

#### 4.18 Characteristic Functions

For ethvert Borel sandsynlighedsmål  $\mu$  på  $\mathbf{R}$  er  $x \mapsto e^{itx} \in L^1(\mu, \mathbf{C})$  for alle  $t \in \mathbf{R}$ , d.v.s.

$$\hat{\mu}(t) := \int e^{itx} \mu(dx) \quad t \in \mathbf{R}$$

er en vel defineret funktion på  $\mathbf{R}$  med komplekse værdier.  $\hat{\mu}$  kaldes den *Fourier transformerede* af  $\mu$ . Tilsvarende defineres for et Borel sandsynlighedsmål  $\nu$  på  $\mathbf{R}^n$  den Fourier transformerede af  $\nu$  som

$$\underline{t} \mapsto \hat{\nu}(\underline{t}) := \int e^{i\underline{t} \cdot \underline{x}} \nu(d\underline{x}) \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^n,$$

hvor  $\underline{t} \cdot \underline{x} = \sum_{j=1}^n t_j \cdot x_j$  er det sædvanlige skalarprodukt i  $\mathbf{R}^n$ .

Integralets linearitet og kontinuitet på  $L^1(\mu, \mathbf{C})$  sikrer at

**Kf1**  $|\hat{\mu}(\underline{t})| \leq \hat{\mu}(\underline{0}) = 1 \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^n,$

**Kf2**  $\underline{t} \mapsto \hat{\nu}(\underline{t})$  er kontinuert,

**Kf3**  $\hat{\mu}(-\underline{t}) = \overline{\hat{\mu}(\underline{t})} \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^n$

for ethvert Borel sandsynlighedsmål  $\mu$  på  $\mathbf{R}^n$ . Endvidere viser Fubini's Sætning, at hvis  $\mu$  og  $\nu$  er Borel sandsynlighedsmål på h.h.v.  $\mathbf{R}^n$  og  $\mathbf{R}^m$ , så er

**Kf4**

$$\int_{\mathbf{R}^m} \hat{\mu}(\underline{s}) \nu(d\underline{s}) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\nu}(\underline{t}) \mu(d\underline{t})$$

og

**Kf5** Den Fourier transformerede af  $\mu \otimes \nu$  er givet ved

$$(\underline{t}, \underline{s}) \mapsto \hat{\mu}(\underline{t}) \cdot \hat{\nu}(\underline{s}) \quad (\underline{t}, \underline{s}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n+m}.$$

Via fordelingsmålet overføres dette til stokastiske variable og vektorer, idet vi til enhver stokastisk variabel  $X$  eller mere generelt en stokastisk vektor  $\underline{X}$  tilordner den såkaldte *karaktéristiske funktion*  $\varphi_X$  h.h.v.  $\varphi_{\underline{X}}$  defineret ved

$$\varphi_X := \hat{P}_X \quad \text{og} \quad \varphi_{\underline{X}} := \hat{P}_{\underline{X}}.$$

Ifølge den lille transformationssætning gælder altså

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{og} \quad \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = E[e^{i\underline{t} \cdot \underline{X}}] \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Oversættes ovenstående egenskaber til karakteristiske funktioner fås for enhver  $n$ -dimensional stokastisk vektor  $\underline{X}$

**Kf1**  $|\varphi_{\underline{X}}(\underline{t})| \leq \varphi_{\underline{X}}(\underline{0}) = 1 \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^n.$

**Kf2**  $\underline{t} \mapsto \varphi_{\underline{X}}(\underline{t})$  er kontinuert.

**Kf3**  $\varphi_{\underline{X}}(-\underline{t}) = \overline{\varphi_{\underline{X}}(\underline{t})} = \varphi_{-\underline{X}}(\underline{t}) \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^n$  og mere generelt

$$\varphi_{\underline{A}\underline{X}+\underline{b}}(\underline{t}) = e^{i\underline{t}\cdot\underline{b}} \cdot \varphi_{\underline{X}}(\underline{A}^t\underline{t}) \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^m$$

hvor  $\underline{b} \in \mathbf{R}^m$  og  $\underline{A}$  en  $m \times n$  matrice og  $\underline{A}^t$  den tilhørende transponerede matrice. Betegner  $\underline{X}$  og  $\underline{Y}$  en h.h.v.  $n$  og  $m$ -dimensional stokastisk vektor kan Kf4 og Kf5 oversættes til lighederne

**Kf4**  $E[\varphi_{\underline{X}}(\underline{Y})] = E[\varphi_{\underline{Y}}(\underline{X})]$ .

**Kf5** Hvis  $\underline{X}$  og  $\underline{Y}$  er uafhængige, er

$$\varphi_{(\underline{X},\underline{Y})}(\underline{t},\underline{s}) = \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) \cdot \varphi_{\underline{Y}}(\underline{s}) \quad (\underline{t},\underline{s}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m,$$

samt hvis  $n = m$

$$\varphi_{\underline{X}+\underline{Y}}(\underline{t}) = \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) \cdot \varphi_{\underline{Y}}(\underline{t}) \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Udover disse mere eller mindre trivielle egenskaber gælder flg. meget vigtige entydighedssætning.

**Entydighedssætningen for karakteristiske funktioner.**

*Ethvert Borel sandsynlighedsmål  $\mu$  på  $\mathbf{R}^n$  er bestemt ved  $\hat{\mu}$ , d.v.s. for enhver  $n$ -dimensional stokastisk vektor  $\underline{X}$  bestemmer  $\varphi_{\underline{X}}$  fordelingen for  $\underline{X}$ . Eller ækvivalent*

$$\mu = \nu \Leftrightarrow \hat{\mu} = \hat{\nu} \quad \text{og} \quad \underline{X} \sim \underline{Y} \Leftrightarrow \varphi_{\underline{X}} = \varphi_{\underline{Y}},$$

hvor  $\mu$  og  $\nu$  er Borel sandsynlighedsmål på  $\mathbf{R}^n$  og  $\underline{X}$  og  $\underline{Y}$   $n$ -dimensionale stokastiske vektorer.

Bevis. Vi behandler kun det 1-dimensionale tilfælde, men beviset generaliserer ordret til højere dimensioner, hvis vi udnytter, at et endeligt Borel mål i  $\mathbf{R}^n$  er bestemt ved dets værdier på Euklidiske kugler.

Som vist i tillægget til sektion 3.40 er et givent sandsynlighedsmål  $\mu$  på  $\mathbf{R}$  bestemt ved tallene

$$\int e^{-n(x-a)^2} \mu(dx) \quad n \geq 1, a \in \mathbf{R}.$$

Men for  $a, c \in \mathbf{R}$  afhænger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(ct) e^{-icta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt,$$

kun af  $\hat{\mu}$ , og ifølge Fubini's Sætning er

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(ct) e^{-icta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ictx} e^{-icta} \mu(dx) \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ict(x-a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \right\} \mu(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2(x-a)^2/2} \mu(dx) \end{aligned}$$

Ved nu at sætte  $c = \sqrt{2n}$  ses specielt, at  $\hat{\mu}$  bestemmer tallene

$$\int e^{-n(x-a)^2} \mu(dx) \quad n \geq 1, a \in \mathbf{R}$$

og dermed  $\mu$ . ◇

Bemærk at Entydighedssætningen ifølge Kf3 kan skærpes til

$$X \sim Y \Leftrightarrow \varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \text{ for alle } t \geq 0.$$

Advarsel. Der findes stokastiske variable  $X$  og  $Y$ , som ikke er identisk fordelte, men hvor  $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$  for alle  $t$  i et åbent interval omkring 0.

Kædes Entydighedssætningen sammen med Kf5 fås flg. uafhængighedskriterium. Resultatet gælder uændret for stokastiske vektorer. Se formel (4.18.11).

**Kf6** Stokastiske variable  $X_1, \dots, X_n$  er uafhængige hvis og kun hvis

$$\varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(\underline{t}) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k) \text{ for alle } \underline{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Da en funktion  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  er differentiabel, hvis og kun hvis  $\Re f$  og  $\Im f$  er differentiable, og der i givet fald gælder

$$d/dt f(t) = d/dt \Re f(t) + i \cdot d/dt \Im f(t),$$

følger formel (4.18.13), som viser en sammenhæng mellem eksistens af momenter og differentiabilitet af den karakteristiske funktion, let af reglerne for differentiation af et integral afhængig af en reel parameter. Der gælder nemlig flg. udsagn for enhver stokastisk variabel  $X$  og ethvert  $n \geq 1$ . Beviset overlades til læseren. Det er værd at bemærke, at der findes variable uden endelig middelværdi, hvis karakteristiske funktion er differentiabel overalt.

**Kf7** Hvis  $E[|X|^n] < \infty$  er  $t \mapsto \varphi_X(t)$   $n$ -gange differentiabel, og for  $k = 1, \dots, n$  er

$$\varphi_X^{(k)}(a) = i^k \cdot E[X^k e^{iaX}] \text{ for } a \in \mathbf{R}, \text{ specielt } \varphi_X^{(k)}(0) = i^k \cdot E[X^k].$$

Rækkeudviklinger af den karakteristiske funktion kan nu udledes. Dette bygger på egenskaber ved funktionen  $t \mapsto e^{it}$ , blandt andet den simple men basale ulighed

$$|e^{it} - e^{is}| \leq 2 \wedge |t - s| \quad t, s \in \mathbf{R},$$

som for  $s = 0$  giver  $|e^{it} - 1| \leq 2 \wedge |t|$  for  $t \in \mathbf{R}$ . For  $n \geq 0$  har vi en Taylorudvikling af  $n$ -te grad, hvor restleddet er defineret, så at ligheden holder, d.v.s.

$$e^{it} = \sum_{k=0}^n \frac{i^k t^k}{k!} + r_n(t) \quad t \in \mathbf{R}. \quad (\text{Bemærk at } r_n(-t) = \overline{r_n(t)})$$

Der gælder her flg. restledsvurderinger.

**Kf 8**

$$|r_n(t)| \leq \frac{2|t|^n}{n!} \wedge \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \quad n \geq 0, t \in \mathbf{R}.$$

Bevis. Da  $|r_n(-t)| = |\overline{r_n(t)}| = |r_n(t)|$  behøver vi kun at se på positive  $t$ . Vi vil benytte induktion efter  $n$ . Da

$$|r_0(t)| = |e^{it} - 1| = |e^{it} - e^{i0}| \leq 2 \wedge |t| \quad \text{for alle } t,$$

holder uligheden for  $n = 0$ . Lad  $t \geq 0$  være givet. Integreres Taylorapproximationen af orden  $n$  fra 0 til  $t$  fås efter multiplikation med  $i$

$$\begin{aligned} e^{it} - 1 &= i \int_0^t e^{is} ds = i \int_0^t \sum_{k=0}^n \frac{i^k s^k}{k!} ds + i \int_0^t r_n(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{i^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} + i \int_0^t r_n(s) ds = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{i^k t^k}{k!} + i \int_0^t r_n(s) ds. \end{aligned}$$

Pr. definition af restleddet  $r_{n+1}$  giver dette derfor sammenhængen

$$r_{n+1}(t) = i \int_0^t r_n(s) ds \quad \text{og dermed } |r_{n+1}(t)| \leq \int_0^t |r_n(s)| ds,$$

hvoraf induktionsskridtet umiddelbart følger. ◇

For  $n$  lig 1 og 2 gælder altså

$$|e^{it} - 1 - it|/2 \leq |t| \wedge \frac{|t|^2}{4} \quad \text{og} \quad |e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2}| \leq |t|^2 \wedge \frac{|t|^3}{6}$$

for alle  $t \in \mathbf{R}$ , og dermed for alle  $\alpha \in [2, 3]$  uligheden

$$|e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2}| \leq |t|^\alpha \quad \text{for } t \in \mathbf{R}.$$

Da  $e^{itx} = e^{iax} \cdot e^{i(t-a)x}$  fås af det ovenstående for ethvert  $n \geq 0$  en  $n$ -te ordens Taylorapproximation af typen

$$e^{itx} = \sum_{k=0}^n \frac{i^k x^k e^{iax}}{k!} (t-a)^k + \tilde{r}_n(t, x, a) \quad x, t, a \in \mathbf{R},$$

hvor  $\tilde{r}_n(t, x, a) := e^{iax} \cdot r_n((t-a)x)$  med tilhørende restledsvurdering

$$|\tilde{r}_n(t, x, a)| \leq \frac{2|(t-a)x|^n}{n!} \wedge \frac{|(t-a)x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad n \geq 0, x, t, a \in \mathbf{R}.$$

Substitueres  $x$  med  $X$  og tages middelværdi på begge sider fremkommer under antagelsen om endeligt  $n$ 'te moment formel (4.18.14), d.v.s.

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{E[i^k X^k e^{iaX}]}{k!} (t-a)^k + E[\tilde{r}_n(t, X, a)] = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi_X^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + R_n(t, a)$$

for  $n \geq 0$  og  $t, a \in \mathbf{R}$ , hvor  $R_n(t, a) := E[\tilde{r}_n(t, X, a)]$ . Specielt fås for  $a = 0$  ifølge Kf7 formel (4.18.17), d.v.s.

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{i^k \cdot E[X^k]}{k!} t^k + R_n(t, 0).$$

Vurderingerne på  $\tilde{r}_n$  oversættes umiddelbart til  $R_n$ , idet vi for  $n \geq 0$  og  $t, a \in \mathbf{R}$  har

$$|R_n(t, a)| \leq \frac{|t-a|^n}{n!} \cdot E[|X|^n \cdot \left(2 \wedge \frac{|(t-a) \cdot X|}{n+1}\right)] \leq \frac{2|t-a|^n}{n!} \cdot E[|X|^n].$$

Hvis  $E[|X|^n] < \infty$  fås derfor for alle  $a$  af Lebesgue's sætning, at

$$\lim_{t \rightarrow a} E[|X|^n \cdot \left(2 \wedge \frac{|(t-a) \cdot X|}{n+1}\right)] = 0,$$

og dermed implikationen

$$E[|X|^n] < \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} \frac{R_n(t, a)}{(t-a)^n} = 0.$$

For  $n = 2$  og  $a = 0$  viser dette specielt, at

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \varphi_X(t)}{t^2} = \sigma^2/2,$$

hvis  $E[X] = 0$  og  $Var(X) = \sigma^2$ . For  $\alpha \in [2, 3]$  og  $x, t \in \mathbf{R}$  gælder som ovenfor nævnt

$$\left| e^{itx} - 1 - itx + \frac{(tx)^2}{2} \right| \leq |tx|^\alpha.$$

D.v.s. substitueres igen  $x$  med  $X$  og tages middelværdi fås, hvis  $X$  har endelig andet moment, uligheden

$$|\varphi_X(t) - 1 - it \cdot E[X] + t^2/2 \cdot E[X^2]| \leq |t|^\alpha \cdot E[|X|^\alpha]$$

for  $\alpha \in [2, 3]$  og  $t \in \mathbf{R}$ . Uligheden, der benyttes i beviset for Lyapounov's Sætning, kan opfattes som en generalisation af formel (4.18.17).

Ovenstående vurderinger af  $|R_n(a, t)|$  viser endvidere, at hvis  $X$  har momenter af enhver orden, og der findes et  $\rho > 0$ , så at

$$\lim_n \rho^n \cdot E[|X|^n]/n! = 0,$$

så kan  $\varphi_X$  omkring ethvert punkt  $a$  skrives som summen af en uendelig Talyor-række med udgangspunkt  $a$  og konvergensradius  $\geq \rho$ .

### Momentproblemet.

Lad  $X$  betegne en stokastisk variabel med momenter af enhver orden. *Momentfølgen*  $(E[X^n])_{n \geq 1}$  er derfor en vel defineret reel talfølge bestemt ved fordelingen, og spørgsmålet om, den omvendt bestemmer fordelingen entydigt, er kendt under navnet *Momentproblemet*. Ifølge tillægget til Sektion 3.40 gælder det for begrænsede stokastiske variable, men da eksempler viser, at momentfølgen ikke altid bestemmer fordelingen entydigt, er det naturligt interessant at vide, hvornår det er tilfældet. En simpel men dog brugbar tilstrækkelig betingelse siger, at momentfølgen

$$(E[X^n])_{n \geq 1} \text{ bestemmer } P_X \text{ hvis } E[e^{\rho|X|}] < \infty \text{ for et } \rho > 0.$$

Betingelsen, som benævnes (\*), holder oplagt, hvis  $X$  er begrænset, d.v.s. hvis  $P(|X| \leq M) = 1$  for et  $M \in \mathbf{R}_+$ . Da

$$E[e^{r|X|}] = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot E[|X|^n]/n! \quad \text{for alle } r > 0$$

ifølge monoton konvergens, er (\*) ifølge potensrækketeori ækvivalent med, at

$$\limsup_n (E[|X|^n]/n!)^{1/n} < \infty \quad \text{d.v.s. } \exists c \in \mathbf{R}_+ : E[|X|^n] \leq c^n \cdot n! \quad n \geq 1.$$

Bevis for at (\*) er tilstrækkelig. Antag (\*) holder, d.v.s. specielt, at

$$\lim_n \rho^n \cdot E[|X|^n]/n! = 0.$$

Ifølge bemærkningen nederst på foregående side kan  $\varphi_X$  derfor rækkeudvikles omkring ethvert punkt  $a$  med en konvergensradius, som er mindst  $\rho$ . Heraf kan resultatet nu vises, thi ved først at rækkeudvikle omkring 0 ses, at  $(E[X^n])_{n \geq 1}$  bestemmer  $\varphi_X$  og dermed alle dens afledede i intervallet  $] -\rho, \rho[$ . Ved fornyet rækkeudvikling omkring punkter tæt ved  $\rho$  og  $-\rho$  ses derfor, at dette også gælder i intervallet  $] -2\rho, 2\rho[$ . Sådan fortsættes og vi ser, at momentfølgen alt i alt bestemmer  $\varphi_X$  og dermed ifølge Entydighedssætningen fordelingsmålet  $P_X$ .  $\diamond$

(\*) er en betingelse på de absolutte momenter, men der gælder flg. resultat.

**Mp 1** *Lad  $X$  og  $Y$  være stokastiske variable med momenter af enhver orden, så at  $E[X^k] = E[Y^k]$  for alle  $k \geq 1$ . Da holder (\*) for  $X$ , hvis og kun hvis (\*) holder for  $Y$ ; og i givet fald er  $X$  og  $Y$  derfor identisk fordelte.*

Bevis. Antag at  $X$  opfylder (\*), d.v.s.  $\exists c \in \mathbf{R}_+ : E[|X|^n] \leq c^n \cdot n! \quad n \geq 1$ . Ifølge Cauchy-Schwarz's gælder derfor

$$E[|Y|^n] \leq \sqrt{E[Y^{2n}]} = \sqrt{E[X^{2n}]} \leq \sqrt{c^{2n} \cdot (2n)!} = c^n \cdot \sqrt{(2n)!}.$$

Men da  $\sqrt{(2n)!} \leq 2^n \cdot n!$  for alle  $n$  ses, at  $Y$  også opfylder (\*).  $\diamond$

Lad stadig  $X$  betegne en given stokastisk variabel. Da

$$e^{aX} \vee e^{-aX} \leq e^{|aX|} \leq e^{aX} + e^{-aX} \quad \text{for alle } a > 0,$$

følger det umiddelbart af sætningen om Monoton konvergens, at hvis vi med  $\mathcal{R}(L_X)$  betegner mængden  $\{t \in \mathbf{R} \mid E[e^{tX}] < \infty\}$ , så gælder biimplikationen

$$X \text{ opfylder } (*) \Leftrightarrow \mathcal{R}(L_X) \text{ indeholder et åbent interval omkring } 0.$$

$\mathcal{R}(L_X)$  er altid et interval indeholdende 0, men det kan bestå af 0 alene eller have 0 som enten venstre eller højre endepunkt. Definer

$$M_X(t) := E[e^{tX}] \quad \text{for } t \in \mathcal{R}(L_X).$$

$M_X(\cdot)$  kaldes ofte den *momentfrembringende funktion*. Begrundelsen for dette er klar ud fra det ovenstående, thi hvis  $\mathcal{R}(L_X)$  indeholder et åbent interval af formen  $] -\epsilon, \epsilon [$ , så har  $X$  momenter af enhver orden og

$$M_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[X^n]}{n!} \cdot t^n \quad \text{for } |t| < \epsilon.$$

Ifølge potensrækketeori er  $t \mapsto M_X(t)$  derfor uendelig ofte differentiabel i 0 med

$$M_X^{(n)}(0) = E[X^n] \quad n \geq 1.$$

Heraf slutes umiddelbart flg. resultat.

**Mp 2** *Stokastiske variable  $X$  og  $Y$  er identisk fordelte, hvis  $M_X(t) = M_Y(t) < \infty$  for alle  $t$  i et åbent interval omkring 0.*

Bemærkning. Da momenterne er bestemt som afledede i punktet 0, kan man forholdsvis nemt vise, at det er nok, at  $\mathcal{R}(L_X)$  og  $\mathcal{R}(L_Y)$  begge indeholder et åbent interval omkring 0, og  $M_X(t_n) = M_Y(t_n)$  for en følge  $(t_n)_{n \geq 1}$ , som konvergerer mod 0.

Et såkaldt 'målskifte' argument viser, at resultatet gælder uændret, uanset hvilket interval der er tale om.

'Bevis'. Antag  $M_X(t) = M_Y(t) < \infty$  for alle  $t \in ]\lambda_1, \lambda_2 [$ , hvor  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Lad for et  $\lambda_0 \in ]\lambda_1, \lambda_2 [$   $Q_X$  og  $Q_Y$  betegne sandsynlighedsmålene på  $(\Omega, \mathcal{F})$  givet ved

$$Q_X := e^{\lambda_0 X} / a dP \quad \text{og} \quad Q_Y := e^{\lambda_0 Y} / a dP, \quad \text{hvor } a = E[e^{\lambda_0 X}] = E[e^{\lambda_0 Y}],$$

og lad  $M_X^Q$  og  $M_Y^Q$  betegne de momentfrembringende funktioner for  $X$  under  $Q_X$  og  $Y$  under  $Q_Y$ . Reglerne for integration med hensyn til afledte mål viser, at  $M_X^Q$  og  $M_Y^Q$  er endelige og ens i intervallet  $]\lambda_1 - \lambda_0, \lambda_2 - \lambda_0 [$ , og da dette interval indeholder 0, følger af det netop viste, at  $Q_X \circ X^{-1} = Q_Y \circ Y^{-1}$ . Specielt er

$$E[f(X) \cdot e^{\lambda_0 X}] = a \cdot E^{Q_X}[f(X)] = a \cdot E^{Q_Y}[f(Y)] = E[f(Y) \cdot e^{\lambda_0 Y}]$$

og dermed  $E[f(X)] = E[f(Y)]$  for alle kontinuerte funktioner  $f$  med kompakt støtte, hvilket kun er muligt, hvis  $X$  og  $Y$  har samme fordeling.  $\diamond$

### Den flerdimensionale normalfordeling.

Som en simpel konsekvens af entydighedssætningen og regneregler for karakteristiske funktioner genfinder vi flg. vel kendte egenskaber ved klassen af endimensionale normalfordelinger.

Hvis  $X_1, \dots, X_n$  er uafhængige normalfordelte stokastiske variable, er  $\sum_{i=1}^n a_i X_i$  igen normalfordelt for ethvert valg af reelle konstanter  $a_1, \dots, a_n$ .

Med udgangspunkt heri indføres flg. definition.

**Definition.** En  $n$ -dimensional stokastisk vektor  $\underline{X}$  siges at være  $n$ -dimensional normalfordelt, hvis

$$\underline{t} \cdot \underline{X} := \sum_{i=1}^n t_i X_i$$

er en normalfordelt stokastisk variabel for alle  $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ .

Vælges  $\underline{t}$  som en passende enhedsvektor ses, at koordinatvariablene i en flerdimensional normalfordeling  $\underline{X}$  alle er endimensionale normalfordelinger, d.v.s. de har både middelværdi og varians. Middelværdivektoren og kovariansmatricen

$$\underline{\mu}_X := (E[X_1], \dots, E[X_n]) \quad \text{og} \quad \underline{\sigma}_X := \{Cov(X_i, X_j)\}_{1 \leq i, j \leq n}$$

er derfor vel definerede, og ligesom i det endimensionale tilfælde er en  $n$ -dimensional normalfordeling bestemt ved sin tilhørende middelværdivektor og kovariansmatrice. Der gælder nemlig flg. resultat.

**N 1** Hvis  $\underline{X}$  og  $\underline{Y}$  er  $n$ -dimensional normalfordelt med  $\underline{\mu}_X = \underline{\mu}_Y$  og  $\underline{\sigma}_X = \underline{\sigma}_Y$ , så er  $\varphi_X = \varphi_Y$ , d.v.s.  $\underline{X}$  og  $\underline{Y}$  er identiske fordelte.

Bevis. Lad  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$  være givet. Da  $\underline{t} \cdot \underline{X}$  og  $\underline{t} \cdot \underline{Y}$  begge er normalfordelte, er de identisk fordelte, da de har samme middelværdi og varians, idet

$$E[\underline{t} \cdot \underline{X}] = \underline{t} \cdot \underline{\mu}_X \quad \text{og} \quad Var(\underline{t} \cdot \underline{X}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} t_i \underline{\sigma}_X(i, j) t_j = \underline{t} \cdot \underline{\sigma}_X \cdot \underline{t}^*$$

og tilsvarende  $E[\underline{t} \cdot \underline{Y}] = \underline{t} \cdot \underline{\mu}_Y$  og  $Var(\underline{t} \cdot \underline{Y}) = \underline{t} \cdot \underline{\sigma}_Y \cdot \underline{t}^*$ . D.v.s. for  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$  er

$$\varphi_X(\underline{t}) = E[\exp(i(\underline{t} \cdot \underline{X}))] = E[\exp(i(\underline{t} \cdot \underline{Y}))] = \varphi_Y(\underline{t}),$$

og ifølge entydighedssætningen er  $\underline{X}$  og  $\underline{Y}$  derfor identisk fordelte. ◇

Det har altså mening, at tale om den  $n$ -dimensionale normalfordeling med middelværdi vektor  $\underline{\mu}$  og kovariansmatrice  $\underline{\sigma}$ , og vi vil i denne forbindelse skrive

$$\underline{X} \sim N_n(\underline{\mu}, \underline{\sigma}),$$

hvis  $\underline{X}$  er  $n$ -dimensional normalfordelt med  $\underline{\mu}_X = \underline{\mu}$  og  $\underline{\sigma}_X = \underline{\sigma}$ .

