A(x)\, \lambda_{V,S}(dx)$$

$$\leq \int |\det T'(x)|^{-1} \cdot \mathbf{1}_A(x) \cdot |\det S'(T(x))|^{-1}\, \lambda_U(dx)$$

$$= \int \mathbf{1}_A(x) \cdot |\det(S \circ T)'(x))|^{-1}\, \lambda_U(dx) = \lambda_U(A),$$

d.v.s. der må gælde lighedstegn hele vejen. Opgaven består derfor i at vise, at

$$\lambda_{U,T}(B) \leq \int_B |\det T'(S(y))|^{-1}\, \lambda_V(dy) \quad \text{for alle } B \in \mathcal{B}(V).$$

Da begge sider definerer mål, som er endelige på enhver lukket begrænset mængde K indeholdt i V, viser resultatet angående ydre regularitet af Borel mål, at det er tilstrækkeligt at betragte åbne mængder, d.v.s. vise, at

$$\lambda_{U,T}(O) \leq \int_O |\det T'(S(y))|^{-1}\, \lambda_V(dy) \quad \text{for alle } O \subseteq V \text{ åben.}$$

Men enhver sådan åben delmængde af V kan skrives som en tællelig disjunkt foreningsmængde af akseparallelle dyadiske kasser, og beviset er derfor ført, hvis vi for enhver akseparallel dyadisk kasse $D_{i_0,k_0} \subseteq V$ viser, at

$$\lambda_{U,T}(D_{i_0,k_0}) \leq \int_{D_{i_0,k_0}} |\det T'(S(y))|^{-1}\, \lambda_V(dy).$$

Lad D_{i_0,k_0} være valgt. For ethvert $k \geq k_0$ er

$$D_{i_0,k_0} = \bigcup_{i\colon (i,k) \in J(i_0,k_0)} D_{i,k}$$

hvor $J(i_0,k_0) = \{(i,k) \,|\, D_{i,k} \subseteq D_{i_0,k_0}\}$, og de indgående kasser er disjunkte. Definer nu for $k \geq k_0$

$$f_k := \sum_{i\colon (i,k) \in J(i_0,k_0)} \frac{\lambda_{U,T}(D_{i,k})}{\lambda_V(D_{i,k})} \cdot \mathbf{1}_{D_{i,k}}.$$

Bemærk at

$$\lambda_{U,T}(D_{i_0,k_0}) = \int_{D_{i_0,k_0}} f_k \, d\lambda_V \quad \text{for alle } k \geq k_0.$$

Vi ønsker at vise, at $\lim_k f_k$ eksisterer i $L^2(\lambda_V)$. Men da $f_l \perp (f_{k+1} - f_k)$ pr. konstruktion for alle $k_0 \leq l \leq k$ vides fra korollaret til Lemma 13, at det er tilstrækkeligt at vise, at $\{f_k \,|\, k \geq k_0\}$ udgør en begrænset delmængde af $L^2(\lambda_V)$. Hertil får vi brug for flg. vurderinger.

Lad for ethvert i og k $y_{i,k}$ betegne 'centrum' i kassen $D_{i,k}$. Da T er kontinuert differentiabel, findes der en følge af ikke-negative reelle tal (ϵ_k), som konvergerer mod 0, så at

$$|T(S(y)) - T(S(y_{i,k})) - T'(S(y_{i,k})) \cdot (S(y) - S(y_{i,k}))| \leq \epsilon_k \cdot |y - y_{i,k}|$$

for alle (i,k) i $J(i_0,k_0)$ og alle $y \in D_{i,k}$. D.v.s. da $S = T^{-1}$, at

$$T^{-1}(D_{i,k}) = S(D_{i,k}) \subseteq T_{i,k}^{-1}(D_{i,k} + c_n \cdot \epsilon_k \cdot 2^{-k} \cdot K),$$

hvor c_n er en konstant, som kun afhænger af n, K terningen $]-1/2, 1/2]^n$ og $T_{i,k}$ afbildningen fra $\mathbf{R}^n$ ind i sig selv givet ved

$$T_{i,k}(x) := T(S(y_{i,k})) + T'(S(y_{i,k})) \cdot (x - S(y_{i,k})).$$

Bemærk at $T_{i,k}$'erne er afbildninger af den type, som indgik i Proposition 20. Benyttes nu dette resultat, fås for ethvert $(i,k) \in J(i_0,k_0)$ vurderingen

$$\lambda_{U,T}(D_{i,k})/\lambda_V(D_{i,k}) \leq \lambda_{n,T_{i,k}}(D_{i,k} + \epsilon_k \cdot 2^{-k} \cdot K)/2^{-nk}$$

$$\leq |\det T'(S(y_{i,k}))|^{-1} \cdot (2^{-k} + c_n \cdot \epsilon_k \cdot 2^{-k})^n \cdot 2^{nk}.$$

D.v.s. for alle $k \geq k_0$ gælder uligheden

$$f_k \leq \sum_{i:\,(i,k) \in J(i_0,k_0)} (1 + c_n \cdot \epsilon_k)^n \cdot |\det T'(S(y_{i,k}))|^{-1} \cdot \mathbf{1}_{D_{i,k}},$$

og derfor $f_k \leq c \cdot \mathbf{1}_{D_{i_0,k_0}}$ for alle $k \geq k_0$ for en konstant c. Følgen $(f_k)_{k \geq k_0}$ er altså begrænset og dermed konvergent i $L^2(\lambda_V)$ med grænseværdi f_∞.
Ifølge Proposition 10 findes der en delfølge $(f_{n_k})_{k \geq 1}$, som konvergerer λ_V-n.o. mod f_∞, og lader vi $k \to \infty$ i ovenstående ulighed samt udnytter at $\epsilon_k \to 0$ tillige med kontinuiteten af

$$y \mapsto |\det T'(S(y))|^{-1},$$

fås at

$$f_\infty \leq |\det T'(S(\cdot))|^{-1} \cdot \mathbf{1}_{D_{i_0,k_0}} \quad \lambda_V\text{-n.o.}$$

Men som tidligere vist, er skalarproduktet i $L^2(\lambda_V)$ kontinuert, d.v.s.

$$\int_{D_{i_0,k_0}} f_\infty \, d\lambda_V = \int f_\infty \cdot \mathbf{1}_{D_{i_0,k_0}} \, d\lambda_V = \lim_k \int f_k \cdot \mathbf{1}_{D_{i_0,k_0}} \, d\lambda_V = \lambda_{U,T}(D_{i_0,k_0})$$

og derfor

$$\lambda_{U,T}(D_{i_0,k_0}) \leq \int_{D_{i_0,k_0}} |\det T'(S(y))|^{-1} \, \lambda_V(dy).$$

Sætningen er hermed vist. ◇