Flg. vigtige egenskaber ved flerdimensionale normalfordelinger er nu åbenbare.

Som det er sædvanen bruges samme notation for den lineære afbildning og den tilhørende matrice udregnet i h.h.t. den kanoniske basis.

**N 2** Klassen af flerdimensionale normalfordelinger er stabil under affine transformationer, d.v.s. hvis  $\underline{X} \sim N_n(\underline{\mu}, \underline{\sigma})$  og  $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  lineær, så er

$$\underline{Y} := \underline{y} + T(\underline{X}) \sim N_m(\underline{y} + T(\underline{\mu}), T \circ \underline{\sigma} \circ T^*)$$

for ethvert  $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$ . Specielt er  $\underline{Y} \sim N_m(\underline{y}, T \circ T^*)$ , hvis  $\underline{X} \sim N_n(\underline{0}, \underline{I}_n)$ .

Bevis. Da enhver linearkombination af koordinaterne i  $\underline{Y}$  er en affin linearkombination af koordinaterne i  $\underline{X}$ , er  $\underline{Y}$   $m$ -dimensionalt normalfordelt. Resten følger nu ved beregning af den tilhørende middelværdivektor og kovariansmatrice.  $\diamond$

Sammenholdes regnerierne ovenfor med entydighedssætningen fås umiddelbar flg. karakterisation af den  $n$ -dimensionale normalfordeling.

**N 3**

$$\underline{X} \sim N_n(\underline{\mu}, \underline{\sigma}) \Leftrightarrow \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \exp\left(i(\underline{t} \cdot \underline{\mu}) - 1/2 \cdot \underline{t} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{t}^*\right) \quad \underline{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Denne karakterisation gør det nu let at vise, at uafhængighed og ukorelletethed er det samme for simultant normal fordelte variable. For ved gentagen anvendelse af Kf 6, d.v.s. ækvivalensen mellem uafhængighed og faktorisering af den karakteristiske funktion, ses flg. resultat at holde. Detaljerne overlades til læseren.

**N 4** Hvis  $\underline{Z}$  er en flerdimensional normalfordelt stokastisk vektor, er vilkårlige marginaler  $(Z_{n_1}, \dots, Z_{n_k})$  og  $(Z_{m_1}, \dots, Z_{m_l})$  uafhængige hvis og kun hvis

$$\text{Cov}(Z_{n_i}, Z_{m_j}) = 0 \quad \text{for alle } i = 1, \dots, k \text{ og } j = 1, \dots, l.$$

Hvis  $\underline{X} \sim N_n(\underline{\mu}_1, \underline{\sigma}_1)$  og  $\underline{Y} \sim N_m(\underline{\mu}_2, \underline{\sigma}_2)$  er uafhængige, er  $(\underline{X}, \underline{Y}) \sim N_{n+m}(\underline{\mu}, \underline{\sigma})$ , hvor

$$\underline{\mu} = (\underline{\mu}_1, \underline{\mu}_2) \quad \text{og} \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\sigma}_2 \end{pmatrix}.$$

**Korollar**  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim N_n(\underline{0}, \underline{I}^n)$  hvis og kun hvis  $X_1, \dots, X_n$  er uafhængige  $N(0, 1)$ -fordelte stokastiske variable. ( $\underline{I}^n$  betegner her  $n \times n$  enhedsmatricen.)

Ikke alle men dog de vigtigste flerdimensionale normalfordelinger er absolut kontinuerte. Mere præcist gælder.

**N 5**  $\underline{X} \sim N_n(\underline{\mu}, \underline{\sigma})$  er absolut kontinuert, hvis og kun hvis  $\underline{\sigma}$  er invertibel, og i givet fald er en tæthed givet ved

$$\underline{x} \mapsto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \underline{\sigma}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - \mu_i) \underline{\sigma}^{-1}(i, j) (x_j - \mu_j)\right) \quad \underline{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Bevis. Hvis  $\underline{\sigma}$  ikke er invertibel, findes der et  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ , så at

$$\text{Var}(\underline{t} \cdot \underline{X}) = \underline{t} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{t}^t = 0.$$

Der findes derfor en konstant  $c \in \mathbf{R}$ , så  $\underline{t} \cdot \underline{X} = c$   $P$ -n.o. D.v.s.

$$P(\underline{X} \in A(\underline{t}, c)) = 1, \quad \text{hvor } A(\underline{t}, c) = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n \mid \underline{t} \cdot \underline{x} = c\},$$

hvilket er uforeneligt med absolut kontinuitet, da ethvert ægte affint underum i  $\mathbf{R}^n$  har Lebesgue mål 0.

Hvis omvendt  $\underline{\sigma}$  er invertibel, kan den ifølge vel kendt teori skrives på formen

$$\underline{\sigma} = T \cdot \underline{I}^n \cdot T^t \quad \text{for } T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ lineær bijektion.}$$

D.v.s. ifølge N 2

$$\underline{X} \sim \underline{\mu} + T(\underline{U}) \quad \text{hvor } \underline{U} \sim N_n(0, \underline{I}^n).$$

Resten følger nu som tidligere vist af den lineære transformationssætning, da koordinatvariablene  $U_1, \dots, U_n$  i  $\underline{U}$  er uafhængige  $N(0, 1)$ -variable, og  $\underline{U}$  derfor har tæthed

$$\underline{x} \mapsto (2\pi)^{-n/2} \exp(-\|\underline{x}\|^2/2) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right). \quad \diamond$$

## 2.18 Maximal Inequalities for Subadditive Schemes

### Ottaviani's ulighed.

Lad  $X_1, \dots, X_n$  betegne uafhængige stokastiske variable. Sæt  $M_n := \max_{1 \leq j \leq n} |S_j|$  hvor  $S_k := X_1 + \dots + X_k$  for  $k = 1, \dots, n$ . For alle reelle tal  $x$  og  $y$  gælder da

$$P(M_n > x + y) \cdot \min_{1 \leq j \leq n} P(|S_n - S_j| \leq y) \leq P(|S_n| > x),$$

**Korollar** Hvis  $X_i$ 'erne yderligere har middelværdi 0, gælder for alle  $p \geq 1$

$$E[M_n^p] \leq 3 \cdot 2^p \cdot E[|S_n|^p].$$

Bevis for uligheden. Da uligheden er triviel, hvis enten  $x$  eller  $y$  er negativ, lader vi  $x, y \geq 0$  være givet. Sæt

$$D_1 = \{|S_1| > x + y\} \text{ og } D_j = \{|S_j| > x + y, |S_1| \leq x + y, \dots, |S_{j-1}| \leq x + y\} \text{ } j \geq 2.$$

Da  $D_j$ 'erne er disjunkte og  $\{M_n > x + y\} = \bigcup_{j=1}^n D_j$ , er

$$P(M_n > x + y) = \sum_{j=1}^n P(D_j).$$

For ethvert  $j$  fås endvidere af trekantsuligheden at

$$\{|S_j| > x + y\} \subseteq \{|S_n| > x\} \cup \{|S_n - S_j| > y\}.$$

Heraf følger, da  $(X_1, \dots, X_j)$  og dermed  $D_j$  og  $|S_n - S_j|$  er uafhængige, at

$$\begin{aligned} P(M_n > x + y) &\leq \sum_{j=1}^n (P(\{|S_n| > x\} \cap D_j) + P(\{|S_n - S_j| > y\} \cap D_j)) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (P(\{|S_n| > x\} \cap D_j) + P(|S_n - S_j| > y) \cdot P(D_j)) \\ &\leq P(|S_n| > x) + \max_{1 \leq j \leq n} P(|S_n - S_j| > y) \cdot P(M_n > x + y), \end{aligned}$$

hvoraf resultatet følger, da

$$1 - \max_{1 \leq j \leq n} P(|S_n - S_j| > y) = \min_{1 \leq j \leq n} P(|S_n - S_j| \leq y).$$

Bevis for Korollaret. Lad  $p \geq 1$  være valgt. Da  $S_j$  og  $S_n - S_j$  er uafhængige og centrerede fås af formel (4.5.6), at for  $j = 1, \dots, n$  er

$$E[|S_n|^p] = E[|S_n - S_j + S_j|^p] \geq E[|S_n - S_j|^p].$$

For  $\tau := (2 \cdot E[|S_n|^p])^{1/p}$  gælder derfor ifølge Markov's Ulighed

$$P(|S_n - S_j| > \tau) \leq E[|S_n - S_j|^p]/\tau^p \leq E[|S_n|^p]/\tau^p = 1/2$$

og dermed

$$\min_{1 \leq j \leq n} P(|S_n - S_j| \leq \tau) \geq 1 - 1/2 = 1/2.$$

D.v.s.

$$P(M_n > x) = P(M_n > (x - \tau) + \tau) \leq 2 \cdot P(|S_n| > x - \tau) = 2 \cdot P(|S_n| + \tau > x)$$

for alle  $x > 0$  og ved integration derfor

$$E[M_n^p] \leq 2 \cdot E[(|S_n| + \tau)^p] \leq 2^p \cdot E[|S_n|^p + \tau^p] \leq 3 \cdot 2^p \cdot E[|S_n|^p]. \quad \diamond$$

Ottaviani's Ulighed gælder for alle uafhængige stokastiske variable, men er variablene yderligere symmetriske, gælder med samme notation som ovenfor flg. mere præcise resultat.

### Lévy's ulighed.

Lad  $X_1, \dots, X_n$  betegne uafhængige symmetriske stokastiske variable. Da er

$$P(M_n > t) \leq 2 \cdot P(|S_n| > t) \quad \text{for alle } t > 0,$$

og dermed  $E[M_n^p] \leq 2 \cdot E[|S_n|^p]$  for alle  $p > 0$ .

Bevis. Lad  $t > 0$  være givet. Sæt igen

$$D_1 = \{|S_1| > t\} \text{ og } D_j = \{|S_j| > t, |S_1| \leq t, \dots, |S_{j-1}| \leq t\} \quad j \geq 2.$$

Da  $D_j$ 'erne er disjunkte gælder som ovenfor

$$\begin{aligned} P(M_n > t) &= \sum_{j=1}^n P(|S_j| > t, D_j) = \sum_{j=1}^n P(|S_n + S_n^j| > 2t, D_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n P(|S_n| > t, D_j) + \sum_{j=1}^n P(|S_n^j| > t, D_j), \end{aligned}$$

hvor  $S_n^j := X_1 + \dots + X_j - (X_{j+1} + \dots + X_n)$ . Men da  $X_i$ 'erne er symmetriske og uafhængige, er

$$(X_1, \dots, X_n) \sim (X_1, \dots, X_j, -X_{j+1}, \dots, -X_n) \quad \text{for alle } j,$$

og dermed specielt

$$P(|S_n| > t, D_j) = P(|S_n^j| > t, D_j) \quad \text{for alle } j.$$

Indsættes dette fås

$$P(M_n > t) \leq 2 \sum_{j=1}^n P(|S_n| > t, D_j) \leq 2 \cdot P(|S_n| > t). \quad \diamond$$

### De store tals love I.

Betegnelsen *De store tals love* dækker over et utal af resultater angående den asymptotiske opførsel af *empiriske gennemsnit*, d.v.s. variable af formen

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{eller mere generelt} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i),$$

med henblik på konvergens *P*-n.o. eller i sandsynlighed for  $n \rightarrow \infty$ .  $(X_n)_{n \geq 1}$  er her en følge af stokastiske variable og  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  en reel talfølge. Der findes tilsvarende resultater for stokastiske vektorer  $(\underline{X}_n)_{n \geq 1}$  og vektorer  $(\underline{\mu}_n)_{n \geq 1}$ . Hvis  $X_i$ 'erne har endelig middelværdi, vælges  $\mu_i$  normalt som middelværdien  $E[X_i]$ , og der er i denne situation dermed tale om normerede centrerede partialsummer. Resultaterne opdeles i to kategorier, idet der skelnes mellem *stærke* og *svage* love. En stærk lov er her et udsagn, der sikrer konvergens *P*-n.o. i modsætning til en svag lov, som vedrører konvergens i sandsynlighed. Da konvergens n.o. som bekendt medfører konvergens i sandsynlighed, giver enhver stærk lov anledning til en tilsvarende svag lov. Det absolut vigtigste resultat indenfor emnet er flg. klassiske stærke love ofte omtalt som en af sandsynlighedsteoriens tre perler.

#### LLN 1 Kolmogorov's Store tals lov.

*Hvis  $(X_n)_{n \geq 1}$  er en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med endelig middelværdi  $\mu$ , konvergerer*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \quad P\text{-n.o. og i } L^1(P).$$

Da  $E[X_n] = \mu$  for alle  $n \geq 1$  kan påstanden ækvivalent formuleres som

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i]) \rightarrow 0 \quad P\text{-n.o. og i } L^1(P).$$

Resultatet spiller en stor rolle i sandsynlighedsteorien, da det dukker naturligt op i mange sammenhænge. Men det er også af mere fundamental betydning for den moderne sandsynlighedsteori, d.v.s. Kolmogorov-modellen. For kunne et sådant resultat ikke vises, ville modellen simpelt hen være ubrugelig. Endvidere fremhæver det betydningen af det indførte middelværdibegreb, for som resultatet viser, konvergerer den empiriske middelværdi mod den teoretiske, hvis denne eksisterer, uanset hvilken fordeling der end er tale om.

I bestræbelserne på at bevise sætningen er der udviklet mange særdeles værdifulde teknikker, som udover at tjene deres oprindelige formål har muliggjort mange udvidelser af resultatet. Vi skal i det følgende beskæftige os med en lille del af denne omfattende teori, men det er vigtigt hele tiden at have ovenstående hovedresultat i tankerne.

Flg. spørgsmål fra den reelle analyse er tydeligvis af interesse:

Hvornår er  $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = 0$  for en given reel talfølge  $(a_n)_{n \geq 1}$ ?,

d.v.s. hvornår konvergerer  $a_n \rightarrow 0$  i Cecaro middel? Som bekendt gælder det, hvis  $a_n \rightarrow 0$  i sædvanlig forstand, men yderligere to resultater er af interesse i denne forbindelse. (De er formuleret med bevis i sektion 4.9, men for fuldstændighedens skyld har jeg opskrevet et bevis i Appendiks E) Først og fremmest det såkaldte *Kronecker Lemma*, d.v.s. implikationen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n/b_n \text{ konvergent i } \mathbf{R} \Rightarrow \lim_n \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_i = 0,$$

hvor  $0 < b_n < b_{n+1} \uparrow \infty$ . Tilfældet  $b_n \equiv n$  er specielt interessant. Desuden vises, at hvis  $a_n$ 'erne enten er opad eller nedad begrænsede, så er

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = 0 \text{ hvis } \lim_n \frac{1}{[\lambda]^n} \sum_{i=1}^{[\lambda]^n} a_i = 0 \text{ for ethvert } \lambda > 1.$$

Til senere brug bemærkes, at det er nok, det holder for  $\lambda = 1 + k^{-1}$   $k \geq 1$ .

Med baggrund heri åbner der sig derfor to mulige bevismetoder for ovenstående sætning. Enten kan den omformuleres til et spørgsmål om konvergens i  $\mathbf{R}$   $P$ -n.o. af den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mu)/n,$$

eller man kan først studere

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

langs med hurtigt voksende delfølger af formen  $([\lambda^n])_{n \geq 1}$  for et  $\lambda > 1$ , og dernæst herudfra forhåbentligt deducere den ønskede konvergens for hele følgen.

Tilfældet, hvor  $X_i$ 'erne er uafhængige, er af speciel interesse. Af afgørende betydning er her flg. resultat, som viser, at for summer af uafhængige variable er n.o.-konvergens det samme som konvergens i sandsynlighed.

### **LLN 2 Konvergens af summer af uafhængige variable.**

Lad  $(Z_n)_{n \geq 1}$  betegne en følge af uafhængige variable. Da gælder

$$\lim_n \sum_{i=1}^n Z_i \text{ er summabel } P\text{-n.o.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \text{ konvergent i sandsynlighed,}$$

hvor 'summabel  $P$ -n.o.' betyder at  $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega)$  er konvergent i  $\mathbf{R}$  for  $P$ -n.a.  $\omega$ .

**Korollar** For alle  $p > 0$  gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n \text{ konvergent i } L^p(P) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \text{ er summabel } P\text{-n.o.}$$

Korollaret, der er en umiddelbar konsekvens af sætningen, da konvergens i  $L^p$  medfører konvergens i sandsynlighed, er interessant, fordi konvergens i  $L^p$  ofte er simpelt at eftervise. F.eks. deduceres uden problemer flg. stærke lov.

**LLN 3 De store tals lov** ( $L^2$ -udgave).

Lad  $(X_n)_{n \geq 1}$  betegne en følge af uafhængige kvadratisk integrable stokastiske variable. Da gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)/n^2 < \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i]) \rightarrow 0 \quad P\text{-n.o. og i } L^2(P).$$

Bevis. Uafhængigheden bevirker, at  $(X_n - E[X_n])_{n \geq 1}$  udgør en orthogonal følge i  $L^2$ , og da

$$\|X_n - E[X_n]\|_2^2 = \text{Var}(X_n) \text{ for alle } n \geq 1$$

fås af Pythagoras, d.v.s. Lemma 13, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)/n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E[X_n])/n \text{ konvergerer i } L^2(P).$$

Konvergens  $P$ -n.o. følger nu af ovenstående korollar samt Kroneckers Lemma, og da

$$E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

følger konvergens i  $L^2$  ligeledes af Kronecker Lemmaet.  $\diamond$

Bemærkning. Da beviset udnytter begrebet orthogonalitet, er det på ingen måde klart, at resultatet kan generaliseres til andre eksponenter  $\alpha > 1$ . Men vi skal senere se, at det dog er muligt.

Bevis for LLN 2. Lad for ethvert  $n \geq 1$   $S_n$  betegne  $\sum_{i=1}^n Z_i$  og lad  $S$  betegne grænsevariablen, d.v.s.  $S_n \rightarrow S$  i sandsynlighed. Ifølge Proposition 10 punkt 2 findes der derfor en delfølge  $(n_k)_{k \geq 1}$ , så at  $S_{n_k} \rightarrow S$  n.o. for  $k \rightarrow \infty$ .

Definer for  $k \geq 1$

$$M_k := \max_{n_{k-1} < l \leq n_k} |S_l - S_{n_{k-1}}|,$$

hvor  $n_0 = 0$  og  $S_0 := 0$ . Ifølge Ottaviani's ulighed gælder for alle  $\epsilon > 0$  og  $k \geq 1$

$$P(M_k > 2\epsilon) \cdot \left(1 - \max_{n_{k-1} < l \leq n_k} P(|S_{n_k} - S_l| > \epsilon)\right) \leq P(|S_{n_k} - S_{n_{k-1}}| > \epsilon).$$

Da  $|S_{n_k} - S_{n_{k-1}}| \rightarrow 0$   $P$ -n.o. er mængden

$$\{k \geq 1 \mid |S_{n_k}(\omega) - S_{n_{k-1}}(\omega)| > \epsilon\}$$

endelig for  $P$ -n.a.  $\omega$ , og da  $|S_{n_k} - S_{n_{k-1}}|$ 'erne er uafhængige, følger derfor af Det andet Borel-Cantelli Lemma at

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|S_{n_k} - S_{n_{k-1}}| > \epsilon) < \infty \quad \text{og dermed} \quad \sum_{k=1}^{\infty} P(M_k > 2\epsilon) < \infty.$$

For da  $S_n \rightarrow S$  i sandsynlighed fås af trekantsuligheden, at

$$1 - \max_{n_{k-1} < l \leq n_k} P(|S_{n_k} - S_l| > \epsilon) \geq 1 - 2 \cdot \sup_{l > n_{k-1}} P(|S - S_l| > \epsilon/2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Det første Borel-Cantelli Lemma sikrer derfor, at for  $P$ -n.a.  $\omega$  er

$$\{k \mid M_k(\omega) \geq 2/n\} \text{ er endelig for alle } n \geq 1,$$

d.v.s. netop at  $M_k \rightarrow 0$   $P$ -n.o. For n.a.  $\omega$  gælder altså at

$$S_{n_k}(\omega) \rightarrow S(\omega) \quad \text{og} \quad M_k(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{for } k \rightarrow \infty.$$

Men heraf følger at  $\lim_l S_l(\omega) = S(\omega)$ , for med  $k(l)$  bestemt ved  $n_{k(l)-1} < l \leq n_{k(l)}$  gælder for alle  $l$  uligheden

$$\begin{aligned} |S_l(\omega) - S(\omega)| &\leq |S_l(\omega) - S_{n_{k(l)-1}}(\omega)| + |S_{n_{k(l)-1}}(\omega) - S(\omega)| \\ &\leq M_{k(l)}(\omega) + |S_{n_{k(l)-1}}(\omega) - S(\omega)|. \quad \diamond \end{aligned}$$

Bevis for LLN 1. Lad  $(X_n)_{n \geq 1}$  betegne en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med endelig middelværdi  $\mu$ . Vi skal vise, at

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \quad P\text{-n.o.}$$

Som netop vist, findes der et relevant resultat i det kvadratisk integrable tilfælde, men da der her kun forudsættes integrabilitet, får vi brug for den såkaldte *trunkeringsteknik*, som består i at skrive de enkelte variable som en sum af to i h.h.t. flg. ide:

$$X_n = X'_n + X''_n \quad \text{hvor} \quad X'_n := X_n \cdot \mathbf{1}_{[-a_n, a_n]}(X_n) \quad \text{og} \quad X''_n := X_n - X'_n = X_n \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n| > a_n\}}$$

for et passende valg af positive reelle tal  $a_n$ . Da  $X_n$ 'erne er forudsat integrable sættes  $a_n = n$ , idet der da gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X''_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n) < \infty.$$

Ved brug af Det første Borel-Cantelli Lemma fås derfor at

$$P(\exists n \geq 1 : X_i'' = 0 \quad i \geq n) = 1$$

og dermed

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i'' \rightarrow 0 \quad P\text{-n.o.},$$

og da

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i' + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i'',$$

mangler vi kun at vise, at første led konvergerer  $P$ -n.o. mod  $\mu$ . Men da

$$\text{Var}(X_n') \leq E[X_n'^2] = E[X_n^2 \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}(X_n)] = E[X_1^2 \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}(X_1)] \leq E[X_1^2, |X_1| \leq n]$$

og der findes en konstant  $C \in \mathbf{R}_+$ , så at

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X_1^2, |X_1| \leq n] / n^2 = E[X_1^2 \cdot \sum_{n, n \geq |X_1| \vee 1} 1/n^2] \leq C \cdot E[|X_1|] < \infty,$$

fås af LLN 3, at

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i' - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i'] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i' - E[X_i']) \rightarrow 0 \quad P\text{-n.o.}$$

Resten er nu let, thi ifølge Lebesgue's Sætning konvergerer

$$E[X_n'] = E[X_1 \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}(X_1)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu,$$

og derfor

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i'] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu,$$

da konvergens i sædvanlig forstand medfører konvergens i Cecaro-middel.

Konvergens i  $L^1$  følger ved at kombinere konvergens  $P$ -n.o. med Sætning 6, da

$$\{X_n \mid n \geq 1\} \quad \text{og dermed} \quad \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \mid n \geq 1 \right\}$$

er uniformt integrable. ◇

Trunkeringsteknikken kan på lignende vis bruges til at vise flg. generalisation af Komogorov's Store tals lov. Bemærk at den ændrede integrabilitetsantagelse afspejler sig i valget af trunkeringskonstant.

**LLN 4 Marcinkiewicz-Zygmund's Store tals lov.**

Lad  $1 \leq q < 2$  være givet og lad  $(Y_n)_{n \geq 1}$  betegne en følge af uafhængige identisk fordelte variable med endelig  $q$ 'te moment. Idet  $\mu$  betegner den fælles middelværdi, gælder da

$$\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu) \rightarrow 0 \quad P\text{-n.o. og i } L^q.$$

Bevis. Da  $q = 1$  allerede er klarer, betragter vi et  $1 < q < 2$ , og ved at se på  $Y_n - \mu$  i stedet for  $Y_n$ , kan vi antage, at den fælles middelværdi er lig 0. Skriv

$$Y_j = Y_j' + Y_j'' = (Y_j' - E[Y_j']) + Y_j'' + E[Y_j']$$

hvor

$$Y_j' = Y_j \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_j| < j^{1/q}\}} \quad \text{og} \quad Y_j'' = Y_j \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_j| \geq j^{1/q}\}}.$$

Ifølge Kronecker Lemma vil

$$n^{-1/q} \sum_{j=1}^n Y_j \rightarrow 0 \quad P\text{-n.o. hvis} \quad \sum_{j=1}^{\infty} Y_j/j^{1/q} \text{ er } P\text{-summabel.}$$

Det er derfor nok at vise, at flg. tre rækker hver for sig konvergerer  $P$ -n.o.

$$\sum_{j=1}^{\infty} (Y_j' - E[Y_j']) \cdot j^{-1/q}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} Y_j'' \cdot j^{-1/q} \quad \text{og} \quad \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j'] \cdot j^{-1/q}.$$

Leddene i den første sum er uafhængige, centrerede og har endelig varians. Ifølge korollaret til LLN 2 og Pythagoras er rækken derfor  $P$ -summabel, hvis summen af varianserne er endelig, d.v.s. specielt hvis

$$\sum_{j=1}^{\infty} E[(Y_j' - E[Y_j'])^2] \cdot j^{-2/q} \leq \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j'^2] \cdot j^{-2/q} < \infty.$$

Men dette gælder, da der findes en konstant  $r_q > 0$  kun afhængig af  $q$ , så at

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[Y_i'^2] \cdot j^{-2/q} = E[Y_1^2] \cdot \sum_{j: j > |Y_1|^q} j^{-2/q} \leq r_q E[Y_1^2 \cdot |Y_1|^{-q(2/q-1)}] = r_q E[|Y_1|^q].$$

Konvergenen af række nr. to følger som ovenfor af Borel-Cantelli Lemmaet, thi da  $E[|Y_1|^q] < \infty$  er

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(Y_j'' \neq 0) = \sum_{j=1}^{\infty} P(|Y_j| \geq j^{1/q}) = \sum_{j=1}^{\infty} P(|Y_1|^q \geq j) < \infty.$$

Hvad angår den sidste række bemærkes først, at da  $Y_j$ 'erne har middelværdi 0 er

$$E[Y_j'] = -E[Y_j''] = -E[Y_j \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_j| \geq j^{1/q}\}}] = -E[Y_j \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_j|^q \geq j\}}],$$

d.v.s. vi skal vise, at

$$\sum_{j=1}^{\infty} E[|Y_1| \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_1|^q \geq j\}}] \cdot j^{-1/q} < \infty.$$

Men dette følger af, at der findes endnu en konstant  $\tilde{r}_q$  kun afhængig af  $q$ , så at

$$\sum_{j=1}^{\infty} E[|Y_1| \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_1|^q \geq j\}}] \cdot j^{-1/q} = E[|Y_1| \cdot \sum_{1 \leq j \leq |Y_1|^q} j^{-1/q}] \leq \tilde{r}_q E[|Y_1| \cdot |Y_1|^{-q(1/q-1)}].$$

D.v.s. den betragtede sum er domineret af  $\tilde{r}_q \cdot E[|Y_1|^q]$  og dermed endelig. Beviset for konvergenen i  $L^q$  udsættes til senere.  $\diamond$

Implikationen

$$\text{uafhængighed} \Rightarrow \text{ukorrelerethed d.v.s. orthogonalitet}$$

spiller tydeligvis en væsentlig rolle i beviset for ovenstående  $L^2$ -udgave af de store tals lov. I det næste resultat tages udgangspunkt i ukorrelerethed i stedet for uafhængighed.

**LLN 5 De store tals lov** ( $L^2$ -udgave, supplement).

Lad  $(X_n)_{n \geq 1}$  betegne en følge af ukorrelerede kvadratisk integrable stokastiske variable så at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)/n^2 < \infty$$

Da gælder, idet  $\hat{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i])$  for  $n \geq 1$ ,

- 1)  $\hat{X}_n \rightarrow 0$  i sandsynlighed og  $L^2(P)$ .
- 2)  $\hat{X}_{[\lambda n]} \rightarrow 0$   $P$ -n.o. for  $\lambda > 1$ .
- 3)  $\hat{X}_n \rightarrow 0$   $P$ -n.o. hvis

$$P\left(\sup_n (X_n - E[X_n]) < \infty \text{ eller } \inf_n (X_n - E[X_n]) > -\infty\right) = 1.$$

Bevis. For nemheds skyld skrives  $\mu_n$  i stedet for  $E[X_n]$ . Da  $(X_n - \mu_n)_{n \geq 1}$  pr. antagelse er parvis orthogonale i  $L^2(P)$  fås for ethvert  $n \geq 1$  af Pythagoras, at

$$E[\hat{X}_n^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n E[(X_j - \mu_j)^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

hvor konvergenen følger af antagelsen og Kronecker Lemmaet. D.v.s.  $\hat{X}_n \rightarrow 0$  i  $L^2(P)$  og dermed også i sandsynlighed.

For ethvert  $\lambda > 1$  har vi tilsvarende

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} E[\hat{X}_{[\lambda^n]}^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda^n]^2} \sum_{j=1}^{[\lambda^n]} \text{Var}(X_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left( \text{Var}(X_j) \sum_{n: [\lambda^n] \geq j} \frac{1}{[\lambda^n]^2} \right) \leq C_\lambda \sum_{j=1}^{\infty} \text{Var}(X_j)/j^2 < \infty, \end{aligned}$$

hvor  $C_\lambda$  er en konstant kun afhængig af  $\lambda$ . D.v.s. for ethvert  $\lambda > 1$  er

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{X}_{[\lambda^n]}^2\right] < \infty \quad \text{og dermed} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \hat{X}_{[\lambda^n]}^2 < \infty \quad P\text{-n.o.},$$

hvoraf 2) let følger, da leddene i en konvergent række går mod 0.

Ifølge 2) er

$$P(\hat{X}_{\nu_k(n)} \rightarrow 0 \text{ for alle } k \geq 1) = 1,$$

hvor

$$\nu_k(n) = [(1 + k^{-1})^n] \text{ for alle } n, k \geq 1.$$

Kombineres dette med antagelserne gælder derfor for  $P$ -n.a.  $\omega$ , at

$$\lim_n \hat{X}_{\nu_k(n)}(\omega) = 0 \quad \text{for alle } k \geq 1$$

samt

$$-\infty < \inf_j (X_j(\omega) - \mu_j) \text{ eller } \sup_j (X_j(\omega) - \mu_j) < \infty,$$

og derfor som tidligere nævnt, se Appendiks E, at  $\lim_n \hat{X}_n = 0$   $P$ -n.o. ◇

Ved at udnytte LLN 5 punkt 3) kan man vise, at Kolmogorov's store tals lov stadig gælder, selvom uafhængighed erstattes med parvis uafhængighed. Men da denne generalisation yderst sjældent er interessant, vil vi lade den ligge. Den interesserede læser kan finde argumenterne i Hoffmann's bog sektionerne 4.11 og 4.12.

## De store tals love II.

Som allerede nævnt adskiller eksponenten 2 sig fra andre eksponenter. Men som vi nu skal se, kan man i det uafhængige tilfælde ved hjælp af den såkaldte *symmetriseringsteknik* alligevel vise lignende resultater for alle eksponenter  $\alpha > 0$ . En væsentlig brik i teorien er flg. resultat normalt kaldet *Khinchine's Ulighed*:

### LLN 6 Khinchine's Ulighed.

Lad  $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$  betegne en følge af uafhængige Bernoulli variable. Da findes der for alle  $\alpha > 0$  positive konstanter  $c_\alpha$  og  $C_\alpha$  kun afhængig af  $\alpha$ , så at

$$c_\alpha \cdot \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\alpha/2} \leq E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^\alpha] \leq C_\alpha \cdot \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\alpha/2}$$

for alle  $n \geq 1$  og alle reelle talfølger  $(b_j)_{j \geq 1}$ .

Bevis del I. Ifølge Jensen's ulighed er  $\alpha \mapsto E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^\alpha]^{1/\alpha}$  voksende for ethvert  $n \geq 1$  og alle reelle talfølger  $(b_n)_{n \geq 1}$ , og da

$$E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^2] = E\left[\left(\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j\right)^2\right] = \sum_{j=1}^n b_j^2$$

ses, at

$$E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^\alpha] \leq E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^2]^{\alpha/2} = \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{\alpha/2} \quad \text{for } \alpha \leq 2$$

og

$$\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{\alpha/2} = E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^2]^{\alpha/2} \leq E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^\alpha] \quad \text{for } \alpha \geq 2.$$

D.v.s. 1 kan bruges som  $C_\alpha$  for  $0 < \alpha \leq 2$  og som  $c_\alpha$  for  $\alpha \geq 2$ . Følgen  $(b_j)_{j \geq 1}$  givet ved  $b_1 = 1$  og  $b_j = 0$  ellers viser, at der i begge tilfælde er tale om den optimale konstant.  $\diamond$

De resterende tilfælde er tæt forbundne for har vi bestemt  $C_\alpha$  for  $\alpha > 2$  gælder ifølge Cauchy-Schwarz's ulighed for  $0 < \alpha < 2$ , at

$$\sum_{j=1}^n b_j^2 = E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^2] = E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^{2-\alpha/2} \cdot |\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^{\alpha/2}] \leq$$

$$E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^{4-\alpha}]^{1/2} \cdot E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^\alpha]^{1/2} \leq C_{4-\alpha}^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{1-\alpha/4} \cdot E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^\alpha]^{1/2},$$

som efter forkortning viser, at

$$\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{\alpha/4} \leq C_{4-\alpha}^{-1/2} \cdot E[|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j|^\alpha]^{1/2}.$$

D.v.s.  $C_{4-\alpha}^{-1}$  kan bruges som  $c_\alpha$  i intervallet  $0 < \alpha < 2$ . Bestemmelsen af  $C_\alpha$  for  $\alpha > 2$  er mere kompliceret, specielt er bestemmelsen af den optimale værdi yderst vanskelig. Hoffmann viser i sektion 4.30, at  $C_\alpha = 2^{\alpha/2} \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha/2)$  kan bruges. Denne konstant er ikke optimal ligesom den, vi nu vil bestemme ved brug af teorien om betingede middelværdier.

Bevis del II. Lad  $\alpha > 2$  og  $n \geq 1$  være givet og lad  $X_1, \dots, X_n$  betegne uafhængige  $N(0, 1)$ -fordelte stokastiske variable. Definer

$$\mathcal{B}_i := \sigma(\{X_i > 0\}) \quad i = 1, \dots, n \quad \text{og} \quad \mathcal{B} := \sigma\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i\right).$$

Ifølge regneregler for betingede middelværdier gælder for ethvert  $i$ , da  $X_i$ 'erne er symmetriske og  $P(X_i > 0)$  derfor lig  $1/2$  for alle  $i$ , at

$$E[X_i | \mathcal{B}] = E[X_i | \mathcal{B}_i] = \rho \cdot (\mathbf{1}_{\{X_i > 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_i \leq 0\}}) \quad P\text{-n.o.},$$

hvor

$$\rho := 2 \cdot E[X_i | X_i > 0] = -2 \cdot E[X_i | X_i \leq 0] = \sqrt{2/\pi}.$$

D.v.s.

$$E[X_1 | \mathcal{B}]/\rho, \dots, E[X_n | \mathcal{B}]/\rho \text{ er uafhængige Bernoulli variable,}$$

og for ethvert valg af konstanter  $b_1, \dots, b_n$  gælder derfor

$$\begin{aligned} \rho^\alpha \cdot E\left[\left|\sum_{j=1}^n b_j \cdot \epsilon_j\right|^\alpha\right] &= E\left[\left|\sum_{j=1}^n b_j \cdot E[X_j | \mathcal{B}]\right|^\alpha\right] = E\left[\left|E\left[\sum_{j=1}^n b_j \cdot X_j \mid \mathcal{B}\right]\right|^\alpha\right] \\ &\leq E\left[\left|\sum_{j=1}^n b_j \cdot X_j\right|^\alpha\right] = E\left[\left|N\left(0, \sum_{j=1}^n b_j^2\right)\right|^\alpha\right] = \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{\alpha/2} \cdot E\left[|N(0, 1)|^\alpha\right]. \end{aligned}$$

D.v.s.

$$C_\alpha := (\pi/2)^{\alpha/2} \cdot E\left[|N(0, 1)|^\alpha\right] = \pi^{(\alpha-1)/2} \cdot \Gamma((\alpha + 1)/2)$$

er en mulig konstant. ◇

For at kunne udnytte Khinchine's Ulighed må vi først udvide begrebet symmetri fra stokastiske variable til stokastiske vektorer. Dette sker ved flg. definition.

**Definition.** En stokastisk vektor  $\underline{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$  siges at være *symmetrisk*, hvis de  $2^n$  stokastiske vektorer  $(\pm Z_1, \dots, \pm Z_n)$  har samme fordeling. Eller kort

$$(Z_1, \dots, Z_n) \sim (\pm Z_1, \dots, \pm Z_n).$$

En simpel overvejelse viser, at koordinatvariablene i en symmetrisk stokastisk vektor er symmetriske, og omvendt hvis de yderligere er uafhængige. D.v.s.

$$Z_1, \dots, Z_n \text{ uafhængige og symmetriske} \Rightarrow \underline{Z} = (Z_1, \dots, Z_n) \text{ symmetrisk.}$$

Endvidere følger af Loven om total sandsynlighed, at hvis  $\underline{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$  og  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  er uafhængige og  $P(Y_i \in \{-1, 1\}) = 1$  for  $i = 1, \dots, n$ , så er

$$(Z_1, \dots, Z_n) \sim (Y_1 \cdot Z_1, \dots, Y_n \cdot Z_n) \text{ hvis } \underline{Z} \text{ er symmetrisk.}$$

Vi kan nu udlede flg konsekvenser af Khinchine's Ulighed.

**Korollar 1** Lad  $Z_1, \dots, Z_n$  betegne uafhængige symmetriske stokastiske variable. (Det er nok at  $\underline{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$  er symmetrisk.) Da gælder for ethvert  $\alpha > 0$

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^n Z_k\right|^\alpha\right] \leq C_\alpha \cdot E\left[\left(\sum_{k=1}^n |Z_k|^2\right)^{\alpha/2}\right] \leq C_\alpha \cdot n^{\beta(\alpha)} \sum_{k=1}^n E\left[|Z_k|^\alpha\right],$$

hvor  $C_\alpha$  er konstanten fra Khinchine's ulighed, og  $\beta(\alpha) = (\alpha/2 - 1)^+$ , d.v.s.  $\beta(\alpha) = 0$  for  $0 < \alpha \leq 2$  og  $\beta(\alpha) = \alpha/2 - 1$  for  $\alpha > 2$ .

Bevis. Lad  $\alpha > 0$  være givet og lad  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  betegne uafhængige Bernoulli variable, så at  $(Z_1, \dots, Z_n)$  og  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  er uafhængige. Da  $\underline{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$  som nævnt er symmetrisk, er

$$(Z_1, \dots, Z_n) \sim (\epsilon_1 \cdot Z_1, \dots, \epsilon_n \cdot Z_n),$$

og idet

$$H_\alpha(a_1, \dots, a_n) := E\left[\left|\sum_{k=1}^n \epsilon_k \cdot a_k\right|^\alpha\right] \quad \text{for } a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$$

følger heraf ved brug af Fubini's Sætning, at

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^n Z_k\right|^\alpha\right] = E\left[\left|\sum_{k=1}^n \epsilon_k \cdot Z_k\right|^\alpha\right] = E[H_\alpha(Z_1, \dots, Z_n)].$$

Men ifølge Khinchine's Ulighed er  $H_\alpha(a_1, \dots, a_n) \leq C_\alpha \cdot (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\alpha/2}$ , og dermed

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^n Z_k\right|^\alpha\right] \leq C_\alpha \cdot E\left[\left(\sum_{k=1}^n |Z_k|^2\right)^{\alpha/2}\right].$$

Korollarets sidste ulighed følger nu ved for  $0 < \alpha \leq 2$  at udnytte, at  $x \mapsto x^{\alpha/2}$  er subadditiv og voksende på  $\mathbf{R}_+$ , og for  $\alpha > 2$  at benytte, at

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^n |x_k|^p \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}.$$

Dette er f.eks. en konsekvens af Jensen's Ulighed. ◇

Ved brug af formel (4.6.5) giver dette anledning til flg. generelle ulighed, hvor konstanterne  $C_\alpha$  og  $\beta(\alpha)$  har samme mening som i Korollar 1.

**Korollar 2** Lad  $Z_1, \dots, Z_n$  betegne uafhængige stokastiske variable med endelig middelværdi  $\mu_k$  for  $k = 1, \dots, n$ . Da gælder for ethvert  $\alpha > 0$

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^n (Z_k - \mu_k)\right|^\alpha\right] \leq 2^\alpha \cdot C_\alpha \cdot n^{\beta(\alpha)} \sum_{k=1}^n E[|Z_k - \mu_k|^\alpha].$$

Bevis. Da uligheden er triviel for  $\alpha \leq 1$ , idet  $x \mapsto x^\alpha$  er voksende og subadditiv på  $\mathbf{R}_+$ , betragtes et  $\alpha > 1$ . Lad  $Y_1, \dots, Y_n$  være en uafhængig kopi af  $Z_1, \dots, Z_n$ , d.v.s.

$(Y_1, \dots, Y_n)$  og  $(Z_1, \dots, Z_n)$  er uafhængige og identisk fordelte.

Da  $Z_1 - Y_1, \dots, Z_n - Y_n$  derfor er uafhængige og symmetriske, fås af Korollar 1

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^n (Z_k - Y_k)\right|^\alpha\right] \leq C_\alpha \cdot n^{\beta(\alpha)} \sum_{k=1}^n E[|Z_k - Y_k|^\alpha].$$

Men da  $Z_k \sim Y_k$  for alle  $k \geq 1$  og dermed

$$E[|Z_k - Y_k|^\alpha] \leq 2^{\alpha-1} \cdot (E[|Z_k - \mu_k|^\alpha] + E[|Y_k - \mu_k|^\alpha]) = 2^\alpha \cdot E[|Z_k - \mu_k|^\alpha],$$

følger påstanden af formel (4.6.5), idet

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^n (Z_k - Y_k)\right|^\alpha\right] = E\left[\left|\sum_{k=1}^n (Z_k - \mu_k) - \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu_k)\right|^\alpha\right] \geq E\left[\left|\sum_{k=1}^n (Z_k - \mu_k)\right|^\alpha\right],$$

da  $\sum_{k=1}^n (Y_k - \mu_k)$  har middelværdi 0 og  $\alpha > 1$ .  $\diamond$

Ved brug af Korollar 2 kan man udlede flg.  $L^\alpha$ -konvergensresultater for summer af uafhængige stokastiske variable.  $C_\alpha$  og  $\beta(\alpha)$  er som ovenfor.

**Korollar 3** Lad  $(X_n)_{n \geq 1}$  betegne uafhængige stokastiske variable med endelig middelværdi  $\mu_n$  for  $n \geq 1$ . Da gælder for ethvert  $0 < \alpha \leq 2$ , at

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n - \mu_n|^\alpha] < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mu_n) \text{ eksisterer i } L^\alpha,$$

og for alle  $\alpha > 0$ , at

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n - \mu_n|^\alpha] / n^{\alpha-\beta(\alpha)} < \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k) \rightarrow 0 \text{ i } L^\alpha.$$

Bevis. For at vise første del, er det nok at vise, at højresiden udgør en Cauchy følge i  $L^\alpha$ . Men dette følger umiddelbart af antagelsen og Korollar 2, idet denne viser, at for  $0 < \alpha \leq 2$  er

$$E\left[\left|\sum_{k=n}^m (X_k - \mu_k)\right|^\alpha\right] \leq 2^\alpha C_\alpha \sum_{k=n}^m E[|X_k - \mu_k|^\alpha]$$

for alle  $1 \leq n \leq m$ . Hvad angår andel del fås igen af Korollar 2, at

$$E\left[\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k)\right|^\alpha\right] \leq \frac{2^\alpha C_\alpha}{n^\alpha} \cdot n^{\beta(\alpha)} \sum_{k=1}^n E[|X_k - \mu_k|^\alpha]$$

og dermed

$$E\left[\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k)\right|^\alpha\right] \leq \frac{2^\alpha C_\alpha}{n^{\alpha-\beta(\alpha)}} \sum_{k=1}^n E[|X_k - \mu_k|^\alpha]$$

for alle  $n \geq 1$ , hvoraf påstanden følger ved brug af Kronecker's lemma.  $\diamond$

Vi kan nu formulere og bevise en  $L^\alpha$ -version af de store tals lov for et generelt  $\alpha > 0$ . For  $\alpha < 2$  er der tale om en direkte oversættelse af  $L^2$ -udgaven, hvorimod momentbetingelsen er en anden for  $\alpha > 2$ .

**LLN 7 De store tals lov ( $L^\alpha$ -udgave).**

Lad  $(X_n)_{n \geq 1}$  betegne en følge af uafhængige stokastiske variable med endelig middelværdi  $\mu_n$  for  $n \geq 1$ . Da gælder for  $\alpha \leq 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n - \mu_n|^\alpha]/n^\alpha < \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \rightarrow 0 \text{ } P\text{-n.o. og i } L^\alpha(P).$$

og for  $\alpha > 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n - \mu_n|^\alpha]/n^{(1+\alpha/2)} < \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \rightarrow 0 \text{ } P\text{-n.o. og i } L^\alpha(P).$$

Bevis. Lad  $\alpha \leq 2$  være givet. Ifølge Korollar 3 punkt 1 har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n - \mu_n|^\alpha]/n^\alpha < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mu_n)/n \text{ konvergent i } L^\alpha.$$

Rækken konvergerer derfor også i sandsynlighed og dermed  $P$ -n.o. ifølge LLN 2. Kronecker Lemmaet giver derfor umiddelbart, at

$$\hat{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k) \rightarrow 0 \text{ } P\text{-n.o.}$$

og da anden del i Korollar 3 sikrer, at  $\hat{X}_n \rightarrow 0$  i  $L^\alpha$ , er tilfældet  $\alpha \leq 2$  klart. Betragt dernæst et  $\alpha > 2$ .  $L^\alpha$ -konvergensten af  $(\hat{X}_n)_{n \geq 1}$  følger igen af Korollar 3. Hvad angår konvergensten  $P$ -n.o. udnyttes som i beviset for LLN 2, at det er nok at vise, at  $\hat{X}_{2^n} \rightarrow 0$  og  $M_n \rightarrow 0$   $P$ -n.o., hvor for  $n \geq 1$

$$M_n := \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |\hat{X}_k - \hat{X}_{2^n}| \leq |\hat{X}_{2^n}| + \frac{1}{2^n} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} \left| \sum_{j=2^n+1}^k (X_j - \mu_j) \right|.$$

Hertil er det som bekendt nok at vise, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|\hat{X}_{2^n}|^\alpha] < \infty \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} E[M_n^\alpha] < \infty.$$

Udnytttes Korollar 2 ses, at der findes en konstant  $C$  kun afhængig af  $\alpha$ , så at

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} E[|\hat{X}_{2^n}|^\alpha] &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n(\alpha/2-1)}}{2^{n\alpha}} \sum_{j=1}^{2^n} E[|X_j - \mu_j|^\alpha] \\ &= C \sum_{j=1}^{\infty} E[|X_j - \mu_j|^\alpha] \sum_{n: 2^n \geq j} \frac{1}{2^{n(\alpha/2+1)}} \\ &\leq 2C \sum_{j=1}^{\infty} E[|X_j - \mu_j|^\alpha] / j^{1+\alpha/2} < \infty. \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} E[M_n^\alpha]$  er derfor også endelig, hvis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \cdot E\left[\max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} \left| \sum_{j=2^n+1}^k (X_j - \mu_j) \right|^\alpha\right] < \infty.$$

Men ifølge Korollaret til Ottaviani's Ulighed er dette tilfældet, hvis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \cdot E\left[\left| \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} (X_j - \mu_j) \right|^\alpha\right] < \infty,$$

og dermed ifølge Korollar 2 hvis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n(\alpha/2-1)}}{2^{n\alpha}} \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} E[|X_j - \mu_j|^\alpha] < \infty.$$

Men dette sikres præcist af antagelsen da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(\alpha/2+1)}} \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} E[|X_j - \mu_j|^\alpha] \leq 2^{1+\alpha/2} \sum_{j=1}^{\infty} E[|X_j - \mu_j|^\alpha] / j^{1+\alpha/2} < \infty. \quad \diamond$$

Symmetriseringsteknikken sikrer også den postulerede  $L^q$ -konvergens i Marcinkiewicz-Zygmund's Store tals lov.

Thi lad for  $1 < q < 2$  situationen være som i LLN 4. Først reduceres til det symmetriske tilfælde. For hvis  $(\tilde{Y}_j)_{j \geq 1}$  er en uafhængig kopi af  $(Y_j)_{j \geq 1}$ , d.v.s.

$$(Y_j)_{j \geq 1} \text{ og } (\tilde{Y}_j)_{j \geq 1} \text{ uafhængige og } (Y_j)_{j \geq 1} \sim (\tilde{Y}_j)_{j \geq 1}$$

d.v.s.  $Y_j \sim \tilde{Y}_j$  for alle  $j \geq 1$  og  $\tilde{Y}_j$ 'erne uafhængige, fås af formel (4.6.5), at

$$E\left[\left|\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n Y_j\right|^q\right] \leq E\left[\left|\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n Y_j - \frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j\right|^q\right] = E\left[\left|\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n (Y_j - \tilde{Y}_j)\right|^q\right],$$

da  $q > 1$  og

$$E\left[\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j\right] = 0.$$

Da  $(Y_j - \tilde{Y}_j)_{j \geq 1}$ 'erne er uafhængige, symmetriske og identisk fordelte, er det derfor, hvad konvergens i  $q$ -middel angår, nok at betragte det symmetriske tilfælde. Vi vil derfor i det videre forløb yderligere antage, at  $Y_i$ 'erne er symmetriske. Betragt for et givet  $k \geq 1$  opsplittningen

$$Y_i = Y'_{k,i} + Y''_{k,i} \quad \text{hvor } Y'_{k,i} := Y_i \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_i| \leq k\}} \quad \text{og } Y''_{k,i} := Y_i \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_i| > k\}}.$$

$(Y'_{k,i})_{i \geq 1}$  og  $(Y''_{k,i})_{i \geq 1}$  er da begge uafhængige, symmetriske og identisk fordelte. Ifølge Korollar 2 ovenfor findes der derfor en konstant  $C$  kun afhængig af  $q$ , så at

$$E\left[\left|\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n Y''_{k,j}\right|^q\right] \leq C \cdot E[|Y''_{k,1}|^q] = C \cdot E[|Y_1|^q, |Y_1| > k],$$

hvilket viser, at

$$\sup_n E\left[\left|\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n Y''_{k,j}\right|^q\right]$$

kan gøres så lille som ønsket ved at vælge  $k$  stor nok.  $L^q$ -konvergens vil derfor være vist, hvis vi for givet  $k$  kan vise, at

$$\lim_n E\left[\left|\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n Y'_{k,j}\right|^q\right] = \lim_n E\left[\left|\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n Y_j \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_j| \leq k\}}\right|^q\right] = 0.$$

Men da  $q < 2$  er det nok at vise konvergens i  $L^2$ , hvilket følger af Pythagoras, for da summanderne er uafhængige centrede kvadratisk integrable variable, gælder

$$E\left[\left|\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{j=1}^n Y_j \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_j| < k\}}\right|^2\right] = \frac{1}{n^{2/q}} \sum_{j=1}^n E[Y_j^2 \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_j| < k\}}] \leq \frac{n \cdot k^2}{n^{2/q}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

for ethvert  $k \geq 1$ . ◇

### Fordelingskonvergens.

Lad i det følgende  $(S, d)$  betegne et separabelt metrisk rum. Vigtige eksempler er  $\mathbf{R}^n$   $n \geq 1$  eller mere generelt delmængder heraf udstyret med den Euklidiske metrik. Lad endvidere  $(X_n)_{n \geq 1}$  og  $X$  betegne stokastiske funktioner med værdier i  $S$ , d.v.s.  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(S))$ -målelige funktioner fra  $\Omega$  ind i  $S$ , hvor  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  er et sandsynlighedsfelt, hvorpå alle omtalte variable tænkes defineret. I analogi med det reelle tilfælde indføres flg. konvergensbegreb.

**Definition.**  $X_n \rightarrow X$  i sandsynlighed hvis  $\lim_n P(d(X_n, X) > \epsilon) = 0$  for  $\epsilon > 0$ .

Bemærkning. Da  $\mathcal{B}(S \times S) = \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S)$  fordi  $S$  er separabel, sikrer kontinuiteten af  $(x, y) \mapsto d(x, y)$ , at  $\{d(X_n, X) > \epsilon\}$  er en hændelse, og den kan som sådan tilordnes en sandsynlighed.

Hvis  $S = \mathbf{R}$  er betingelsen for konvergens i sandsynlighed den vel kendte

$$\lim_n P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \text{ for alle } \epsilon > 0,$$

hvilket, som vist i Lemma 12, er ækvivalent med at

$$\lim_n E[|X_n - X| \wedge 1] = 0.$$

Denne ækvivalens generaliserer ordret til det almene tilfælde, d.v.s.

$$X_n \rightarrow X \text{ i sandsynlighed} \Leftrightarrow \lim_n E[d(X_n, X) \wedge 1] = 0.$$

Ved brug heraf fås som i det reelle tilfælde.

**Fk 1**  $X_n \rightarrow X$  i sandsynlighed  $\Rightarrow X_{n_k} \rightarrow X$   $P$ -n.o. for en delfølge  $(n_k)_{k \geq 1}$ .

Bevis. Da  $\lim_n E[d(X_n, X) \wedge 1] = 0$  kan vi vælge en delfølge  $(n_k)_{k \geq 1}$ , så at

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[d(X_{n_k}, X) \wedge 1] < \infty \text{ og derfor } d(X_{n_k}, X) \wedge 1 \rightarrow 0 \text{ } P\text{-n.o.},$$

hvilket netop betyder at  $X_{n_k} \rightarrow X$   $P$ -n.o. ◇

En anden vigtig konsekvens er følgende.

**Fk 2** Lad  $(T, \delta)$  betegne endnu et separabelt metrisk rum og lad  $f : S \rightarrow T$  være en kontinuert funktion. Da gælder

$$X_n \rightarrow X \text{ i sandsynlighed} \Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(X) \text{ i sandsynlighed}$$

Bevis. Vi skal vise  $\lim_n E[\delta(f(X_n), f(X)) \wedge 1] = 0$ . Antag at det ikke gælder, d.v.s. antag

$$\exists \delta > 0 \exists (n_k)_{k \geq 1} : E[\delta(f(X_{n_k}), f(X)) \wedge 1] > \delta \text{ for alle } k.$$

Men dette fører til en modstrid, da

$$\begin{aligned} X_{n_k} \rightarrow X \text{ i s.s.} &\Rightarrow \exists (k_l)_{l \geq 1} X_{n_{k_l}} \rightarrow X \text{ P-n.o.} \Rightarrow f(X_{n_{k_l}}) \rightarrow f(X) \text{ P-n.o.} \\ &\Rightarrow \delta(f(X_{n_{k_l}}), f(X)) \wedge 1 \rightarrow 0 \text{ P-n.o.} \Rightarrow E[\delta(f(X_{n_{k_l}}), f(X)) \wedge 1] \rightarrow 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

Kontinuiteten udnyttes i  $\Rightarrow$  nummer to, og da det her er nok, at  $f$  er kontinuert i  $X(\omega)$  for n.a.  $\omega$ , kan antagelsen svækkes til, at  $f$  er kontinuert  $P_X$ -n.o. Vi har derfor flg. skærpelse.

**Fk 2a** Lad  $(T, \delta)$  betegne endnu et separabelt metrisk rum og lad  $f : S \rightarrow T$  være en Borel funktion, som er kontinuert  $P_X$ -n.o. Da gælder

$$X_n \rightarrow X \text{ i sandsynlighed} \Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(X) \text{ i sandsynlighed}$$

Specialtilfældet  $T = S$  og  $\delta$  en metrik, der er ækvivalent med  $d$ , viser, idet den identiske afbildning er kontinuert både som afbildning

$$(S, d) \rightarrow (S, \delta) \quad \text{og} \quad (S, \delta) \rightarrow (S, d),$$

at konvergens i sandsynlighed ikke afhænger af den eksplicit valgte metrik, blot vi holder os indenfor klassen af ækvivalente metrikker. Dette udnyttes f.eks. i følgende bevis.

**Fk 3** Idet  $S \times S$  udstyres med en produktmetrik gælder

$$X_n \rightarrow X \text{ og } Y_n \rightarrow Y \text{ i sandsynlighed} \Leftrightarrow (X_n, Y_n) \rightarrow (X, Y) \text{ i sandsynlighed.}$$

Bevis.  $\Leftarrow$  følger af Fk 2, da projektionsafbildningerne er kontinuerte, og  $\Rightarrow$  fås, da

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

er en produktmetrik, umiddelbart af uligheden

$$\tilde{d}((X_n, Y_n), (X, Y)) \wedge 1 \leq d(X_n, X) \wedge 1 + d(Y_n, Y) \wedge 1. \quad \diamond$$

Sætning 6 og Fk 2 viser endvidere, at for alle  $f \in bC(S)$  gælder

$$\begin{aligned} X_n \rightarrow X \text{ i sandsynlighed} &\Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(X) \text{ i sandsynlighed} \\ &\Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(X) \text{ i } L^1(P) \Rightarrow E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)] = \int f dP_X. \end{aligned}$$

Med udgangspunkt heri indføres den såkaldte *konvergens i fordeling*, i Hoffman's bog betegnet  $\xrightarrow{\sim}$ , i h.h.t. flg. definition.

**Definition.** En følge  $(X_n)_{n \geq 1}$  af stokastiske funktioner med værdier i  $S$  siges at *konvergere i fordeling* mod  $\mu$ , et Borel sandsynlighedsmål på  $S$ , hvis

$$E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu \quad \text{for alle } f \in bC(S).$$

Dette betegnes i givet fald  $X_n \xrightarrow{\sim} \mu$ . Hvis  $\mu = P_X$  for en stokastisk funktion  $X$  med værdier i  $S$  skrives også  $X_n \xrightarrow{\sim} X$ , og man taler om konvergens i fordeling mod  $X$ . I følge den lille transformationssætning gælder altså, at

$$X_n \xrightarrow{\sim} X \Leftrightarrow E[f(X_n)] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} E[f(X)] \text{ for alle } f \in \text{bC}(S).$$

Det ovenstående kan derfor formuleres som implikationen (se (5.4.4)).

**Fk 4**  $X_n \rightarrow X$  i sandsynlighed  $\Rightarrow X_n \xrightarrow{\sim} X$ .

Grænsemålet for en konvergent følge er entydigt bestemt, d.v.s.

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mu \text{ og } X_n \xrightarrow{\sim} \nu \Rightarrow \mu = \nu.$$

For ifølge tillægget til sektion 3.40 har vi

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mu \text{ og } X_n \xrightarrow{\sim} \nu \Rightarrow \int f d\mu = \int f d\nu \text{ } f \in \text{bC}(S) \Rightarrow \mu = \nu.$$

Derimod kan vi sagtens have, at  $X_n \xrightarrow{\sim} X$  og  $X_n \xrightarrow{\sim} Y$ , selv om  $X$  og  $Y$  er vidt forskellige. Men der gælder dog, som netop vist, implikationen

$$X_n \xrightarrow{\sim} X \text{ og } X_n \xrightarrow{\sim} Y \Rightarrow P_X = P_Y.$$

Før vi ser nærmere på dette nye konvergens begreb knyttes et par kommentarer til definitionen. Da kontinuitet i metriske rum svarer til følgekontinuitet bevarer  $C(S)$  og dermed konvergens i fordeling under overgang til en ækvivalent metrik. Endvidere ses ved opsplitning i positiv og negativ del, at det er nok at eftervise definitionsbetingelsen for  $f \in \text{bC}(S)_+$ , og da  $f \wedge n \uparrow f$  og  $f \wedge n \in \text{bC}(S)_+$  for  $f \in C(S)_+$  fås af Monoton konvergens, at

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mu (X) \Rightarrow \liminf_n E[f(X_n)] \geq \int f d\mu (E[f(X)]) \text{ for alle } f \in C(S)_+.$$

Denne implikation kan også vendes om, idet der gælder.

**Fk 5**

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mu \Leftrightarrow \liminf_n E[f(X_n)] \geq \int f d\mu \text{ for alle } f \in \text{bC}(S)_+.$$

Bevis. Vi mangler kun at vise  $\Leftarrow$ . Som bemærket er det nok at se på ikke-negative funktioner. Lad derfor  $f \in \text{bC}(S)_+$  med  $0 \leq f \leq M$  været givet. Da

$$\liminf_n E[(M - f)(X_n)] = M - \limsup_n E[f(X_n)]$$

fås af antagelsen brugt på  $f$  og  $M - f$ , som begge er elementer i  $\text{bC}(S)_+$ , at

$$\liminf_n E[f(X_n)] \geq \int f d\mu \text{ og } M - \limsup_n E[f(X_n)] \geq M - \int f d\mu,$$

hvilket alt i alt viser, at

$$\lim_n E[f(X_n)] = \int f d\mu. \quad \diamond$$

Ligesom i Fk 2a kan resultaterne udvides til funktioner, som kun er kontinuerte n.o. Der gælder f.eks.

**Fk 5a**

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mu \Leftrightarrow E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$$

for ethvert  $f \in \text{bM}(S)$ , som er kontinuert  $\mu$ -n.o.

Bevis. Kun  $\Rightarrow$  kræver et bevis. Ved som ovenfor at opsplitte i positiv og negativ del samt dernæst tilsvarende at se på  $f$  og  $M - f$ , hvor  $0 \leq f \leq M$ , indses, at det er nok at vise

$$\liminf_n E[f(X_n)] \geq \int f d\mu$$

for et givet  $f \in \text{bM}(S)_+$ , som er kontinuert  $\mu$ -n.o. Men for ethvert  $g \in \text{bM}(S)_+$  definerer (se Hoffmann side 561 nederst)

$$g_k(x) := \inf\{k \wedge g(y) + k \cdot d(x, y) \mid y \in S\} \quad x \in S, k \geq 1$$

funktioner med flg. egenskaber:  $(g_k)_{k \geq 1} \subseteq C(S)_+$  og

$$0 \leq g_k \leq g_{k+1} \leq g \quad k \geq 1 \quad \text{samt} \quad g_k(x) \uparrow_{k \rightarrow \infty} g(x), \text{ hvis } g \text{ er kontinuert i } x.$$

Da  $f$  pr. antagelse er kontinuert  $\mu$ -n.o., konvergerer  $f_k \uparrow f$   $\mu$ -n.o., hvor  $(f_k)_{k \geq 1}$  er konstrueret ud fra  $f$ , som netop beskrevet. Heraf følger ved brug af Monoton konvergens, at

$$\liminf_n E[f(X_n)] \geq \sup_k \liminf_n E[f_k(X_n)] = \sup_k \int f_k d\mu = \int f d\mu. \quad \diamond$$

## Kriterier for konvergens i fordeling.

### Portmanteau Sætning I.

Lad  $(S, d)$  betegne et separabelt metrisk rum og  $\mu$  et Borel sandsynlighedsmål på  $S$  samt  $(X_n)_{n \geq 1}$  en følge af stokastiske funktioner med værdier i  $S$ . Idet

$$Lip(S, d) := \{f \in C(S) \mid \exists M > 0 : |f(x) - f(y)| \leq M \cdot d(x, y) \quad x, y \in S\}.$$

er flg. udsagn ækvivalente.

- 1)  $X_n \xrightarrow{\sim} \mu$
- 2)  $\int_S g d\mu \leq \liminf_n E[g(X_n)]$  for alle  $g \in bLip(S, d)_+$
- 3)  $\mu(G) \leq \liminf_n P(X_n \in G)$  for alle  $G \subseteq S$  åben
- 4)  $\mu(F) \geq \limsup_n P(X_n \in F)$  for alle  $F \subseteq S$  lukket.

Bemærk at modsat  $C(S)$  afhænger  $Lip(S, d)$  eksplicit af metrikken  $d$ .

Bevis. Da 1)  $\Rightarrow$  2) er indeholdt i definitionen, og ækvivalensen mellem 3) og 4) følger ved overgang til komplementær mængden, vises kun 2)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  1). Antag 2) og lad  $G$  være en given åben delmængde af  $S$ . Definer for  $k \geq 1$

$$g_k(x) = (k \cdot d(x, G^c)) \wedge 1 \quad \text{for } x \in S.$$

Konstruktionen viser, at  $g_k \uparrow \mathbf{1}_G$ , og ved brug af trekantsuligheden ses, at

$$|g_k(x) - g_k(y)| \leq k \cdot d(x, y) \quad x, y \in S, \text{ d.v.s. } g_k \in bLip(S, d)_+.$$

Ifølge 2) og Monoton konvergens gælder derfor

$$\begin{aligned} \mu(G) &= \sup_k \int_S g_k d\mu \leq \sup_k \liminf_n E[g_k(X_n)] \\ &\leq \liminf_n E[\mathbf{1}_G(X_n)] \leq \liminf_n P(X_n \in G). \end{aligned}$$

Antag 3). Som vist i Fk 5 er det nok at vise, at for givet  $f \in bC(S)_+$  er

$$\int_S f d\mu \leq \liminf_n E[f(X_n)].$$

Men for ethvert  $n$  har vi

$$E[f(X_n)] = \int_0^\infty P(f(X_n) > t) dt = \int_0^\infty P(X_n \in \{f > t\}) dt$$

og tilsvarende for  $\int f d\mu$ , og da  $\{f > t\}$  er åben fås af Fatou's lemma, at

$$\int_0^\infty \mu(f > t) dt \leq \int_0^\infty \liminf_n P(f(X_n) > t) dt \leq \liminf_n \int_0^\infty P(f(X_n) > t) dt,$$

hvilket giver den ønskede ulighed. ◇

Til enhver Borel mængde  $B$  tilordnes mængderne

$$B^\circ := \{x \in B \mid \exists \epsilon > 0 : b(x, \epsilon) \subseteq B\} \text{ og } \overline{B} := \{x \in S \mid \forall \epsilon > 0 : b(x, \epsilon) \cap B \neq \emptyset\}.$$

(Hoffmann bruger betegnelserne  $\text{int}(B)$  og  $\text{cl}(B)$ ) D.v.s.  $B^\circ \subseteq B \subseteq \overline{B}$  og

$$B^\circ = B \Leftrightarrow B \text{ \u00e5ben og } B = \overline{B} \Leftrightarrow B \text{ lukket.}$$

$B^\circ$  kaldes *det indre* af  $B$  og er den største \u00e5bne m\u00e6ngde indeholdt i  $B$ , og  $\overline{B}$  kaldes *aftukningen* af  $B$  og er den mindste lukkede m\u00e6ngde, der indeholder  $B$ .  $\text{bd}(B) := \overline{B} \setminus B^\circ$  kaldes *randen* af  $B$ . Med denne notation kan \u00e5kvivalensen mellem 1), 3) og 4) formuleres som.

**Korollar.**  $X_n \xrightarrow{\sim} \mu$  hvis og kun hvis

$$\mu(B^\circ) \leq \liminf_n P(X_n \in B) \leq \limsup_n P(X_n \in B) \leq \mu(\overline{B}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(S).$$

D.v.s. specielt:  $X_n \xrightarrow{\sim} \mu \Rightarrow \lim_n P(X_n \in B) = \mu(B)$  hvis  $\mu(\text{bd}(B)) = 0$ .

Antag at  $S = \mathbf{R}$ . Benyttes korollaret p\u00e5 m\u00e6ngder af formen  $B = (-\infty, x]$ , f\u00e5s, da  $B^\circ = (-\infty, x[$  og  $\overline{B} = B$ , at

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mu \Rightarrow \mu((-\infty, x[) \leq \liminf_n F_n(x) \leq \limsup_n F_n(x) \leq \mu((-\infty, x])$$

og dermed, da  $\mu(\{x\}) = \mu((-\infty, x]) - \mu((-\infty, x[)$ ,

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mu \Rightarrow \lim_n F_n(x) = \mu((-\infty, x]) \text{ hvis } \mu(\{x\}) = 0.$$

$F_n$  er her fordelingsfunktionen for  $X_n$ . Dette karakteriserer ogs\u00e5 konvergens i fordeling p\u00e5  $\mathbf{R}$ , der g\u00e5lder nemlig flg. resultat.

**Konvergens i fordeling p\u00e5  $\mathbf{R}$ .**

Lad  $(X_n)_{n \geq 1}$  betegne en f\u00f8lge af stokastiske variable og lad  $\mu$  betegne et Borel sandsynlighedsmaal p\u00e5  $\mathbf{R}$ . Idet  $F_n$  er fordelingsfunktionen for  $X_n$  og  $F_\mu$  funktionen  $x \mapsto \mu((-\infty, x])$  er flg. punkter \u00e5kvivalente

- $X_n \xrightarrow{\sim} \mu$
- $F_\mu(x-) \leq \liminf_n F_n(x) \leq \limsup_n F_n(x) \leq F_\mu(x) \quad x \in \mathbf{R}$
- $\lim_n F_n(x) = F_\mu(x)$  hvis  $\mu(\{x\}) = 0$
- $\lim_n F_n(x) = F_\mu(x)$  for  $x \in D$  hvor  $D$  er t\u00e6t i  $\mathbf{R}$
- $\liminf_n P(a < X_n < b) \geq \mu(]a, b[)$  for alle  $-\infty < a < b < \infty$ .

Bemærkning. Opskrives udsagnet i tilfældet, hvor  $\mu = P_X$  for en stokastisk variabel  $X$ , fremkommer resultatet i sektion 5.9.

Bevis. Vi mangler kun at vise, at d)  $\Rightarrow$  e)  $\Rightarrow$  a). Lad derfor  $a < b$  betegne givne reelle tal. Da  $D$  er tæt i  $\mathbf{R}$ , findes der følger  $(a_k)_{k \geq 1}$  og  $(b_k)_{k \geq 1}$  af elementer i  $D$ , så at

$$a < a_k < b_k < b \text{ og } a_k \downarrow a \text{ og } b_k \uparrow b.$$

For alle  $n, k \geq 1$  gælder derfor

$$P(a < X_n < b) \geq P(a_k < X_n \leq b_k) = F_n(b_k) - F_n(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\mu(b_k) - F_\mu(a_k).$$

D.v.s.

$$\liminf_n P(a < X_n < b) \geq \sup_k (F_\mu(b_k) - F_\mu(a_k)) = \mu(]a, b[)$$

og dermed d)  $\Rightarrow$  e). For at vise den manglende implikation lader vi  $G \subseteq \mathbf{R}$  betegne en begrænset åben mængde. Som vist i Appendix F findes der højst tællelig mange parvis disjunkte intervaller  $(]a_i, b_i[)_{i \geq 1}$ , så at  $G = \bigcup_{i \geq 1} ]a_i, b_i[$ . Under antagelse af e) gælder derfor for ethvert  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \mu(]a_j, b_j[) &\leq \sum_{j=1}^k \liminf_n P(a_j < X_n < b_j) \\ &\leq \liminf_n \sum_{j=1}^k P(a_j < X_n < b_j) \leq \liminf_n P(X_n \in G), \end{aligned}$$

d.v.s.

$$\mu(G) = \sup_k \sum_{j=1}^k \mu(]a_j, b_j[) \leq \liminf_n P(X_n \in G).$$

Lad dernæst  $G$  betegne en vikårlig åben mængde. Da

$$G_k := G \cap ]-k, k[ \uparrow G \text{ for } k \rightarrow \infty$$

fås af det netop viste

$$\liminf_n P(X_n \in G) \geq \sup_k \liminf_n P(X_n \in G_k) \geq \sup_k \mu(G_k) = \mu(G).$$

Implikationen e)  $\Rightarrow$  a) følger nu af Portmanteau sætningen. ◇

## Regneregler for konvergens i fordeling.

### Portmanteau Sætning II.

Lad  $(S, d)$  og  $(T, \delta)$  betegne separable metriske rum og lad  $(X_n)_{n \geq 1}$  og  $X$  h.h.v.  $(Y_n)_{n \geq 1}$  og  $Y$  betegne stokastiske funktioner med værdier i  $S$  h.h.v.  $T$ . Da gælder

1)  $X_n \xrightarrow{\sim} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{\sim} f(X)$  for enhver  $f : S \rightarrow T$ , som er Borel målelig og kontinuert  $P_X$ -n.o.

2)  $X_n \xrightarrow{\sim} X$  og  $X$  degenereret  $\Rightarrow X_n \rightarrow X$  i sandsynlighed.

3)  $X_n \xrightarrow{\sim} X$ ,  $Y_n \xrightarrow{\sim} Y$  og  $Y$  degenereret  $\Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{\sim} (X, Y)$ .

4)  $X_n \xrightarrow{\sim} X$ ,  $Y_n \xrightarrow{\sim} Y$  og  $X_n$  og  $Y_n$  uafhængige  $n \geq 1 \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{\sim} P_X \otimes P_Y$ .

Bevis. For ethvert  $g \in \text{bC}(T)$  er sammensætningen  $g \circ f$  Borel målelig og kontinuert  $P_X$ -n.o. Ifølge Fk 5a gælder derfor

$$E[g(f(X_n))] = E[g \circ f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int g \circ f dP_X = \int g dP_{f(X)},$$

hvilket viser 1). I 2) antages  $P(X = a) = 1$ . Da  $x \mapsto d(x, a) \wedge 1 \in \text{bC}(S)$  fås

$$E[d(X_n, X) \wedge 1] = E[d(X_n, a) \wedge 1] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[d(X, a) \wedge 1] = d(a, a) \wedge 1 = 0,$$

d.v.s. 2) er også vist. I 3) antages  $P(Y = a) = 1$ . Definer

$$\tilde{d}_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) \wedge 1 + \delta(y_1, y_2) \wedge 1 \quad x_1, x_2 \in S, y_1, y_2 \in T.$$

$\tilde{d}_1$  er da en produktmetrik og for et vilkårligt element  $g \in \text{Lip}(S \times T, \tilde{d})_+$  gælder

$$\begin{aligned} |E[g(X_n, Y_n)] - E[g(X, Y)]| &= |E[g(X_n, Y_n)] - E[g(X, a)]| \\ &\leq E[|g(X_n, Y_n) - g(X_n, a)|] + |E[g(X_n, a)] - E[g(X, a)]| \\ &\leq M \cdot E[\delta(Y_n, a) \wedge 1] + |E[g(X_n, a)] - E[g(X, a)]| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

da  $x \mapsto g(x, a) \in \text{bC}(S)$  og  $Y_n \rightarrow a$  i sandsynlighed. Påstanden følger derfor af den første Portmanteau sætning.

Det generelle bevis for 4) gennemgås ikke, men det vigtige specialtilfælde, hvor  $S = \mathbf{R}^n$  og  $T = \mathbf{R}^m$ , behandles senere i forbindelse med Kontinuitetssætningen.

Det er værd at understrege, at 3) ikke gælder generelt. Et eksempel er flg.

Lad  $X$  betegne en  $U(-1, 1)$ -fordelt stokastisk variabel, d.v.s.  $X \sim -X$ . Lad for alle  $n \geq 1$   $X_n = Y_n = X$  og  $Y = -X$ . Da gælder oplagt

$$X_n \xrightarrow{\sim} X \quad \text{og} \quad Y_n \xrightarrow{\sim} Y.$$

D.v.s. hvis  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\sim} (X, Y)$ , så gælder ifølge 2)

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\sim} X + Y \quad \text{d.v.s.} \quad 2X \sim 0,$$

hvilket klart ikke er rigtigt

### Kontinuitetssætningen for karakteristiske funktioner.

Fra reel analyse vides, at en følge  $(x_k)_{k \geq 1}$  i  $\mathbf{R}^n$  er konvergent, hvis og kun hvis

a)  $(x_k)_{k \geq 1}$  er begrænset, d.v.s.  $\exists r > 0 : (x_k)_{k \geq 1} \subseteq b(\underline{0}, r)$ ,

b)  $L((x_k)_{k \geq 1})$  indeholder højst et punkt.

$L((x_k)_{k \geq 1})$  betegner her mængden af *limespunkter* eller *fortætningspunkter* for følgen  $(x_k)_{k \geq 1}$ , d.v.s.

$$L((x_k)_{k \geq 1}) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists (k_l)_{l \geq 1} \text{ delfølge} : x_{k_l} \rightarrow x\}$$

(tænk over dette) =  $\{x \in \mathbf{R}^n \mid b(x, r) \cap \{x_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset \text{ for alle } r > 0 \text{ og } n \geq 1\}$ .

I gængse matematiske termer udtrykkes dette ved at sige, at i  $\mathbf{R}^n$  udstyret med den Euklidiske metrik, er en mængde kompakt, hvis og kun hvis den er lukket og begrænset. Kompakthed defineres nemlig generelt som følger.

**Definition.** Lad  $(S, d)$  betegne et metrisk rum. En delmængde  $K \subseteq S$  siges at være *kompakt*, hvis  $L((x_k)_{k \geq 1}) \cap K \neq \emptyset$  for enhver punktfølge  $(x_k)_{k \geq 1}$  i  $K$ .

Definitionen viser umiddelbart, at enhver kompakt mængde er lukket, d.v.s. specielt en Borel mængde; og da kompakthed er defineret ved hjælp af konvergens af følger, er begrebet invariant under overgang mellem ækvivalente metrikker.

I ethvert metrisk rum  $(S, d)$  gælder nu flg. generalisation af ovenstående:

*En punktfølge  $(x_k)_{k \geq 1}$  i  $S$  er konvergent, hvis og kun hvis flg. punkter er opfyldte*

a)  $(x_k)_{k \geq 1} \subseteq K$ , hvor  $K \subseteq S$  er kompakt,

b)  $L((x_k)_{k \geq 1})$  indeholder højst et punkt.

Bevis. Antag  $x_k \rightarrow x$ . Da  $x_{k_l} \rightarrow x$  for enhver delfølge  $(k_l)_{l \geq 1}$  er  $x$  det eneste mulige limespunkt, d.v.s. b) gælder. Hvad angår a), er det nok at vise, at

$$K := \{x\} \cup \{x_k \mid k \geq 1\}$$

er kompakt. Lad derfor  $(y_k)_{k \geq 1} \subseteq K$  være givet. Da  $x_k \rightarrow x$  er fællesmængden  $b(x, r)^c \cap \{x_k \mid k \geq 1\}$  endelig for alle  $r > 0$ , og da

$$x \notin L((y_k)_{k \geq 1}) \Rightarrow \exists r > 0 : b(x, r) \cap \{y_k \mid k \geq 1\} = \emptyset,$$

ses at enten er  $x \in L((y_k)_{k \geq 1})$ , eller også indeholder  $(y_k)_{k \geq 1}$  kun endelige mange forskellige elementer. Men da det sidste medfører, at der findes et  $k_0$ , så at  $y_k = x_{k_0}$  for uendelig mange  $k$  og dermed  $x_{k_0} \in L((y_k)_{k \geq 1})$ , er 'kun hvis'-delen vist.

Antag a) og b) d.v.s. at  $L((x_k)_{k \geq 1})$  indeholder præcist et punkt  $\{x\}$ . Vi vil nu vise, at  $x_k \rightarrow x$ . Antag derfor at dette ikke gælder, d.v.s.

$$\exists r > 0 \exists (k_l)_{l \geq 1} \text{ delfølge} : x_{k_l} \notin b(x, r) \text{ for alle } l \geq 1.$$

Da  $(x_{k_l})_{l \geq 1} \subseteq K$  har  $(x_{k_l})_{l \geq 1}$  mindst et limespunkt  $\tilde{x}$ . Men der må gælde  $\tilde{x} = x$  da  $L((x_{k_l})_{l \geq 1}) \subseteq L((x_k)_{k \geq 1})$ , hvilket er umuligt, da  $d(x, x_{k_l}) > r$  for alle  $l \geq 1$ .  $\square$

Det er sjældent let at afgøre, om en given mængde er kompakt, men endelige mængder samt, som netop vist, mængder af formen  $\{x, (x_n)_{n \geq 1}\}$ , hvor  $x_n \rightarrow x$ , er altid kompakte. Endvidere bevares kompakthed under endelig forening og vilkårlig gennemsnit, idet der i ethvert metrisk rum gælder

- a)  $K_1$  og  $K_2$  kompakte  $\Rightarrow K_1 \cup K_2$  kompakt.  
 b)  $K_i$  kompakte for alle  $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} K_i$  kompakt.

Kompakte mængder er normalt meget 'små' mængder, men i  $\mathbf{R}^n$  og mere generelt i polske rum

- Et metrisk rum  $(S, d)$  kaldes et polsk rum, hvis der findes en ækvivalent metrik, muligvis  $d$  selv, som er fuldstændig og separabel -

findes der 'store' kompakte mængder. Mere præcist gælder:

I) For ethvert Borel sandsynlighedsmål  $\mu$  på  $\mathbf{R}^n$  gælder

$$\forall \epsilon \exists K \subseteq \mathbf{R}^n \text{ kompakt} : \mu(K^c) < \epsilon.$$

I') For ethvert Borel sandsynlighedsmål  $\mu$  på et polsk rum  $(S, d)$  gælder

$$\forall \epsilon \exists K \subseteq S \text{ kompakt} : \mu(K^c) < \epsilon.$$

Bevis for I). Da  $b(\underline{0}, k) \uparrow \mathbf{R}^n$  for  $k \rightarrow \infty$  konvergerer  $\mu(b(\underline{0}, k)) \uparrow 1$ , og da  $\overline{b(\underline{0}, k)}$  som nævnt er kompakt for alle  $k$ , følger I) umiddelbart.  $\diamond$

Den samme teknik kan ikke bruges for I'), da et generelt polsk rum ikke er en tællelig og dermed en tællelig voksende foreningsmængde af kompakte mængder. Men ved brug af en i polske rum gældende alternativ karakterisation af kompakthed kan I') dog vises. Beviset findes i afsnittet "Mål på metriske rum".

I) og I') indikerer, at begrebet 'stramhed', som vi nu vil indføre, er et kompakthedsbegreb for konvergens i fordeling for stokastiske funktioner med værdier i et givet polsk rum  $(S, d)$ . Men da vi i dette kursus kun skal betragte tilfældet  $S = \mathbf{R}^n$ , vil jeg i det følgende udelukkende koncentrere mig om dette tilfælde. Begrebets betydning og konsekvenser overføres dog uændret til et vilkårligt polsk rum, men ikke til de generelle endog ikke-separable metriske rum, som Hoffmann arbejder med i sin bog.

**Definition.** En familie af sandsynlighedsmål  $\{\mu_i \mid i \in I\}$  på  $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$  siges at være *stram* (*tight*), hvis

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \subseteq \mathbf{R}^n \text{ kompakt} : \sup_{i \in I} \mu_i(K^c) < \epsilon,$$

og en familie af  $n$ -dimensionale stokastiske vektorer  $(\underline{X}_i)_{i \in I}$  siges at være *stram*, hvis mængden af fordelingsmål  $\{P_{\underline{X}_i} \mid i \in I\}$  udgør en stram familie, d.v.s. hvis

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \subseteq \mathbf{R}^n \text{ kompakt} : \sup_i P(\underline{X}_i \notin K) < \epsilon.$$

Set i lyset af den simple struktur af de kompakte mængder i  $\mathbf{R}^n$  kan den sidste betingelse ækvivalent formuleres som

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0 : \sup_i P(\|\underline{X}_i\| > r) < \epsilon,$$

hvor  $\|\underline{x}\|^2 := \sum_{i=1}^n x_i^2$  for alle  $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ . Markov's ulighed sikrer nu flg. resultat.

**Stramhed i  $\mathbf{R}^n$ . Momentbetingelse.** *En familie  $(\underline{X}_i)_{i \in I}$  af  $n$ -dimensionale stokastiske vektorer er stram, hvis*

$$\sup_i E[\|\underline{X}_i\|^\alpha] < \infty \quad \text{for et } \alpha > 0.$$

I) viser, at enhver et-punktsmængde og derfor enhver endelig familie af mål eller stokastiske vektorer er stram. Denne observation betyder, at en følge  $(\underline{X}_i)_{i \geq 1}$  er stram, hvis man kan vise, at

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \subseteq \mathbf{R}^n \text{ kompakt} : \limsup_i P(\underline{X}_i \notin K) \leq \epsilon.$$

eller ækvivalent

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0 : \limsup_i P(\|\underline{X}_i\| > r) \leq \epsilon.$$

Dette udnyttes i flg. ækvivalente beskrivelse af stramhed.

**Stramhed i  $\mathbf{R}^n$ .** *En følge  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  af  $n$ -dimensionale stokastiske vektorer er stram hvis og kun hvis*

$$\forall \epsilon > 0, \exists a > 0 : \liminf_k E[e^{-a\|\underline{X}_k\|^2}] > 1 - \epsilon.$$

Bevis. Lad  $\epsilon > 0$  være givet. Vælg  $a > 0$ , så at  $\liminf_k E[e^{-a\|\underline{X}_k\|^2}] > 1 - \epsilon/2$ . Da  $x \mapsto 1 - e^{-ax^2}$  er voksende på  $\mathbf{R}_+$  fås af Markov's ulighed at

$$P(\|\underline{X}_k\| > 1/\sqrt{a}) = P(1 - e^{-a\|\underline{X}_k\|^2} > 1 - e^{-1}) \leq \frac{1 - E[e^{-a\|\underline{X}_k\|^2}]}{1 - e^{-1}}$$

for alle  $k \geq 1$ , og da  $1 - e^{-1} > 1/2$  har vi derfor pr. antagelse, at

$$\limsup_k P(\|\underline{X}_k\| > 1/\sqrt{a}) < 2(1 - (1 - \epsilon/2)) = \epsilon,$$

hvilket, som nævnt, medfører stramhed. Kun-hvis delen overlades til læseren.  $\diamond$

Det næste resultat viser, at stramhed er det kompakthedsbegreb for fordelingskonvergens i  $\mathbf{R}^n$ , som vi har antydnet. Der gælder et tilsvarende resultat i ethvert polsk rum, men den generelle sætning, der er kendt under navnet **Prokhorov's Sætning**, er noget mere kompliceret.

### Helly-Bray's Sætning.

Enhver stram følge  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  af  $n$ -dimensionale stokastiske vektorer har mindst et limespunkt, d.v.s. der findes en delfølge  $(k_l)_{l \geq 1}$  og et Borel sandsynlighedsmål  $\mu$  på  $\mathbf{R}^n$ , så at  $\underline{X}_{k_l} \xrightarrow{\sim} \mu$ .

En følge af  $n$ -dimensionale stokastiske vektorer  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  konvergerer i fordeling, hvis og kun hvis den er stram og har præcist et limespunkt.

Første del vises kun i tilfældet  $n = 1$ . Tilfældet  $n > 1$  klares på 'næsten' samme måde, men er dog mere kompliceret, både hvad angår opskrivning og indhold.

Bevis. Lad for ethvert  $k \geq 1$   $F_k$  betegne fordelingsfunktionen for  $X_k$ . Da mængden af rationale tal er tællelig, kan vi, da fordelingsfunktioner kun antager værdier i  $[0, 1]$ , ved successiv udtynding konstruere en delfølge  $(\sigma(k))_{k \geq 1}$ , så at

$$G(r) := \lim_k F_{\sigma(k)}(r) \text{ eksisterer for alle } r \in \mathbf{Q}.$$

Definitionen viser umiddelbart, at for vilkårlige rationale tal  $r_1 < r_2$  er

$$0 \leq G(r_1) \leq G(r_2) \leq 1;$$

og da stramhed af  $(X_k)_{k \geq 1}$  i  $\mathbf{R}$  kan formuleres som

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0 : \sup_k F_k(-r) \leq \epsilon \text{ og } \inf_k F_k(r) \geq 1 - \epsilon$$

ses endvidere, at

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} G(r) = 0 \text{ og } \lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 1.$$

Definer

$$F(x) := \inf_{r > x, r \in \mathbf{Q}} G(r) \quad x \in \mathbf{R}.$$

Simpel reel analyse viser, at  $F$  er ikke-aftagende og højrekontinuert, samt at

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ og } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Lebesgue-Stieltjes målet  $\lambda_F$  hørende til  $F$  er derfor et sandsynlighedsmål, da

$$\lambda_F(\mathbf{R}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_F([-r, r]) = \lim_{r \rightarrow \infty} (F(r) - F(-r)) = 1,$$

og vi vil nu vise, at  $X_{\sigma(k)} \xrightarrow{\sim} \lambda_F$ . Da  $F(x) = \lambda_F([- \infty, x])$  for alle  $x \in \mathbf{R}$ , er det ifølge formel (5.9.2) hertil nok at vise, at

$$F(x-) \leq \liminf_k F_{X_{\sigma(k)}}(x) \leq \limsup_k F_{X_{\sigma(k)}}(x) \leq F(x) \quad \text{for alle } x \in \mathbf{R}.$$

Betragt  $x \in \mathbf{R}$ . For alle  $m \geq 1$  og rationale tal  $r$ , så at  $x - 1/m < r < x$ , har vi

$$F(x - 1/m) \leq G(r) = \lim_k F_{\sigma(k)}(r) \leq \liminf_k F_{X_{\sigma(k)}}(x),$$

og dermed  $F(x-) = \sup_k F(x - 1/m) \leq \liminf_k F_{X_{\sigma(k)}}(x)$ . Tilsvarende har vi for alle rationale tal  $r > x$ , at

$$\limsup_k F_{X_{\sigma(k)}}(x) \leq \lim_k F_{\sigma(k)}(r) = G(r)$$

og dermed den anden ulighed, da  $F(x) = \inf_{r>x, r \in Q} G(r)$  pr. definition.

Anden del vises i den generelle  $\mathbf{R}^n$ -situation. Antag at  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  konvergerer i fordeling, og lad  $\mu$  betegne grænsemålet. D.v.s.  $\mu$  er Borel sandsynlighedsmål på  $\mathbf{R}^n$ , og  $\underline{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$ . Enhver delfølge konvergerer derfor også mod  $\mu$ , d.v.s. mængden af limespunkter består udelukkende af  $\mu$ . Som vist i 5.3 har vi

$$\lim_k P(\|\underline{X}_k\| \geq r) = \mu(b(\underline{0}, r)^c)$$

for ethvert  $r$  for hvilket  $\mu(bd(b(\underline{0}, r))) = 0$ , d.v.s. alle pånær tællelig mange  $r$ . Men da  $\mu(b(\underline{0}, r)^c)$  kan gøres så lille som ønsket ved at vælge  $r$  stor nok, gælder derfor at

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0 : \limsup_k P(\|\underline{X}_k\| > r) \leq \epsilon,$$

d.v.s.  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  er stram. Lad nu omvendt  $\mu$  betegne det entydige limespunkt. Hvis  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  ikke konvergerer i fordeling mod  $\mu$ , findes der pr. definition af konvergens i fordeling, en funktion  $f \in bC(\mathbf{R}^n)$ , et  $\epsilon > 0$  og en delfølge  $(k_l)_{l \geq 1}$ , så at

$$|E[f(\underline{X}_{k_l})] - \int f d\mu| > \epsilon \quad \text{for alle } l \geq 1.$$

Men følgen  $(\underline{X}_{k_l})_{l \geq 1}$  er igen stram, og det derfor eksisterende limespunkt må ifølge entydigheden være  $\mu$ , hvilket tydeligvis er umuligt i h.h.t. valget af  $(k_l)_{l \geq 1}$ .  $\diamond$

**Korollar.** *En stram følge af  $n$ -dimensionale stokastiske vektorer  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  konvergerer i fordeling, hvis  $\lim_k \varphi_{\underline{X}_k}(\underline{t})$  eksisterer for alle  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$ .*

Bevis. Antag at  $\mu_1$  og  $\mu_2$  er limespunkter, d.v.s. der findes delfølger  $(k(l))_{l \geq 1}$  og  $(k(m))_{m \geq 1}$ , så at

$$\underline{X}_{k(l)} \xrightarrow{\sim} \mu_1 \quad \text{og} \quad \underline{X}_{k(m)} \xrightarrow{\sim} \mu_2.$$

Da

$$\underline{t} \mapsto \cos(\underline{a} \cdot \underline{t}) \quad \text{og} \quad \underline{t} \mapsto \sin(\underline{a} \cdot \underline{t})$$

er kontinuerte og begrænsede for ethvert  $\underline{a} \in \mathbf{R}^n$ , betyder dette, at

$$\int e^{i\underline{a} \cdot \underline{t}} \mu_1(d\underline{a}) = \lim_l \varphi_{\underline{X}_{k(l)}}(\underline{t}) = \lim_k \varphi_{\underline{X}_k}(\underline{t}) = \lim_m \varphi_{\underline{X}_{k(m)}}(\underline{t}) = \int e^{i\underline{a} \cdot \underline{t}} \mu_2(d\underline{a})$$

for alle  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$ , d.v.s.  $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ . Ifølge Entydighedssætningen for karakteristiske funktioner er  $\mu_1$  og  $\mu_2$  derfor identiske, d.v.s., der er højst et og dermed på grund af stramhed præcist et limespunkt.  $\diamond$

Hovedsætningen om fordelingskonvergens i  $\mathbf{R}^n$  den såkaldte *Kontinuitetssætning*

for karakteristiske funktioner, viser, at fordelingskonvergens i  $\mathbf{R}^n$  er ækvivalent med punktvis konvergens af de tilhørende karakteristiske funktioner. Der gælder nemlig flg.resultat.

**Kontinuitetssætningen for karakteristiske funktioner.**

Lad  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  betegne  $n$ -dimensionale stokastiske vektorer, så at  $\lim_k \varphi_{\underline{X}_k}(\underline{t}) = \gamma(\underline{t})$  for alle  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$ , hvor  $\gamma : \mathbf{R}^n \rightarrow C$  er kontinuert i  $\underline{0}$ . Da er  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  stram, og der findes et Borel sandsynlighedsmål  $\mu$  på  $\mathbf{R}^n$ , så at  $\underline{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$ . Endvidere er  $\gamma(\underline{t}) = \hat{\mu}(\underline{t})$  for alle  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$ .

Bevis. Da den sidste påstand er umiddelbar, udestår kun implikationen

$$\gamma \text{ kontinuert i } \underline{0} \Rightarrow (\underline{X}_k)_{k \geq 1} \text{ stram.}$$

Ifølge Kf1 er  $|\gamma(\underline{t})| \leq \gamma(\underline{0}) = 1$  for alle  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$ . D.v.s. hvis  $U_1, \dots, U_n$  er uafhængige  $N(0, 2)$ -fordelte stokastiske variable og  $\underline{U} := (U_1, \dots, U_n)$ , sikrer  $\gamma$ 's kontinuitet i punktet  $\underline{0}$ , at der til et givent  $\epsilon$  findes et  $a > 0$ , så at

$$|E[\gamma(a\underline{U})]| > 1 - \epsilon,$$

thi for  $a_n \rightarrow 0$  konvergerer  $\gamma(a_n \underline{U})$  mod  $\gamma(\underline{0}) = 1$   $P$ -n.o. domineret af 1. Men da

$$\varphi_{\underline{U}}(\underline{t}) = \prod_{i=1}^n \varphi_{U_i}(t_i) = \prod_{i=1}^n \exp(-t_i^2) = e^{-\|\underline{t}\|^2} \quad \text{for alle } \underline{t} \in \mathbf{R}^n,$$

fås af antagelserne, Lebesgue's Sætning samt formel (4.18.4), d.v.s. Cf4, at

$$E[\gamma(a\underline{U})] = \lim_k E[\varphi_{\underline{X}_k}(a\underline{U})] = \lim_k E[\varphi_{\underline{U}}(a\underline{X}_k)] = \lim_k E[e^{-a^2 \cdot \|\underline{X}_k\|^2}].$$

D.v.s.  $\liminf_k E[e^{-a^2 \cdot \|\underline{X}_k\|^2}] > 1 - \epsilon$ , og  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  er derfor stram.  $\diamond$

**Korollar 1** Lad  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  og  $\underline{X}$  betegne  $n$ -dimensionale stokastiske vektorer og  $\mu$  et Borel sandsynlighedsmål på  $\mathbf{R}^n$ . Da gælder

$$\underline{X}_k \xrightarrow{\sim} \underline{X} \Leftrightarrow \lim_k \varphi_{\underline{X}_k}(\underline{t}) = \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) \quad \text{for alle } \underline{t} \in \mathbf{R}^n,$$

og tilsvarende

$$\underline{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu \Leftrightarrow \lim_k \varphi_{\underline{X}_k}(\underline{t}) = \hat{\mu}(\underline{t}) \quad \text{for alle } \underline{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Specielt ses at  $\underline{X}_k \xrightarrow{\sim} \underline{X}$  i  $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \underline{t} \cdot \underline{X}_k \xrightarrow{\sim} \underline{t} \cdot \underline{X}$  i  $\mathbf{R}$  for alle  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$ .

Bevis. Første del er klar, da  $\varphi_{\underline{X}}$  og  $\hat{\mu}$  er kontinuerte overalt specielt i  $\underline{0}$ . Anden del ses ved at bemærke, at  $\varphi_{\underline{Y}}(\underline{t}) = \varphi_{\underline{t} \cdot \underline{Y}}(1)$  for enhver  $n$ -dimensional stokastisk vektor  $\underline{Y}$  og ethvert  $\underline{t} \in \mathbf{R}^n$ .

**Korollar 2** Lad  $\underline{X}$  og  $(\underline{X}_k)_{k \geq 1}$  samt  $\underline{Y}$  og  $(\underline{Y}_k)_{k \geq 1}$  betegne h.h.v.  $n$  og  $m$ -dimensionale stokastiske vektorer, så at  $\underline{X}_k$  og  $\underline{Y}_k$  er uafhængige for alle  $k$ . Da gælder

$$\underline{X}_k \xrightarrow{\sim} \underline{X} \quad \text{og} \quad \underline{Y}_k \xrightarrow{\sim} \underline{Y} \quad \Rightarrow \quad (\underline{X}_k, \underline{Y}_k) \xrightarrow{\sim} P_{\underline{X}} \otimes P_{\underline{Y}}.$$

Bevis. Da

$$\varphi_{(\underline{X}_k, \underline{Y}_k)}(\underline{t}, \underline{s}) = \varphi_{\underline{X}_k}(\underline{t}) \cdot \varphi_{\underline{Y}_k}(\underline{s}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) \cdot \varphi_{\underline{Y}}(\underline{s})$$

for alle  $(\underline{t}, \underline{s}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n+m}$  og

$$(\underline{t}, \underline{s}) \mapsto \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) \cdot \varphi_{\underline{Y}}(\underline{s})$$

er kontinuert, sikrer Kontinuitetssætningen, at  $((\underline{X}_n, \underline{Y}_n))_{n \geq 1}$  konvergerer i fordeling. Identifikationen af grænsemålet følger dernæst af Entydighedssætningen, da

$$(\underline{t}, \underline{s}) \mapsto \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) \cdot \varphi_{\underline{Y}}(\underline{s})$$

ifølge Kf5 er den Fouriertransformerede for sandsynlighedsmålet  $P_{\underline{X}} \otimes P_{\underline{Y}}$ .  $\diamond$

### Den Centrale Grænseværdisætning.

Kontinuitetssætningen er det ideelle værktøj til at undersøge flg. konvergensproblemer ofte omtalt som et CLT-problem (Central Limit Theorem).

Givet en følge af uafhængige stokastiske variable  $(X_n)_{n \geq 1}$  findes der da talfølger  $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq (0, \infty)$  og  $(b_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbf{R}$ , så at

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - b_n}{a_n} \xrightarrow{\sim} \mu,$$

hvor  $\mu$  er et sandsynlighedsmål, som ikke er koncentreret i et punkt, d.v.s. ikke-degenereret. Udtrykt ved hjælp af Kontinuitetssætningen er dette ækvivalent med at spørge om eksistensen af  $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq (0, \infty)$  og  $(b_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbf{R}$ , så at

$$\lim_n e^{itb_n/a_n} \cdot \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t/a_n) \rightarrow_n \psi(t) \quad t \in \mathbf{R},$$

hvor  $\psi$  er en karakteristisk funktion for ikke degenereret fordeling. Formuleret på denne sidste måde, er det naturligt også at lade  $\varphi_{X_k}$ 'erne variere med  $n$ , d.v.s. i stedet for at tage udgangspunkt i en følge af uafhængige stokastiske variable, starter vi med et såkaldt *uafhængigt trekantsskema*  $(X_{nj})_{1 \leq j \leq n}$ , d.v.s.

$$\begin{array}{c} X_{11} \\ X_{21}, X_{22} \\ \dots \\ X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn} \\ \dots \end{array}$$

hvor  $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$  er uafhængige for alle  $n$ . En følge af uafhængige variable  $(X_n)_{n \geq 1}$  giver trivielt anledning til et uafhængigt trekantsskema af flg. form

$$\begin{array}{c} X_1 \\ X_1, X_2 \\ \dots \\ X_1, X_2, \dots, X_n \\ \dots \end{array}$$

Problemet er nu om der findes konstanter  $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq (0, \infty)$  og  $(b_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbf{R}$  eller rettere  $(m_{nk})_{1 \leq k \leq n} \subseteq \mathbf{R}$  så at

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_{nk} - \sum_{k=1}^n m_{nk}}{a_n} = \frac{\sum_{k=1}^n (X_{nk} - m_{nk})}{a_n}$$

konvergerer i fordeling mod en ikke degenereret fordeling, eller ækvivalent om

$$\prod_{k=1}^n \varphi_{X_{nk}-m_{nk}}(t/a_n) = \exp\left(-\frac{it}{a_n} \sum_{k=1}^n m_{nk}\right) \cdot \prod_{k=1}^n \varphi_{X_{nk}}(t/a_n) \rightarrow \psi(t)$$

for alle  $t \in \mathbf{R}$ , hvor  $\psi$  er en karakteristisk funktion for ikke degenereret fordeling. For at udelukke at et enkelt led i summen er alt dominerende, restrikerer man sig normalt til situationer, hvor den såkaldte *Uan*-betingelse, d.v.s.

$$\lim_n \sup_{1 \leq k \leq n} P(|X_{nk} - m_{nk}|/a_n \geq \epsilon) = 0 \text{ for alle } \epsilon > 0,$$

er opfyldt. Uan-betingelsen har den effekt, at kun bestemte typer fordelinger kan fremkomme som grænseværdi på ovennævnte måde. F.eks. poisson og normale fordelinger, men derimod f.eks. ikke binomial og uniforme fordelinger. Helt præcist er de eneste mulige grænsfordelinger under uan-betingelsen de såkaldte *uendelig delelige fordelinger* (se Hoffmann sektion 5.28).

De historisk vigtigste resultater er de *normale CLT*, d.v.s. udsagn som sikrer, at grænsfordelingen eksisterer og er en normal fordeling. Vi skal udelukkende beskæftige os med denne type, idet vi skal omtale tre normale CLT-resultater samt diskutere deres indbyrdes relationer. Udgangspunktet er i alle tre situationer et uafhængigt trekantsskema, hvor de indgående variable alle har endeligt andet moment, og konstanterne vælges i h.h.t.

$$m_{nk} := E[X_{nk}] \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{og} \quad a_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_{nk})} \quad n \geq 1.$$

I stedet for  $a_n$  benyttes betegnelsen  $s_n$ , d.v.s.  $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_{nk}) \quad n \geq 1$ .

### CLT 1 Den Centrale Grænseværdisætning, klassisk udgave.

Lad  $(X_n)_{n \geq 1}$  betegne en iid-følge, hvor den fælles fordeling har endelig middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2 > 0$ . Da konvergerer

$$U_n := \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu) \xrightarrow{\sim} N(0, 1).$$

Bevis. Lad  $\varphi$  betegne den karakteristiske funktion for  $X_1 - \mu$ . Regnereglerne for karakteristiske funktioner viser, at for alle  $t \in \mathbf{R}$  og  $n \geq 1$  er

$$\varphi_{U_n}(t) = \varphi(t/\sqrt{n\sigma^2})^n = \left(1 - \frac{n(1 - \varphi(t/\sqrt{n\sigma^2}))}{n}\right)^n.$$

Men da  $E[X_1 - \mu] = 0$  og  $\text{Var}(X_1 - \mu) = \sigma^2$  fås af et vist Taylorudviklings resultat for karakteristiske funktioner, at

$$\varphi_{U_n}(t) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2} \quad t \in \mathbf{R}$$

og dermed ifølge Kontinuitetssætningen det ønskede resultat.  $\diamond$

**CLT 2 Lyapounov's Sætning.**

Lad  $\{X_{nj} \mid 1 \leq j \leq n\}$  betegne et uafhængigt trekantsskema, så at  $X_{nj}$ 'erne har endelig første og andet moment. Sæt

$$\mu_{nj} = E[X_{nj}], \quad \sigma_{nj}^2 = \text{Var}(X_{nj}) \quad \text{og} \quad s_n := \sqrt{\sigma_{n1}^2 + \cdots + \sigma_{nn}^2}$$

for  $n \geq 1$  og antag, at  $s_n > 0$  for alle  $n$ . Hvis Lyapounov's betingelse er opfyldt, d.v.s. hvis

$$\exists \alpha > 2 : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^\alpha} \sum_{j=1}^n E[|X_{nj} - \mu_{nj}|^\alpha] = 0,$$

konvergerer

$$U_n := \frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^n (X_{nj} - \mu_{nj}) \xrightarrow{\text{d}} N(0, 1).$$

Lyapounov's betingelse er specielt opfyldt, hvis  $s_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$  og  $X_{nj} - \mu_{nj}$ 'erne er uniformt begrænsede af en konstant  $M$ . For i denne situation gælder

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{j=1}^n E[|X_{nj} - \mu_{nj}|^3] \leq \frac{M}{s_n^3} \sum_{j=1}^n E[|X_{nj} - \mu_{nj}|^2] = \frac{M}{s_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

I beviset kan vi uden tab af generalitet antage, at Lyapounov's betingelse er opfyldt for et  $\alpha$  i intervallet  $[2, 3]$ . Thi betragt for givet  $n \geq 1$  produktrummet  $\Omega \times E_n$ , hvor  $E_n := \{1, \dots, n\}$ , udstyret med produkt  $\sigma$ -algebraen  $\mathcal{F} \times 2^{E_n}$ . Definer

$$\mu_n(A) := \sum_{j=1}^n E[\mathbf{1}_A(\cdot, j) \cdot \left| \frac{Z_{nj}}{s_n} \right|^2] \quad A \in \mathcal{F} \times 2^{E_n},$$

hvor  $Z_{nj} := X_{nj} - \mu_{nj}$  for alle  $n$  og  $j$ .  $\mu_n$  er da et sandsynlighedsmål, og ifølge korollaret til Jensen's ulighed gælder derfor for ethvert  $\delta \geq 1$ , at

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_n^3} \sum_{j=1}^n E[|Z_{nj}|^3] &= \sum_{j=1}^n E\left[ \left| \frac{Z_{nj}}{s_n} \right| \cdot \left| \frac{Z_{nj}}{s_n} \right|^2 \right] = \int f d\mu_n \\ &\leq \left( \int f^\delta d\mu_n \right)^{1/\delta} \leq \left( \sum_{j=1}^n E\left[ \left| \frac{Z_{nj}}{s_n} \right|^\delta \cdot \left| \frac{Z_{nj}}{s_n} \right|^2 \right] \right)^{1/\delta} = \left( \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n E[|Z_{nj}|^{2+\delta}] \right)^{1/\delta}, \end{aligned}$$

hvor

$$f(\omega, j) := \left| \frac{Z_{nj}(\omega)}{s_n} \right| \quad \text{for alle } (\omega, j) \in \Omega \times E_n.$$

Bevis for Lyapounov's Sætning. Ifølge Jensen's ulighed er

$$\max_{1 \leq j \leq n} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2} = \max_{1 \leq j \leq n} E\left[ \left( \frac{X_{nj} - \mu_{nj}}{s_n} \right)^2 \right] \leq \left( \frac{1}{s_n^\alpha} \sum_{j=1}^n E[|X_{nj} - \mu_{nj}|^\alpha] \right)^{2/\alpha},$$

d.v.s. Lyapounov's betingelse sikrer, at  $\max_{1 \leq j \leq n} \sigma_{nj}^2/s_n^2 \rightarrow 0$  for  $n \rightarrow \infty$ , og da  $E[(X_{nj} - \mu_{nj})/s_n] = 0$  fås af tillægget til formel (4.18.7), at

$$|\varphi_{(X_{nj}-\mu_{nj})/s_n}(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2}| \leq |t|^\alpha \frac{E[|X_{nj} - \mu_{nj}|^\alpha]}{s_n^\alpha}.$$

Ifølge et simpelt induktionsargument gælder for ethvert sæt af komplekse tal  $a_1, \dots, a_n$  og  $b_1, \dots, b_n$  med længde højst 1, at

$$|\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_j - b_j|,$$

og benyttes dette for givet  $t$  og  $n$  så stor, at  $t^2 \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \sigma_{nj}^2/s_n^2 < 1$ , fås at

$$\begin{aligned} |\varphi_{U_n}(t) - \prod_{j=1}^n (1 - \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2})| &= |\prod_{j=1}^n \varphi_{(X_{nj}-\mu_{nj})/s_n}(t) - \prod_{j=1}^n (1 - \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2})| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\varphi_{(X_{nj}-\mu_{nj})/s_n}(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2}| \leq |t|^\alpha \sum_{j=1}^n \frac{E[|X_{nj} - \mu_{nj}|^\alpha]}{s_n^\alpha}. \end{aligned}$$

D.v.s. Lyapounov's betingelse viser, at

$$\lim_n \varphi_{U_n}(t) = \lim_n \prod_{j=1}^n (1 - \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2}),$$

og ifølge Kontinuitetssætningen er det derfor nok at vise, at

$$\lim_n \prod_{j=1}^n (1 - \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2}) = e^{-t^2/2}$$

for ethvert  $t$ . Ved brug af logaritmfunktionen ses, at dette er ækvivalent med

$$\sum_{j=1}^n \log(1 - \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2}) + \frac{t^2}{2} = \sum_{j=1}^n \left( \log(1 - \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2}) + \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2} \right) \rightarrow 0,$$

hvilket følger af uligheden

$$|\log(1 - x) + x| \leq 2x^2 \quad \text{for } |x| \leq \frac{1}{2}$$

da

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{t^2}{2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2} \right)^2 \leq \frac{t^4}{4} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2} = \frac{t^4}{4} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \quad \diamond$$

**CLT 3 Lindeberg's Sætning.**

Lad  $\{X_{nj} \mid 1 \leq j \leq n\}$  betegne et uafhængigt trekantsskema, så at  $X_{nj}$ 'erne har endelig første og andet moment. Sæt

$$\mu_{nj} = E[X_{nj}], \quad \sigma_{nj}^2 = \text{Var}(X_{nj}) \quad \text{og} \quad s_n := \sqrt{\sigma_{n1}^2 + \cdots + \sigma_{nn}^2}$$

for  $n \geq 1$  og antag, at  $s_n > 0$  for alle  $n$ . Hvis Lindeberg's betingelse er opfyldt, d.v.s. hvis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{-2} \sum_{j=1}^n \int_{\{|X_{nj} - \mu_{nj}| > \epsilon s_n\}} (X_{nj} - \mu_{nj})^2 dP = 0 \quad \text{for alle } \epsilon > 0$$

konvergerer

$$U_n := \frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^n (X_{nj} - \mu_{nj}) \xrightarrow{\sim} N(0, 1).$$

Bevis. Ifølge Kontinuitetssætningen er det nok at vise, at for ethvert  $t \in \mathbf{R}$  gælder

$$\varphi_{U_n}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{\tilde{X}_{nj}}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2},$$

hvor  $\tilde{X}_{nj} = (X_{nj} - \mu_{nj})/s_n$ . Lad  $t \in \mathbf{R}$  være givet. Ved at bruge en allerede benyttet vurdering af afstanden mellem to produkter af komplekse tal, hvis faktorer har længde højst 1, fås, da  $\sum_{j=1}^n E[\tilde{X}_{nj}^2] = 1$  for alle  $n$ , at

$$|\varphi_{U_n}(t) - e^{-t^2/2}| = \left| \prod_{j=1}^n \varphi_{\tilde{X}_{nj}}(t) - \prod_{j=1}^n e^{-\frac{t^2}{2} \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2]} \right| \leq \sum_{j=1}^n |\varphi_{\tilde{X}_{nj}}(t) - e^{-\frac{t^2}{2} \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2]}|.$$

Uligheden  $|e^{-x} - 1 + x| \leq x^2$  for  $x \geq 0$  viser, at for alle  $j$  og  $n$  er

$$|\varphi_{\tilde{X}_{nj}}(t) - e^{-\frac{t^2}{2} \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2]}| \leq |\varphi_{\tilde{X}_{nj}}(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2]| + \left( \frac{t^2}{2} \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2] \right)^2,$$

d.v.s.

$$|\varphi_{U_n}(t) - e^{-t^2/2}| \leq \sum_{j=1}^n |\varphi_{\tilde{X}_{nj}}(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2]| + \frac{t^4}{4} \sum_{j=1}^n E[\tilde{X}_{nj}^2]^2,$$

og vi skal derfor blot vise, at de to summer konvergerer mod 0 hver for sig.

Hvad angår den sidste, har vi da  $\sum_{j=1}^n E[\tilde{X}_{nj}^2] = 1$ , at for ethvert  $\epsilon > 0$  og  $n \geq 1$  er

$$\sum_{j=1}^n E[\tilde{X}_{nj}^2]^2 \leq \max_{1 \leq j \leq n} E[\tilde{X}_{nj}^2] \leq \epsilon^2 + \sum_{j=1}^n E[\tilde{X}_{nj}^2, |\tilde{X}_{nj}| > \epsilon],$$

hvilket sammen med Lindeberg's betingelse viser den ønskede konvergens. I forbindelse med den første sum benyttes uligheden

$$|e^{iy} - 1 - iy + y^2/2| \leq y^2 \wedge |y|^3/6 \quad y \in \mathbf{R}.$$

Da  $\tilde{X}_{nj}$ 'erne har middelværdi 0, fås heraf for alle  $1 \leq j \leq n$  og  $\epsilon > 0$ , at

$$\begin{aligned} |\varphi_{\tilde{X}_{nj}}(t) - 1 + t^2/2 \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2]| &= |E[e^{it\tilde{X}_{nj}} - 1 - it\tilde{X}_{nj} + t^2/2 \cdot \tilde{X}_{nj}^2]| \\ &\leq t^3/6 \cdot E[|\tilde{X}_{nj}|^3, |\tilde{X}_{nj}| \leq \epsilon] + t^2 \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2, |\tilde{X}_{nj}| > \epsilon] \\ &\leq \epsilon \cdot t^3/6 \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2] + t^2 \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2, |\tilde{X}_{nj}| > \epsilon], \end{aligned}$$

d.v.s.

$$|\sum_{j=1}^n E[e^{it\tilde{X}_{nj}} - 1 + t^2/2 \cdot \tilde{X}_{nj}^2]| \leq \epsilon \cdot t^3/6 + \sum_{j=1}^n E[\tilde{X}_{nj}^2, |\tilde{X}_{nj}| > \epsilon],$$

hvilket igen via Lindeberg's betingelse viser den ønskede konvergens. D.v.s.

$$|\varphi_{U_n}(t) - e^{-t^2/2}| \leq \sum_{j=1}^n |\varphi_{\tilde{X}_{nj}}(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \cdot E[\tilde{X}_{nj}^2]| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

og Lindeberg's Sætning er dermed vist. ◇

*Lyapounov's betingelse medfører Lindeberg's betingelse.*

Bevis. Lad  $\epsilon > 0$  være givet. For alle  $1 \leq j \leq n$  og  $\alpha > 2$  har vi, at

$$\begin{aligned} s_n^{-2} \int_{\{|X_{nj} - \mu_{nj}| > \epsilon s_n\}} (X_{nj} - \mu_{nj})^2 dP &= \int_{\{|\frac{X_{nj} - \mu_{nj}}{s_n}| > \epsilon\}} \frac{(X_{nj} - \mu_{nj})^2}{s_n^2} dP \\ &\leq \epsilon^{2-\alpha} \int \frac{|X_{nj} - \mu_{nj}|^\alpha}{s_n^\alpha} dP \leq \epsilon^{2-\alpha} \cdot s_n^{-\alpha} \cdot E[|X_{nj} - \mu_{nj}|^\alpha], \end{aligned}$$

og dermed for alle  $\epsilon > 0$ ,  $n \geq 1$  og  $\alpha > 2$

$$s_n^{-2} \sum_{j=1}^n \int_{\{|X_{nj} - \mu_{nj}| > \epsilon s_n\}} (X_{nj} - \mu_{nj})^2 dP \leq \epsilon^{2-\alpha} \cdot s_n^{-\alpha} \sum_{j=1}^n E[|X_{nj} - \mu_{nj}|^\alpha]. \quad \diamond$$

*Lindeberg's betingelse er opfyldt i iid-tilfældet*

Lad  $\mu$  og  $\sigma^2 > 0$  betegne den fælles middelværdi og varians. Da  $s_n^2 = n \cdot \sigma^2$  fås dermed for ethvert  $\epsilon > 0$

$$s_n^{-2} \sum_{j=1}^n \int_{\{|X_{nj} - \mu_{nj}| > \epsilon s_n\}} (X_{nj} - \mu_{nj})^2 dP = \sigma^{-2} \int_{\{|X_1 - \mu| > \sqrt{n} \cdot \epsilon \cdot \sigma\}} (X_1 - \mu)^2 dP,$$

som ifølge Lebesgue's Sætning konvergerer mod 0 for  $n \rightarrow \infty$ . ◇

Regnereglerne for konvergens i fordeling viser, at for stokastiske variable  $(X_n)_{n \geq 1}$  og  $(Y_n)_{n \geq 1}$  gælder

$$X_n \overset{\sim}{\rightarrow} N(0, \sigma^2) \text{ og } Y_n \rightarrow 0 \text{ s.s.} \Rightarrow X_n + Y_n \overset{\sim}{\rightarrow} N(0, \sigma^2)$$

for ethvert  $\sigma^2 \in [0, \infty)$ . Denne ide kan ved at opsplitte givne variable i en 'lille' og en 'stor' del udnyttes til at bevise normale CLT-sætninger under svagere integrabilitetsbetingelser end ovenfor anvendt. Opsplitningen sker ofte ved hjælp af en Borel funktion  $q: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , idet vi skriver

$$X_{nj} = q(X_{nj}) + (X_{nj} - q(X_{nj})),$$

hvor første del spiller rollen som den 'lille' del og den anden den 'store' del. Et eksempel på et sådant resultat er følgende.

**CLT 4 En normal CLT-sætning uden eksistens af momenter.**

Lad  $\{X_{nj} \mid 1 \leq j \leq n\}$  betegne et uafhængigt trekantsskema og  $q: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  en Borel funktion, så at  $m_{nj} = E[q(X_{nj})]$  og  $\sigma_{nj}^2 = \text{Var}(q(X_{nj}))$  eksisterer og er endelige for alle  $1 \leq j \leq n$ . Antag endvidere at

i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n m_{nj} = 0 \text{ og } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sigma_{nj}^2 = \sigma^2$$

ii)

$$q(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - q(x)}{x^2}$$

iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \int_{\{|X_{nj}| > \epsilon\}} (1 + q(X_{nj})^2) dP \right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

for et  $0 \leq \sigma^2 < \infty$ . Da konvergerer

$$U_n := \sum_{j=1}^n (X_{nj} - m_{nj}) \overset{\sim}{\rightarrow} N(0, \sigma^2).$$

Bevis. For ethvert  $n$  er

$$\sum_{j=1}^n (X_{nj} - m_{nj}) = \sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) + \sum_{j=1}^n (q(X_{nj}) - m_{nj}),$$

og ifølge de ovenstående bemærkninger er det derfor nok at vise

A)  $\sum_{j=1}^n (q(X_{nj}) - m_{nj}) \overset{\sim}{\rightarrow} N(0, \sigma^2)$ .

B)  $\sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) \rightarrow 0$  i sandsynlighed.

Vi viser først A). Hvis  $\sigma^2 = 0$  ses, at

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^n (q(X_{nj}) - m_{nj})\right)^2\right] = \sum_{j=1}^n \sigma_{nj}^2 \rightarrow 0,$$

d.v.s.

$$\sum_{j=1}^n (q(X_{nj}) - m_{nj}) \rightarrow 0 \text{ i } L^2(P)$$

og derfor også konvergens i fordeling mod  $\delta_0 = N(0, 0)$ . Hvis derimod  $\sigma^2 > 0$ , skriver vi for  $n$  så stor at  $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{nj}^2 > 0$ ,

$$\sum_{j=1}^n (q(X_{nj}) - m_{nj}) = \sigma \cdot \frac{s_n}{\sigma} \cdot \frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^n (q(X_{nj}) - m_{nj}),$$

hvoraf A) følger, hvis

$$\frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^n (q(X_{nj}) - m_{nj}) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Dette vises ved at eftervise, at det uafhængige trekantsskema  $\{q(X_{nj})\}_{1 \leq j \leq n}$  opfylder Lindeberg's betingelse holder. Lad  $\epsilon > 0$  være givet. Da

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{\{|q(X_{nj}) - m_{nj}| > \epsilon \cdot s_n\}} (q(X_{nj}) - m_{nj})^2 dP \\ & \leq \frac{2}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{\{|q(X_{nj}) - m_{nj}| > \epsilon \cdot s_n\}} q(X_{nj})^2 dP + \frac{2}{s_n^2} \sum_{j=1}^n m_{nj}^2 \end{aligned}$$

er det ifølge i) nok at vise, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_{\{|q(X_{nj}) - m_{nj}| > \epsilon \cdot \sigma^2 / 2\}} q(X_{nj})^2 dP = 0.$$

Men for  $n$  stor og dermed ifølge i)  $\sup_{1 \leq j \leq n} |m_{nj}|$  lille er for alle  $1 \leq j \leq n$

$$\{|q(X_{nj}) - m_{nj}| > \epsilon \cdot \sigma^2 / 2\} \subseteq \{|q(X_{nj})| > \epsilon \cdot \sigma^2 / 4\} \subseteq \{|X_{nj}| > \tilde{\epsilon}\},$$

hvor  $\tilde{\epsilon} > 0$  er valgt i h.h.t. ii), så at  $|q(x)| > \epsilon \cdot \sigma^2 / 4 \Rightarrow |x| > \tilde{\epsilon}$ . Påstanden og dermed A) følger nu umiddelbart af iii).

Hvad angår B) skrives for alle  $\epsilon > 0$  og alle  $n$

$$\sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) = \sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) \cdot \mathbf{1}_{\{|X_{nj}| \leq \epsilon\}} + \sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) \cdot \mathbf{1}_{\{|X_{nj}| > \epsilon\}}$$

Da  $\lim_n \sum_{j=1}^n P(|X_{nj}| > \epsilon) = 0$  for ethvert  $\epsilon > 0$  ifølge iii) konvergerer

$$\sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) \cdot \mathbf{1}_{\{|X_{nj}| > \epsilon\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ i sandsynlighed,}$$

for ethvert  $\epsilon > 0$ . Et argument baseret på trekantsuligheden i en metrik, der svarer til konvergens i sandsynlighed, sikrer derfor, at det er nok at vise, at

$$\limsup_n E\left[\left|\sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) \cdot \mathbf{1}_{\{|X_{nj}| \leq \epsilon\}}\right|\right] \rightarrow 0 \text{ for } \epsilon \rightarrow 0.$$

For  $\epsilon > 0$  så lille, at  $|q(x)| > |x|/2$  for  $0 < |x| \leq \epsilon$  (her benyttes ii)) gælder nu

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) \cdot \mathbf{1}_{\{|X_{nj}| \leq \epsilon\}}\right| &\leq \sum_{j=1}^n \frac{|X_{nj} - q(X_{nj})|}{q(X_{nj})^2} \cdot q(X_{nj})^2 \cdot \mathbf{1}_{\{0 < |X_{nj}| \leq \epsilon\}} \\ &\leq M_\epsilon \sum_{j=1}^n q(X_{nj})^2 \cdot \mathbf{1}_{\{0 < |X_{nj}| \leq \epsilon\}} \quad \text{hvor } M_\epsilon := \sup_{0 < |x| \leq \epsilon} \frac{|x - q(x)|}{q(x)^2}. \end{aligned}$$

D.v.s. for alle  $n$  er

$$E\left[\left|\sum_{j=1}^n (X_{nj} - q(X_{nj})) \cdot \mathbf{1}_{\{|X_{nj}| \leq \epsilon\}}\right|\right]$$

domineret af

$$M_\epsilon \cdot \sum_{j=1}^n E[q(X_{nj})^2] = M_\epsilon \cdot \sum_{j=1}^n (\sigma_{nj}^2 + m_{nj}^2),$$

som ifølge i) konvergerer mod  $M_\epsilon \cdot \sigma^2$  for  $n \rightarrow \infty$ . Men da

$$\sup_{0 < |x| \leq \epsilon} \frac{|x - q(x)|}{q(x)^2} = \sup_{0 < |x| \leq \epsilon} \frac{|x - q(x)|}{x^2} \cdot \frac{x^2}{q(x)^2} \leq 4 \cdot \sup_{0 < |x| \leq \epsilon} \frac{|x - q(x)|}{x^2},$$

konvergerer  $M_\epsilon$  mod 0 for  $\epsilon \rightarrow 0$ , hvilket viser B) og dermed sætningen.  $\diamond$

### Betingede middelværdier.

Som optakt til emnet betingede middelværdier vender vi kort tilbage til begrebet  $\sigma$ -algebraer. Allerede ved introduktionen af et sandsynlighedsfelt  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , omtaltes elementerne i hændelsessystemet  $\mathcal{F}$ , som de mængder vi var interesseret i og derfor 'kendte'. Dette synspunkt er udgangspunktet for den måde, vi i det følgende skal betragte  $\sigma$ -algebraer eller rettere del  $\sigma$ -algebraer i et givent måleligt rum  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Pr. definition er en del  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{F}$  en  $\sigma$ -algebra i  $\Omega$ , hvis elementer alle er ligger i  $\mathcal{F}$ , d.v.s.  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ . En sådan del  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  tænkes at modellere en *informationsmængde* i den forstand, at elementerne i  $\mathcal{B}$  er de mængder, vi kender, d.v.s. vi kan afgøre, om de indtræffer eller ej; og en variabel  $X$  siges derfor at være *observerbar* på baggrund af informationsmængden  $\mathcal{B}$ , hvis den er  $\mathcal{B}$ -målelig. Stabilitetskravene til en  $\sigma$ -algebra passer godt til informations-synspunktet, thi kender vi en hændelse  $A$ , så kender vi jo også  $A^c$ , og kender vi  $A_i$  for ethvert  $i$ , så er det nærliggende at sige, at vi også kender  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , thi denne indtræffer jo præcist, hvis mindst en af  $A_i$ 'erne indtræffer. I dette 'informationsprog' opfattes  $\sigma$ -algebraen  $\{\emptyset, \Omega\}$  som svarende til ingen information i modsætning til  $\mathcal{F}$ , som tolkes som fuld information.

Ofte vil informationsmængden være givet ved, at vi kender værdierne af en eller flere stokastiske variable  $X_1, \dots, X_n$ , d.v.s. vi kan afgøre, om hændelserne

$$\{(X_1, \dots, X_n) \in A\} \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$$

indtræffer eller ej. Dette svarer til, at informationsmængden er  $\sigma$ -algebraen frembragt af  $X_i$ 'erne, d.v.s.  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Denne er klart en del  $\sigma$ -algebra i  $\mathcal{F}$ , da  $X_i$ 'erne er stokastiske variable. Dens størrelsen afhænger af, hvor komplicerede  $X_1, \dots, X_n$  er, og som vist i Faktoriseringsætningen (se Øvelse 8 eller sektion 6.4), er enhver variabel, som er kendt på basis af denne information, d.v.s.  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ -målelig, en funktion af  $(X_1, \dots, X_n)$ , og dermed på formen

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) \quad \text{hvor } \varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \text{ er Borel målelig.}$$

Begrebet betinget middelværdi af en variabel  $X$  indføres nu som en formalisering af det 'bedste skøn' over  $X$  på basis af en given informationsmængde  $\mathcal{B}$ . Antag først at  $\mathcal{B}$  er på formen  $\sigma(A_1, \dots, A_n)$ , hvor  $A_1, \dots, A_n$  udgør en målelig partition af  $\Omega$ , d.v.s.  $A_i$ 'erne ligger i  $\mathcal{F}$ , er parvis disjunkte og udfylder  $\Omega$ . Da enhver reel  $\mathcal{B}$ -målelig variabel er på formen  $\sum_i \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ , er angivelsen af det bedste skøn over en variabel  $X$  givet  $\mathcal{B}$  derfor ækvivalent med en beregningsformel for  $\alpha_i$ 'erne. En sådan beregningsformel afhænger naturligvis helt af, hvordan vendingen 'bedste skøn' tolkes, men i forlængelse af forståelsen af begrebet middelværdi som en form for midling af værdierne forekommer det nærliggende at vedtage, at  $\alpha_i$ 'erne skal bestemmes ved formlen

$$\alpha_i^X := \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP \quad \text{hvis } P(A_i) > 0, \text{ og } \alpha_i^X := 0 \text{ ellers.}$$

Den foreslåede beregningsformel kræver en vis integrabilitet af  $X$ , og vi vil her nøjes med at betragte variable  $X$  i  $L^1(P)$ , thi i så fald er  $\sum_i \alpha_i^X \cdot \mathbf{1}_{A_i}$  en vel defineret  $\mathcal{B}$ -målelig variabel, der igen ligger i  $L^1(P)$  og opfylder (husk at ethvert  $A \in \mathcal{B}$  er en foreningsmængde af visse af  $A_i$ 'erne)

$$\int_A X dP = \int_A \sum_i \alpha_i^X \cdot \mathbf{1}_{A_i} dP \quad \text{for alle } A \in \mathcal{B}.$$

Dette giver nu anledning til flg. generelle eksistensspørgsmål:

Givet en del  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  og en variabel  $X \in L^1(P)$  findes der da en variabel  $X_{\mathcal{B}}$  i  $L^1(P, \mathcal{B}) := \{Y \in L^1(P) \mid Y \text{ er } \mathcal{B} \text{ målelig}\}$ , som opfylder

$$\int_A X dP = \int_A X_{\mathcal{B}} dP \quad \text{for alle } A \in \mathcal{B},$$

og i hvor høj grad er en sådan entydigt bestemt?

Det sidste er det letteste, for hvis  $X_{\mathcal{B}}$  og  $\tilde{X}_{\mathcal{B}}$  er to elementer i  $L^1(P, \mathcal{B})$ , der begge opfylder integralbetingelsen, så er  $\{X_{\mathcal{B}} \neq \tilde{X}_{\mathcal{B}}\}$  ifølge Proposition 5 en  $P$ -nulmængde, d.v.s.

$$X_{\mathcal{B}} = \tilde{X}_{\mathcal{B}} \quad P\text{-n.o.}$$

Denne entydighed op til  $P$ -nulmængder betyder, at det har mening at bruge notationen  $E[X \mid \mathcal{B}]$  om enhver variabel, der opfylder ovenstående krav, og at kalde den *en betinget middelværdi* af  $X$  givet  $\mathcal{B}$ . D.v.s. en betinget middelværdi af en variabel  $X$  er observerbar m.h.t. den betragtede informations  $\sigma$ -algebra, og dens integral m.h.t.  $P$  over ethvert element i informationsmængden er lig integralet af  $X$  over den samme mængde.

For at vise eksistensen vil vi først studere kvadratisk integrable variable. Da underrummet  $L^2(P, \mathcal{B})$  i  $L^2(P)$  er lukket under konvergens i kvadratisk middel, findes der ifølge Projektionssætningen til ethvert  $X \in L^2(P)$  et  $P_{\mathcal{B}}X \in L^2(P, \mathcal{B})$ , så at

$$X - P_{\mathcal{B}}X \in L^2(P, \mathcal{B})^{\perp};$$

og da  $\mathbf{1}_A \in L^2(P, \mathcal{B})$  for alle  $A \in \mathcal{B}$  er  $X - P_{\mathcal{B}}X$  og  $\mathbf{1}_A$  derfor orthogonale for alle  $A \in \mathcal{B}$ , d.v.s.

$$\int_A X dP = \int_A X_{\mathcal{B}} dP \quad \text{for alle } A \in \mathcal{B}.$$

$P_{\mathcal{B}}X$  opfylder altså de krav, der stilles til en betinget middelværdi, og der gælder yderligere flg. lemma.

**Lemma BM 1** For alle  $X, Y \in L^2(P)$  er

$$P_{\mathcal{B}}X - P_{\mathcal{B}}Y = P_{\mathcal{B}}(X - Y) \quad P\text{-n.o.} \quad \text{og} \quad E[|P_{\mathcal{B}}X|] \leq E[|X|].$$

Bevis. Første del følger umiddelbart af, at  $L^2(P, \mathcal{B})^\perp$  er stabil under addition. Hvad angår anden del defineres for et vilkårligt  $X$  i  $L^2(P)$   $A_+ := \{P_{\mathcal{B}}X \geq 0\}$ . D.v.s.  $A_+$  og  $A_+^c$  ligger i  $\mathcal{B}$ , og der gælder derfor

$$E[|P_{\mathcal{B}}X|] = \int_{A_+} P_{\mathcal{B}}X dP - \int_{A_+^c} P_{\mathcal{B}}X dP = \int_{A_+} X dP - \int_{A_+^c} X dP \leq \int_{A_+} |X| dP - \int_{A_+^c} |X| dP = E[|X|]. \quad \diamond$$

Eksistensen af den betingede middelværdi for variable i  $L^1(P)$  er nu let.

Thi vælg for et  $X \in L^1(P)$  en følge  $(X_n)_{n \geq 1} \subseteq L^2(P)$ , så at  $X_n \rightarrow X$  i  $L^1(P)$ .  $X_n := X \cdot \mathbf{1}_{\{|X| \leq n\}}$  for  $n \geq 1$  kan f.eks. bruges. Da

$$E[|E[X_n | \mathcal{B}] - E[X_m | \mathcal{B}]|] = E[|E[X_n - X_m | \mathcal{B}]|] \leq E[|X_n - X_m|]$$

ifølge Lemma 17, udgør  $(E[X_n | \mathcal{B}])_{n \geq 1}$  en Cauchy-følge i  $L^1(P, \mathcal{B})$ , og den konvergerer derfor i  $P$ -middel mod et element  $X_{\mathcal{B}}$  i  $L^1(P, \mathcal{B})$ . Denne grænseværdi er en betinget middelværdi af  $X$  givet  $\mathcal{B}$ , thi benyttes implikationen

$$Z_n \rightarrow Z \text{ i } L^1(P) \Rightarrow \int_A Z_n dP \rightarrow \int_A Z dP \text{ for alle } A \in \mathcal{F}$$

på følgerne  $(X_n)_{n \geq 1}$  og  $(E[X_n | \mathcal{B}])_{n \geq 1}$  og hændelser  $A \in \mathcal{B}$  fås

$$\int_A X dP = \lim_n \int_A X_n dP = \lim_n \int_A E[X_n | \mathcal{B}] dP = \int_A X_{\mathcal{B}} dP.$$

Eksistens og entydighed af betingede middelværdier er hermed vist, d.v.s.

**Proposition Bm 1** For enhver del  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{F}$  findes der til ethvert  $X \in L^1(P)$  et element  $E[X | \mathcal{B}] \in L^1(P, \mathcal{B})$ , så at

$$\int_A X dP = \int_A E[X | \mathcal{B}] dP \text{ for alle } A \in \mathcal{B},$$

og  $E[X | \mathcal{B}]$  er entydigt bestemt  $P$ -n.o. D.v.s. op til  $P$ -nulmængder findes der netop en variabel  $Y$ , som opfylder

- a)  $Y$  er  $\mathcal{B}$ -målelig og integrabel.
- b)  $E[X, A] = E[Y, A]$  for alle  $A \in \mathcal{B}$ .

Vi vil nu for en vilkårlig del  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{F}$  nærmere studere afbildningen

$$L^1(P) \ni X \mapsto E[X | \mathcal{B}] \in L^1(P, \mathcal{B}).$$

Afbildningen, der kaldes *betinget middelværdi dannelse* m.h.t.  $\mathcal{B}$ , har en række vigtige egenskaber, hvoraf de fleste er angivet nedenfor. Sektionerne 6.8, 6.9 og

6.10 indeholder endnu flere, men de er alle simple konsekvenser af de nedenstående. Det er dog værd at understrege, at Hoffmann betragter variable i  $L(P)$ , hvor vi her kun ser på elementer i  $L^1(P)$ . Men igen er udvidelsen ikke vanskelig. Betinget middelværdi dannelse bevarer middelværdi og er lineær og voksende (eller rettere  $P$ -lineær og  $P$ -voksende), d.v.s. for  $X, Y \in L^1(P)$  og  $a \in \mathbf{R}$  gælder

**Bm 0**  $E[E[X | \mathcal{B}]] = E[X]$ .

**Bm 1**  $E[X + Y | \mathcal{B}] = E[X | \mathcal{B}] + E[Y | \mathcal{B}]$  og  $E[aX | \mathcal{B}] = a \cdot E[X | \mathcal{B}]$   $P$ -n.o.

**Bm 2**  $P(X \geq Y) = 1 \Rightarrow P(E[X | \mathcal{B}] \geq E[Y | \mathcal{B}]) = 1$  og tilsvarende med  $>$ .

Bevis. Antag  $P(X \geq Y) = 1$ . For alle  $A \in \mathcal{B}$  er

$$\int_A E[X | \mathcal{B}] dP = \int_A X dP \geq \int_A Y dP = \int_A E[Y | \mathcal{B}] dP,$$

hvorefter  $P(E[X | \mathcal{B}] \geq E[Y | \mathcal{B}]) = 1$  følger af Proposition 5. Betragtes specielt

$$A = \{E[X | \mathcal{B}] = E[Y | \mathcal{B}]\} \in \mathcal{B}$$

er de to yderpunkter ens. Men under antagelsen  $P(X > Y) = 1$  har vi for alle  $B \in \mathcal{F}$ , at

$$\int_B X dP = \int_B Y dP \Rightarrow P(B) = 0.$$

D.v.s.  $P(X > Y) = 1 \Rightarrow P(E[X | \mathcal{B}] > E[Y | \mathcal{B}]) = 1$  ◇

Endvidere bevarer afbildningen 'konstanter' idet

**Bm 3**  $X = c$   $P$ -n.o.  $\Rightarrow E[X | \mathcal{B}] = c$   $P$ -n.o. for ethvert  $c \in \mathbf{R}$ .

Kombineres Bm 2 og 3 fås for  $X \in L^1(P)$ :

**Bm 4**  $P(X \in I) = 1 \Rightarrow P(E[X | \mathcal{B}] \in I) = 1$  for ethvert interval  $I \subseteq \mathbf{R}$ .

Bevis. Antag f.eks.  $I = [a, b]$  de øvrige intervaltyper går analogt. Ved brug af Bm 2 og 3 har vi

$$P(X \in I) = 1 \Rightarrow P(X \leq b) = P(X \geq a) = 1 \Rightarrow$$

$$P(E[X | \mathcal{B}] \leq b) = P(E[X | \mathcal{B}] \geq a) = 1 \Rightarrow P(E[X | \mathcal{B}] \in [a, b]) = 1. \quad \diamond$$

Bm 2 og 4 sikrer flg. variant af Jensen's ulighed for betingede middelværdier.

**Bm 5** Lad  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  være en Borel funktion, som er konveks på et åbent interval  $I \subseteq \mathbf{R}$ . Lad  $X \in L^1(P)$  være givet, så at  $P(X \in I) = 1$  og  $\varphi(X) \in L^1(P)$ , da er

$$\varphi(E[X | \mathcal{B}]) \leq E[\varphi(X) | \mathcal{B}] \quad P\text{-n.o.}$$

Bevis. Da  $\varphi$  er konveks på det åbne interval  $I$ , eksisterer der, som vist i appendiks A, en følge  $(l_n)_{n \geq 1}$  af affine funktioner, så at

$$l_n \leq \varphi \text{ på } I \text{ og } \varphi(x) = \sup_n l_n(x) \text{ for alle } x \in I,$$

d.v.s. specielt  $\varphi(X) = l_n(X)$   $P$ -n.o. for alle  $n \geq 1$ , da  $P(X \in I) = 1$ . Da  $\mathcal{N}_P$  er stabil under tællelig forening, gælder derfor ifølge Bm 1, 2 og 3, at

$$E[\varphi(X) | \mathcal{B}] \geq \sup_n E[l_n(X) | \mathcal{B}] = \sup_n l_n(E[X | \mathcal{B}]) \quad P\text{-n.o.}$$

Men ifølge Bm 4 er  $P(E[X | \mathcal{B}] \in I) = 1$  og dermed

$$\sup_n l_n(E[X | \mathcal{B}]) = \varphi(E[X | \mathcal{B}]) \quad P\text{-n.o.} \quad \diamond$$

Bruges Bm 5 på funktionerne  $x \mapsto |x|^p$  for  $p \geq 1$  fås

$$E[X | \mathcal{B}] \in L^p(P) \text{ hvis } X \in L^p(P) \text{ og } \|E[X | \mathcal{B}]\|_p \leq \|X\|_p \text{ d.v.s.}$$

**Bm 6**  $X \mapsto E[X | \mathcal{B}]$  er en lineær kontraktion i  $L^p(P)$  for ethvert  $p \geq 1$ .

Bm 2 og 6 medfører flg. konvergensresultater for variable  $(X_n)_{n \geq 1}$  og  $X$  i  $L^1(P)$ .

**Bm 7**  $X_n \uparrow (\downarrow) X$   $P$ -n.o.  $\implies E[X_n | \mathcal{B}] \uparrow (\downarrow) E[X | \mathcal{B}]$   $P$ -n.o. og i  $P$ -middel.

Bevis. Antag  $X_n \uparrow X$   $P$ -n.o. og dermed  $X_n \rightarrow X$  i  $P$ -middel. Af Bm 2 fås derfor  $P$ -n.o.

$$E[X_n | \mathcal{B}] \uparrow \sup_n E[X_n | \mathcal{B}] \leq E[X | \mathcal{B}],$$

d.v.s. specielt at  $E[X_n | \mathcal{B}] \rightarrow \sup_n E[X_n | \mathcal{B}]$  i  $P$ -middel. Men ifølge Bm 6 konvergerer  $E[X_n | \mathcal{B}] \rightarrow E[X | \mathcal{B}]$  i  $P$ -middel, d.v.s.

$$\sup_n E[X_n | \mathcal{B}] = E[X | \mathcal{B}] \quad P\text{-n.o.} \quad \diamond$$

**Bm 8** Hvis  $X_n \geq 0$  og  $X \leq \liminf_n X_n$   $P$ -n.o., er

$$E[X | \mathcal{B}] \leq \liminf_n E[X_n | \mathcal{B}] \quad P\text{-n.o.}$$

Specielt  $E[\liminf_n X_n | \mathcal{B}] \leq \liminf_n E[X_n | \mathcal{B}]$   $P$ -n.o. hvis  $\liminf_n X_n \in L^1(P)$ .

Bevis. Definer  $Y_n := \inf_{k \geq n} X_k$  for  $n \geq 1$ . Da

$$X \wedge Y_n \uparrow X \wedge \liminf_n X_n = X \quad P\text{-n.o.} \quad \text{og } Y_n, X \wedge Y_n \in L^1(P) \text{ for alle } n,$$

fås af Bm 2 og 7, at

$$\begin{aligned} E[X | \mathcal{B}] &= \sup_n E[X \wedge Y_n | \mathcal{B}] \leq \sup_n E[Y_n | \mathcal{B}] \\ &\leq \sup_n \inf_{k \geq n} E[X_k | \mathcal{B}] = \liminf_n E[X_n | \mathcal{B}] \quad P\text{-n.o.} \quad \diamond \end{aligned}$$

**Bm 9** Hvis  $X_n \rightarrow X$   $P$ -n.o. og  $|X_n| \leq Y$   $P$ -n.o. for et  $Y \in L^1(P)$  konvergerer

$$E[X_n | \mathcal{B}] \rightarrow E[X | \mathcal{B}] \quad P\text{-n.o.} \text{ og i } P\text{-middel.}$$

Bevis. Da  $X_n \rightarrow X$  i  $P$ -middel følger middel konvergensten af Bm 6, og konvergensten  $P$ -n.o. fås ved at bruge Bm 8 på følgerne  $(Y - X_n)_{n \geq 1}$  og  $(Y + X_n)_{n \geq 1}$ . Detaljerne overlades til læseren.  $\diamond$

De to næste resultater viser, at  $\mathcal{B}$ -målelige variable behandles som 'konstanter'.

**Bm 10**  $E[U | \mathcal{B}] = U$   $P$ -n.o. for ethvert  $U \in L^1(P, \mathcal{B})$ ; og for  $X \in L^1(P)$  og  $\mathcal{B}$ -målelige variable  $U_1$  og  $U_2$  gælder

$$P(U_1 \leq X \leq U_2) = 1 \Rightarrow P(U_1 \leq E[X | \mathcal{B}] \leq U_2) = 1.$$

Bevis. Første er del er umiddelbar og overlades til læseren. Da

$$P(X \wedge n \leq U_2 \wedge n) = 1 \quad \text{og} \quad |U_2 \wedge n| \leq n + |X| \in L^1(P)$$

for ethvert  $n \geq 1$  fås af Bm 2, at

$$E[X \wedge n | \mathcal{B}] \leq E[U_2 \wedge n | \mathcal{B}] = U_2 \wedge n \leq U_2 \quad P\text{-n.o.}$$

Lader vi nu  $n \rightarrow \infty$  fås ved brug af Bm 7, at  $P(E[X | \mathcal{B}] \leq U_2) = 1$ . Den anden halvdel følger tilsvarende.  $\diamond$

**Bm 11**  $E[U \cdot X | \mathcal{B}] = U \cdot E[X | \mathcal{B}]$   $P$ -n.o., for  $U$   $\mathcal{B}$ -målelig og  $X, U \cdot X \in L^1(P)$ .

Bevis. Da  $U \cdot X \in L^1(P)$  medfører, at  $U^\pm \cdot X^\pm$  alle ligger i  $L^1(P)$ , sikrer lineariteten, at det er nok at betragte ikke-negative  $U$  og  $X$ , og da målelighedsbetingelserne klart er opfyldte, udestår blot at vise, at

$$\int_B U \cdot E[X | \mathcal{B}] dP = \int_B U \cdot X dP \quad \text{for alle } B \in \mathcal{B}.$$

Men dette følger ved brug af Standardbeviset ved først at antage, at  $U$  er en indikatorfunktion, dernæst en simpel funktion, hvorefter man går til grænsen ved hjælp af Monoton konvergenst. Detaljerne overlades til læseren.  $\diamond$

De næste fire egenskaber er af en lidt anden natur. De tre første omhandler betingning med uafhængig information, og den sidste er reglen om *successiv betingning*.  $X$  betegner her et vilkårligt element i  $L^1(P)$  og  $\mathcal{B}_1$  endnu en del  $\sigma$ -algebra i  $\mathcal{F}$ . Bemærk at Bm 12 er et specialtilfælde af Bm 13.

**Bm 12**  $E[X | \mathcal{B}] = E[X]$   $P$ -n.o. hvis  $X$  og  $\mathcal{B}$  er uafhængige.

**Bm 13**  $E[X | \sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1)] = E[X | \mathcal{B}]$   $P$ -n.o. hvis  $(X, \mathcal{B})$  og  $\mathcal{B}_1$  er uafhængige.

**Bm 14**  $E[H(X, Y) | \mathcal{B}] = \tilde{H}(Y)$   $P$ -n.o. hvis  $X$  og  $\mathcal{B}$  er uafhængige og  $Y \in M(\mathcal{B})$  og  $\tilde{H}(y) := E[H(X, y)]$ , hvor  $H : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  er begrænset og Borel målelig.

**Bm 15**  $E[E[X | \mathcal{B}] | \mathcal{B}_1] = E[X | \mathcal{B}_1]$   $P$ -n.o. hvis  $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ .

Bevis. Bm 12 og 15 overlades til læseren. I Bm 14 viser et linearitetsargument, at

det er nok at se på ikke-negative  $H$ . Da måleligheden og integrabiliteten følger af Tonelli's sætning, mangler vi kun at vise, at for givet  $B \in \mathcal{B}$  er

$$\int_A \tilde{H}(Y) dP = \int_A H(X, Y) dP.$$

Men lader vi  $Z$  betegne den stokastiske variabel  $\mathbf{1}_A$  fås ved gentagen brug af den lille transformationssætning og Tonelli's sætning, at

$$\begin{aligned} \int_A \tilde{H}(Y) dP &= \int \tilde{H}(Y) \cdot \mathbf{1}_A dP = \int \tilde{H}(y) \cdot z P_{Y,Z}(dy dz) \\ &= \int \left\{ \int H(x, y) \cdot z P_X(dx) \right\} P_{(Y,Z)}(dy dz) = \int H(x, y) \cdot z P_X \otimes P_{(Y,Z)}(dx dy dz) \\ &= \int H(x, y) \cdot z P_{(X,Y,Z)}(dx dy dz) = \int H(X, Y) \cdot \mathbf{1}_A dP = \int_A H(X, Y) dP \end{aligned}$$

Hvad angår Bm 13, viser et nyt linearitetsargument, at vi kan og vil antage, at  $X$  er ikke-negativ. Da både måleligheden og integrabiliteten igen er oplagt, mangler vi kun at vise, at

$$\int_C X dP = \int_C E[X | \mathcal{B}] dP \quad \text{for alle } C \in \sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1).$$

Men da begge sider definerer et endeligt mål på  $\sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1)$  med samme masse  $E[X]$ , behøver vi kun at vise ligheden for  $C$  af formen  $A \cap B$ , hvor  $A \in \mathcal{B}$  og  $B \in \mathcal{B}_1$ , thi mængden af disse er stabil under endelig gennemsnit og frembringer  $\sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1)$ . Men for  $A \in \mathcal{B}$  og  $B \in \mathcal{B}_1$  gælder ifølge den antagede uafhængighed, at

$$\begin{aligned} \int_{A \cap B} E[X | \mathcal{B}] dP &= \int E[X | \mathcal{B}] \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B dP = P(B) \int E[X | \mathcal{B}] \cdot \mathbf{1}_A dP \\ &= P(B) \int X \cdot \mathbf{1}_A dP = \int X \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B dP = \int_{A \cap B} X dP. \quad \diamond \end{aligned}$$

Som det fremgår af Bm 4 og 6 afbilder enhver betinget middelværdi mængder af formen

$$\{X \in L^1(P) \mid P(|X| \leq M) = 1\} \text{ og } \{X \in L^1(P) \mid E[|X|] \leq M\} \text{ hvor } 0 < M < \infty$$

ind i sig selv. Øvelse 17 medfører derfor flg. vigtige egenskaber, hvor  $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$  er del  $\sigma$ -algebraer i  $\mathcal{E}$  og  $\mathcal{H}$  en delmængde af  $L^1(P)$ .

**Bm 16**  $\mathcal{H}$  uniformt integrabel  $\Rightarrow \{E[X | \mathcal{B}_n] \mid X \in \mathcal{H}, n \geq 1\}$  unif. integrabel.

Tilfældet hvor  $\mathcal{H}$  består af en enkelt variabel, er specielt vigtigt, d.v.s.

**Bm 16'**  $\{E[X | \mathcal{B}_n] \mid n \geq 1\}$  er uniformt integrabel for alle  $X \in L^1(P)$ .

Bevis. Lad  $X \in L^1(P)$  være givet. Da  $\{|E[X | \mathcal{B}_n]| \geq K\} \in \mathcal{B}_n$  for alle  $n$  og  $K$  fås af regnereglerne for betingede middelværdier, at

$$\begin{aligned} \int_{\{|E[X | \mathcal{B}_n]| \geq K\}} |E[X | \mathcal{B}_n]| dP &\leq \int_{\{|E[X | \mathcal{B}_n]| \geq K\}} E[|X| | \mathcal{B}_n] dP \\ &= \int_{\{|E[X | \mathcal{B}_n]| \geq K\}} |X| dP \leq \int_{\{|E[|X| | \mathcal{B}_n]| \geq K\}} |X| dP \end{aligned}$$

hvilket giver det ønskede, da  $\{|X|\}$  er uniformt integrabel og

$$P(\{|E[|X| | \mathcal{B}_n]| \geq K\}) \leq E[E[|X| | \mathcal{B}_n]]/K \leq E[|X|]/K \rightarrow_{K \rightarrow \infty} 0. \quad \diamond$$

Bemærk at Bm 16 kunne være vist på samme måde.

Lad os til slut se lidt nærmere på tilfældet, hvor  $\mathcal{B} = \sigma(Y)$  for en målelig variabel  $Y$  med værdier i et måleligt rum  $(E, \mathcal{E})$ . Her skrives normalt  $E[\cdot | Y]$  i stedet for  $E[\cdot | \sigma(Y)]$ . Ifølge faktoriseringssætningen findes der til ethvert  $X$  i  $L^1(P)$  en funktion  $\varphi \in M(\mathcal{E})$ , generelt afhængig af både  $X$ ,  $Y$  og  $P$ , så at

$$E[X | Y] = \varphi(Y),$$

og da

$$\int_B \varphi dP_Y = \int_{\{Y \in B\}} \varphi(Y) dP = \int_{\{Y \in B\}} X dP = \int x \cdot \mathbf{1}_B(y) P_{(X,Y)}(dx dy)$$

for alle  $B \in \mathcal{E}$ , ses dels, at  $\varphi$  er entydigt bestemt  $P_Y$ -n.o., samt at der gælder

**Bm 17** Lad  $X$  og  $Z$  betegne elementer i  $L^1(P)$ , så at  $(X, Y) \sim (Z, Y)$  og  $\varphi$  et element i  $M(\mathcal{E})$ . Da er

$$E[X | Y] = \varphi(Y) \text{ } P\text{-n.o.} \Leftrightarrow E[Z | Y] = \varphi(Y) \text{ } P\text{-n.o.}$$

Men hvordan bestemmer man et  $\varphi$ , der passer til et givent  $X \in L^1(P)$ ? Problemet behandles i sektion 6.11, som blandt andet indeholder flg. resultat.

**Bm 18** Lad  $(X, Y)$  betegne en absolut kontinuert 2-dimensional stokastisk vektor med tæthed  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  m.h.t. det plane Lebesgue mål. Definer

$$f_2(y) := \int_{\mathbf{R}} f(u, y) du \quad \text{og} \quad f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \cdot \mathbf{1}_{\{f_2 > 0\}}(y) \quad \text{for } x, y \in \mathbf{R}.$$

Da gælder for enhver begrænset Borel funktion  $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , at

$$E[\psi(X, Y) | Y] = \tilde{\psi}(Y) \text{ } P\text{-n.o.}, \quad \text{hvor} \quad \tilde{\psi}(y) := \int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) \cdot f_{X|Y}(x|y) dx \quad y \in \mathbf{R}.$$

Da  $f_2$  er en tæthed for  $Y$ , er  $P_Y(f_2 > 0) = 1$ . Resultatet gælder uændret for ubegrænsede  $\psi$ , hvis blot  $E[|\psi(X, Y)|] < \infty$ , dog skal  $\tilde{\psi}(y)$  sættes lig 0 på mængden

$$\{y \in \mathbf{R} \mid \int_{\mathbf{R}} |\psi(x, y)| \cdot f_{X|Y}(x|y) dx = \infty\}.$$

Denne er igen en  $P_Y$ -nulmængde, idet

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |\psi(x, y)| \cdot f_{X|Y}(x|y) dx \right\} P_Y(dy) &= \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |\psi(x, y)| \cdot f_{X|Y}(x|y) dx \right\} f_2(y) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |\psi(x, y)| \cdot \mathbf{1}_{\{f_2 > 0\}}(y) \cdot f(x, y) dx \right\} dy = \int_{\mathbf{R}^2} |\psi(x, y)| P_{(X, Y)}(dx dy) \\ &= E[|\psi(X, Y)|] < \infty. \end{aligned}$$

En anden situation, hvor problemet umiddelbart lader sig løse, er flg. Beviset overlades til læseren.

**Bm 19** Lad  $Y$  betegne en diskret stokastisk variabel, og lad  $(y_n)_{n \geq 1}$  være en nummerering af den højst tællelige mængde  $Sp(Y)$ , d.v.s.

$$P(Y = y_n) > 0 \text{ for alle } n \text{ og } \sum_{n \geq 1} P(Y = y_n) = 1.$$

Da gælder for enhver stokastisk variabel  $X$  og Borel funktion  $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , at hvis  $E[|\psi(X, Y)|] < \infty$ , så er

$$E[\psi(X, Y) | Y] = \tilde{\psi}(Y) \text{ P-n.o.,}$$

hvor

$$\tilde{\psi}(\cdot) := \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \mathbf{1}_{\{Y=y_n\}}(\cdot), \text{ for } a_n := \frac{1}{P(Y = y_n)} \int_{\{Y=y_n\}} \psi(X, y_n) dP \quad n \geq 1.$$

Bm 18 og 19 knytter tæt an til, hvad der normalt kaldes en regulær betinget fordeling af  $X$  givet  $Y$ . Det er ikke et emne, vi skal gøre meget ud af, men da det spiller en vis rolle i forbindelse med behandlingen af den flerdimensionale normalfordeling, vil jeg ganske kort indføre nogle vigtige begreber og definitioner.

**Notation**  $\{P(A | \underline{y}) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \underline{y} \in \mathbf{R}^m\}$  kaldes en *Markov kerne* på  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^m$ , hvis

a)  $A \mapsto P(A | \underline{y})$  er et Borel sandsynligheds mål på  $\mathbf{R}^n$  for alle  $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$ .

b)  $\underline{y} \mapsto P(A | \underline{y})$  er en Borel funktion på  $\mathbf{R}^m$  for alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ .

Lad  $X$  og  $Y$  betegne h.h.v. en  $n$  og en  $m$ -dimensional stokastisk vektor. En Markov kerne  $\{P_{X|Y}(A | \underline{y}) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \underline{y} \in \mathbf{R}^m\}$  på  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^m$  kaldes en *regulær betinget fordeling* for  $X$  givet  $Y$ , hvis

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_B P_{X|Y}(A | \underline{y}) P_Y(d\underline{y})$$

for alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  og  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ . Sandsynlighedsmålet

$$A \mapsto P_{X|Y}(A | \underline{y})$$

kaldes *den betingede fordeling* for  $X$  givet  $Y = \underline{y}$  og er det absolut kontinuert med tæthed  $\underline{x} \mapsto f_{X|Y}(\underline{x} | \underline{y})$ , kaldes denne en *betinget tæthed* for  $X$  givet  $Y = \underline{y}$ .

**Øvelse 20.** Udnyt Proposition 2 og sektionsegenskaber ved produktmålelige mængder til at vise at for alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$  er

$$P((X, Y) \in A) = \int_{\mathbf{R}^m} P_{X|Y}(A(\underline{y}) | \underline{y}) P_Y(d\underline{y}) \quad \square$$

Bemærkning. Øvelse 20 viser, at man ud fra kendskab til en betinget fordeling for  $X$  givet  $Y$  kan beregne en betinget fordeling for  $Z$  givet  $Y$ , hvor  $Z := \phi(X, Y)$  for en Borel funktion  $\phi$ . Øvelsen viser nemlig, at den betingede fordeling for  $Z$  givet  $Y = \underline{y}$  er billedmålet af den betingede fordeling for  $X$  givet  $Y = \underline{y}$  svarende til den målelige afbildning

$$\underline{x} \mapsto \phi(\underline{x}, \underline{y})$$

Betingede fordelinger er teoretisk set et vanskeligt begreb. Men for en- eller flerdimensionale stokastiske vektorer  $X$  og  $Y$  eksisterer der altid en regulær betinget fordeling for  $X$  givet  $Y$ , og da  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  er separabel, er  $P_{X|Y}(\cdot | \cdot)$  entydigt bestemt i en sådan grad, at det har mening at tale om 'den betingede fordeling' for  $X$  givet  $Y$ . De betingede fordelinger for  $X$  givet  $Y = \underline{y}$  er nemlig entydigt bestemte for  $P_Y$ -n.a.  $\underline{y}$ . Skønt der således både er eksistens og entydighed, er den eksplicitte beregning ofte vanskelig (se dog nedenstående øvelse), men i anvendelsessituationer er de betingede fordelinger heldigvis ofte givet ud fra sammenhængen.

Kendskab til en betinget fordeling for  $X$  givet  $Y$  gør det muligt at generalisere punkterne Bm 14, 18 og 19. For er  $f$  en begrænset Borel funktion på  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ , så er

$$E[f(X, Y) | Y] = \tilde{f}(Y) \text{ } P\text{-n.o. hvor } \tilde{f} : \underline{y} \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f(\underline{x}, \underline{y}) P_{X|Y}(d\underline{x} | \underline{y}).$$

D.v.s.  $\tilde{f}$ 's værdi i et punkt  $\underline{y}$  er middelværdien i den betingede fordeling af  $f(X, Y)$  givet  $Y = \underline{y}$ .

Formlen vises ved først at reducere til produktfunktioner, d.v.s. funktioner

$$(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto f_1(\underline{x}) \cdot f_2(\underline{y}),$$

hvor  $f_1$  og  $f_2$  er Borel funktioner på  $\mathbf{R}^n$  h.h.v.  $\mathbf{R}^m$ . Dernæst indsættes ved hjælp af Standardbeviset, at det er nok at se på tilfældet

$$f_1 = \mathbf{1}_A \text{ og } f_2 = \mathbf{1}_B \text{ for } A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \text{ og } B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m),$$

men dette svarer præcis til ovenstående definitionslikning. Resultatet udvider på sædvanlig vis til visse ubegrænsede  $f$ , specielt ikke-negative  $f$ .

**Øvelse 21.** Lad  $X$  og  $Y$  være givne  $n$  og  $m$  dimensionale stokastiske vektorer og  $\mu$  et vilkårligt givet Borel sandsynlighedsmål på  $\mathbf{R}^n$ .  $\square$

I) Hvis  $(X, Y)$  er absolut kontinuert m.h.t.  $\lambda_{n+m}$  med tæthed  $(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto f(\underline{x}, \underline{y})$ , er

$$P_{X|Y}(A|\underline{y}) := \begin{cases} \int_A f_{X|Y}(\underline{x}|\underline{y}) \lambda_n(d\underline{x}) & A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \underline{y} \in \{f_2 > 0\} \\ \mu(A) & A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \underline{y} \notin \{f_2 > 0\} \end{cases}$$

en regulær betinget fordeling for  $X$  givet  $Y$ .  $\underline{y} \mapsto f_2(\underline{y})$  er her en tæthed for  $Y$  og

$$f_{X|Y}(\underline{x}|\underline{y}) := f(\underline{x}, \underline{y}) / f_2(\underline{y}) \cdot \mathbf{1}_{\{f_2 > 0\}}(\underline{y}) \quad \text{for } \underline{x} \in \mathbf{R}^n, \underline{y} \in \mathbf{R}^m.$$

II) Hvis  $Y$  er diskret og  $Sp(Y) := \{\underline{y} \in \mathbf{R}^m \mid P(Y = \underline{y}) > 0\}$ , er

$$P_{X|Y}(A|\underline{y}) := \begin{cases} P(X \in A \mid Y = \underline{y}) & A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \underline{y} \in Sp(Y) \\ \mu(A) & A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \underline{y} \notin Sp(Y) \end{cases}$$

en regulær betinget fordeling for  $X$  givet  $Y$ .

III) Hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige, er

$$P_{X|Y}(A|\underline{y}) := P_X(A) \quad \text{for } A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \underline{y} \in \mathbf{R}^m$$

en regulær betinget fordeling for  $X$  givet  $Y$ .  $\square$

Punkt III) viser, at hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige, så afhænger de betingede mål for  $X$  givet  $Y = y$  ikke af  $y$ . Dette ses let at karakterisere uafhængighed, idet flg. udsagn er ækvivalente.  $\mu$  er her et sandsynlighedsmål på  $\mathbf{R}^n$ .

1)  $X$  og  $Y$  er uafhængige

2)  $P_{X|Y}(A|\underline{y}) := \mu(A)$  for  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  og  $\underline{y} \in \mathbf{R}^m$  er en regulær betinget fordeling for  $X$  givet  $Y$ .

**Øvelse 22.** Eftervis ækvivalensen og vis endvidere, at  $\mu$  i givet fald er fordelingsmålet for  $X$ .  $\square$

**Øvelse 23.** Lad  $(X, Y)$  være todimensionalt normalt fordelt. Vis at den betingede fordeling for  $X$  givet  $Y = y$  er en normalfordeling og bestem dens parametre. Vink: Vis at der findes et  $\alpha$ , så at  $X - \alpha Y$  og  $Y$  er uafhængige, og udnyt dernæst at  $X = (X - \alpha Y) + \alpha Y$  tillige med bemærkningen efter Øvelse 20.  $\square$

### Martingaler.

I dette kapitel betragtes modeller for systemer, der udvikler sig i tiden. Tiden modelleres diskret, d.v.s. ved en tidsparametermængde  $T \subseteq \mathbf{Z}$ , normalt et interval. Til ethvert tidspunkt  $n$  i  $T$  knytter der sig en variabel  $X_n$  og en del  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_n$  i  $\mathcal{F}$ . Vi skal tænke på  $\mathcal{F}_n$  som den informationsmængde, der er til stede til tid  $n$ , og på  $X_n$  som en variabel, der beskriver tilstanden til tid  $n$ . Flg. krav forekommer derfor naturlige.

a)  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$  hvis  $n \leq m$  for tidspunkter  $n$  og  $m$  i  $T$ , d.v.s. informationsmængden vokser med tiden.

b)  $X_n$  er målelig m.h.t.  $\mathcal{F}_n$ , d.v.s. tilstanden til tid  $n$  kan observeres på baggrund af den information, der er til stede til tid  $n$ .

Med udgangspunkt heri siges en parametriseret familie  $(\mathcal{F}_n)_{n \in T}$  af del  $\sigma$ -algebraer i  $\mathcal{F}$  at udgøre et  $T$ -filter, hvis  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$  for  $n \leq m$ ,  $n, m \in T$ ; og b) udtrykkes ofte kort ved at sige, at processen  $(X_n)_{n \in T}$  er tilpasset filtret  $(\mathcal{F}_n)_{n \in T}$ .

Vi vil kun se på tilfældet, hvor  $T = \mathbf{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$ , thi herved dækkes også tilfældet  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq k}$ , idet denne kan opfattes som  $(\tilde{X}_n, \tilde{\mathcal{F}}_n)_{n \geq 0}$ , hvor

$$\tilde{X}_n = X_{n+k} \quad \text{og} \quad \tilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_{n+k} \quad n \geq 0.$$

Tilfældet, hvor  $T$  er et endeligt interval  $[k, l]$ , er også dækket, thi forlænges konstant ud over højre endepunkt kan  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in [k, l]}$  beskrives ved  $(\tilde{X}_n, \tilde{\mathcal{F}}_n)_{n \geq 0}$ , hvor

$$\tilde{X}_n = X_{n+k}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_{n+k} \quad n \leq l - k \quad \text{og} \quad \tilde{X}_n = X_l, \quad \tilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_l \quad n > l - k.$$

$T = \mathbf{N}_0$  omfatter altså alle situationer, hvor tidsmængden har et endeligt begyndelsestidspunkt, og der udestår derfor i princippet kun to tilfælde nemlig,  $T = \mathbf{Z}$  eller  $T = -\mathbf{N}_0$ . Her er  $T = \mathbf{Z}$  ikke interessant i en martingal sammenhæng og  $T = -\mathbf{N}_0$  overlades på grund af manglende tid til et senere kursus.

Til ethvert filter  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  tilknyttes de såkaldte stoptider defineret på flg. vis.

**Definition**  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$  er en *stoptid* (mere præcist en  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -stoptid), hvis

$$\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n \quad n \geq 0.$$

Bemærk at målelighedskravet ækvivalent kan formuleres som

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad n \geq 0 \quad \text{eller} \quad \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad n \geq 0.$$

$\tau$  siges at være en *endelig* stoptid, hvis  $P(\tau < \infty) = 1$ , og  $\tau$  siges at være en *begrænset* stoptid, hvis  $\tau \leq M < \infty$ , hvor  $M$  er et reelt tal.

Til enhver stoptid  $\tau$  tilordnes  $\sigma$ -algebraen (overvej)

$$\mathcal{F}_\tau := \{F \in \mathcal{F}_\infty \mid F \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad n \geq 0\},$$

hvor  $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$ , d.v.s. den mindste  $\sigma$ -algebra, der indeholder ethvert  $\mathcal{F}_n$ .  $\mathcal{F}_\tau$  er altså en del  $\sigma$ -algebra i  $\mathcal{F}_\infty$  og omtales som informationsmængden, der er til stede til tid  $\tau$ .

Inden vi starter på den egentlige teori gennemgås en række åbenbare konsekvenser af definitionen på en stoptid  $\tau$  og den tilhørende  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_\tau$ .

**Ma 1**  $\tau$  er  $\mathcal{F}_\tau$ -målelig, og en  $\mathcal{F}_\infty$ -målelig stokastisk variabel  $X$  er  $\mathcal{F}_\tau$ -målelig, hvis og kun hvis  $X \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}$  er  $\mathcal{F}_n$ -målelig for alle  $n \geq 0$ .

Bevis. Den første påstand følger af identiteten

$$\{\tau = k\} \cap \{\tau = n\} = \begin{cases} \{\tau = n\} & \text{hvis } n = k \\ \emptyset & \text{hvis } n \neq k. \end{cases}$$

for  $n, k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$ , og den anden af identiteten

$$\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} = \{X \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} \in B\} \cap \{\tau = n\}.$$

for  $n \geq 0$  og  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ , idet denne specielt, hvis  $0 \notin B$ , giver

$$\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} = \{X \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} \in B\}. \quad \diamond$$

De vigtigste stoptider er de såkaldte *First Hitting Times* defineret ved (her og overalt i det følgende defineres  $\inf \emptyset := \infty$ )

$$\tau_A(\omega) := \inf\{n \geq 0 \mid X_n(\omega) \in A\} \quad \omega \in \Omega,$$

hvor  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  og  $(X_n)_{n \geq 0}$  er en tilpasset reel proces. Stoptidsegenskaben følger af ligheden

$$\{\tau_A > n\} = \bigcap_{k=0}^n \{X_k \in A\}^c = \bigcap_{k=0}^n \{X_k \in A^c\} \quad n \geq 0.$$

Som vist i sektion 7.2 generaliserer dette til de såkaldte *Ocurrence Time*  $\tau_{\underline{F}}$  defineret ved

$$\tau_{\underline{F}}(\omega) := \inf\{n \geq 0 \mid \omega \in F_n\} \quad \omega \in \Omega,$$

hvor  $\underline{F} := (F_n)_{n \geq 0}$  er en følge af hændelser, så at  $F_n \in \mathcal{F}_n$  for alle  $n \geq 0$ . Igen følger stoptidsegenskaben let, idet

$$\{\tau_{\underline{F}} > n\} = \bigcap_{k=0}^n F_k^c \quad \text{for } n \geq 0.$$

Udnyttes at stoptider kun antager heltallige værdier ses, at enhver stoptid  $\tau$  kan beskrives som en Ocurrence Time, idet  $\tau = \tau_{\underline{F}}$ , hvor  $F_n = \{\tau \leq n\}$  for alle  $n \geq 0$ . Uf fra definitionen følger let, at for ethvert  $k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$  er den konstante variabel  $\tau(\omega) := k$  en stoptid, samt at mængden af  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -stoptider er stabil under

endelig sum og endelig punktvis max og min dannelse, d.v.s.

**Ma 2**  $\tau_1, \tau_2$  stoptider  $\Rightarrow \tau_1 + \tau_2, \tau_1 \vee \tau_2$  og  $\tau_1 \wedge \tau_2$  stoptider.

Bevis. Følger af lighederne

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\} \quad \text{og} \quad \{\tau_1 \wedge \tau_2 > n\} = \{\tau_1 > n\} \cap \{\tau_2 > n\}$$

samt

$$\{\tau_1 + \tau_2 = n\} = \bigcup_{k=1}^n \{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = n - k\} \quad \diamond$$

Argumenterne for  $\vee$  og  $\wedge$  udvider uden videre til tællig mange stoptider, d.v.s.

$$(\tau_i)_{i \geq 1} \text{ stoptider} \Rightarrow \sup_i \tau_i \text{ og } \inf_i \tau_i \text{ stoptider,}$$

og derfor tilsvarende for en uendelig sum, da  $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i = \sup_n \sum_{i=1}^n \tau_i$ .

Det næste resultat viser, at stoptids  $\sigma$ -algebraerne generaliserer de givne informations  $\sigma$ -algebraer  $\mathcal{F}_n$ .

**Ma 3**  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$ , hvis  $\tau \equiv k$  for et  $k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$  og for stoptider  $\tau_1$  og  $\tau_2$  er

$$\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}, \quad \text{d.v.s. specielt} \quad \tau_1 \leq \tau_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}.$$

Bevis. Den første påstand overlades til læseren. For  $B \in \mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$  og  $n \geq 0$  er

$$\mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 = n\}} = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 \wedge \tau_2 = k\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 = n\}}$$

$\mathcal{F}_n$ -målelig, hvilket ifølge Ma 1 viser, at  $B \in \mathcal{F}_{\tau_1}$  og tilsvarende  $B \in \mathcal{F}_{\tau_2}$ . Hvis omvendt  $B \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$  viser lighederne for  $n \geq 0$

$$\mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 \wedge \tau_2 = n\}} = \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 = n\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_2 > n\}} + \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_2 = n\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 > n\}} + \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 = n\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_2 = n\}}$$

at  $B \in \mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$ . D.v.s.  $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$ . Resten følger tilsvarende af lighederne

$$\mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq \tau_2\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 \wedge \tau_2 = n\}} = \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq \tau_2\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 = n\}} = \mathbf{1}_{\{n \leq \tau_2\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 = n\}} = \mathbf{1}_{\{n-1 < \tau_2\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_1 = n\}}. \quad \diamond$$

Definition og målelighed m.h.t.  $\mathcal{F}_\tau$  af variable af formen  $X_\tau$ , *tilstanden til tid*  $\tau$ , for en stoptid  $\tau$  og en tilpasset proces  $(X_n)_{n \geq 0}$  er klar, hvis  $\tau$  kun antager endelige værdier, idet  $X_\tau$  da naturligt defineres som

$$\omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \omega \in \Omega, \quad \text{d.v.s.} \quad X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cdot \mathbf{1}_{\{\tau = n\}}.$$

Da  $X_\tau = X_n$  på  $\{\tau = n\}$ , er  $X_\tau$  ifølge Ma 1  $\mathcal{F}_\tau$ -målelig. Men generelt kan stoptider antage værdien  $\infty$ , og vi vil derfor til en given proces  $(X_n)_{n \geq 0}$  altid tilordne en variabel  $X_\infty$  ifølge opskriften i Lemma 5, d.v.s.

$X_\infty(\omega) := \lim_n X_n(\omega)$ , hvis denne eksisterer i  $\mathbf{R}$ , og  $X_\infty(\omega) := 0$  ellers.

Ifølge Lemma 5 er  $X_\infty$  målelig m.h.t.  $\mathcal{F}_\infty$ , hvis  $(X_n)_{n \geq 0}$  er tilpasset. Herefter kan vi uden problemer definere  $X_\tau$  for en vilkårlig stoptid  $\tau$  ved fastsættelsen

$$X_\tau := \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} + X_\infty \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}}.$$

Der er tydeligvis tale om en udvidelse af den allerede indførte definition for stop-tider med udelukkende endelige værdier. Endvidere gælder flg. alternative beskrivelse. (Sammenlign med sektion 7.4. Bemærk at  $\bar{\mathbf{R}}$  er erstattet med  $\mathbf{R}$ .)

$$X_\tau(\omega) := \begin{cases} \lim_n X_{\tau(\omega) \wedge n}(\omega) & \text{hvis denne eksisterer i } \mathbf{R} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

d.v.s.  $X_\tau$  er '∞-variablen' hørende til  $(X_{\tau \wedge n})_{n \geq 0}$  defineret i h.h.t. Lemma 5.

Ma 1 og Lemma 5 sikrer derfor, at

**Ma 4**  $X_\tau$  er  $\mathcal{F}_\tau$ -målelig for enhver tilpasset proces  $(X_n)_{n \geq 0}$ .

Flg. variant af formel (7.4.6) er vigtig.

**Ma 5** For vilkårlig  $X \in L^1(P)$  og stoptid  $\tau$  gælder for ethvert  $k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$

$$E[X | \mathcal{F}_\tau] \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} = E[X | \mathcal{F}_k] \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} \quad P\text{-n.o.}$$

Bevis. Lad  $k$  være givet. Da begge sider er integrable og  $\mathcal{F}_k$ -målelige, er det nok at vise, at de har samme integral over ethvert  $B \in \mathcal{F}_k$ . Men dette følger af egenskaber ved betingede middelværdier, da

$$B \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_k \quad \text{for alle } B \in \mathcal{F}_k. \quad \diamond$$

7.3 og 7.4 indeholder ikke flg. to vigtige resultater.

**Ma 6** For enhver stoptid  $\tau$  er  $\mathcal{F}_\tau = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{\tau \wedge n})$ .

Bevis. Inklusionen  $\supseteq$  er åbenbar, da  $\mathcal{F}_{\tau \wedge n} \subseteq \mathcal{F}_\tau$  for alle  $n \geq 0$ , og den anden fås af identiteten

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B \cap \{\tau = n\} \cup B \cap \{\tau = \infty\},$$

idet  $B \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{\tau \wedge n}$  for alle  $n$  og alle  $B \in \mathcal{F}_\tau$  og

$$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{B} := \{B \in \mathcal{F}_\infty \mid B \cap \{\tau = \infty\} \in \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{\tau \wedge n})\}.$$

$\mathcal{B}$  er nemlig en  $\sigma$ -algebra, som indeholder ethvert  $\mathcal{F}_n$ , thi for  $n \geq 0$  og  $B \in \mathcal{F}_n$  er

$$B \cap \{\tau = \infty\} = \bigcap_{k=n}^{\infty} B \cap \{\tau \geq k\} \quad \text{og} \quad B \cap \{\tau \geq k\} \in \mathcal{F}_{\tau \wedge k} \quad \text{for } k \geq n. \quad \diamond$$

**Ma 7** Lad  $(X_n)_{n \geq 0}$  betegne en tilpasset proces og  $\tau$  en stoptid, så at  $X_\tau$  er  $P$ -integrabel, d.v.s. element i  $L^1(P)$ . Da er for enhver stoptid  $\sigma$

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = E[X_\tau | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}] \quad P\text{-n.o.}$$

Bevis. Ifølge Ma 3 og Ma 4 er  $\{\sigma < \tau\}$  og  $X_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \leq \sigma\}}$  begge  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ -målelige. Egenskaber ved betingede middelværdier viser derfor, at  $E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma]$  er lig

$$X_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} + E[X_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} | \mathcal{F}_\sigma] = E[X_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}] + \mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} \cdot E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma].$$

Men ifølge Ma 5 er

$$\mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} \cdot E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} \sum_{k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}} E[X_\tau | \mathcal{F}_k] \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma = k\}} =$$

$$\mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} \sum_{k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}} E[X_\tau | \mathcal{F}_k] \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \sigma = k\}} = \mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} \cdot E[X_\tau | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}] = E[X_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}]$$

og dermed ved addition den ønskede formel.  $\diamond$

Vi skal studere de såkaldte *martingal* processer, dels fordi de dukker op i utrolig mange sammenhænge, og dels fordi man for disse kan vise interessante *konvergensresultater* samt *maksimaluligheder*. Martingalerne defineres i h.h.t. flg. definition, hvor  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er et filter og  $(X_n)_{n \geq 0}$  en følge af reelle stokastiske variable.

**Definition**  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  kaldes en *martingal*, hvis  $(X_n)_{n \geq 0}$  er tilpasset til  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  og  $P$ -integrabel, d.v.s.  $X_n \in L^1(P, \mathcal{F}_n)$  for alle  $n \geq 0$ , samt

$$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n \quad P\text{-n.o.} \quad \text{for alle } n \geq 0.$$

Med notationen  $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$  for  $n \geq 1$  kan martingalbetingelsen ækvi-valent formuleres som

$$E[\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad P\text{-n.o.} \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

Hvis = erstattes med et  $\geq$ , taler man om en *submartingal*, og hvis der gælder  $\leq$ , taler man om en *supermartingal*. D.v.s.  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en martingal, hvis og kun hvis  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  både er en sub- og en supermartingal, og  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en supermartingal, hvis og kun hvis  $(-X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en submartingal. Mængden af martingaler m.h.t.  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  udgør derfor et vektorrum, hvorimod mængden af sub- h.h.v. supermartingaler kun er lukket under linearkombinationer med positive konstanter, d.v.s. udgør en såkaldt positiv kegle. Mere formelt

$$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0} \text{ og } (Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0} \text{ martingaler} \Rightarrow (aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0} \text{ martingal}$$

for alle  $a, b \in \mathbf{R}$ , og hvis udgangspunktet er to submartingaler, så fås igen en submartingal hvis  $a, b \in \mathbf{R}_+$ . (tilsvarende for supermartingaler)

Endvidere viser Jensen's ulighed for betingede middelværdier fig. resultat. Bemærk at en reel konveks funktion er kontinuert og derfor specielt Borel målelig.

**Ma 8** For enhver en reel konveks funktion  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  gælder

$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  martingal og  $\varphi(X_n) \in L^1(P) \ n \geq 0 \Rightarrow (\varphi(X_n), \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  submartingal.

Beviset, der beror på at

$$E[\varphi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \geq \varphi(E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]) = \varphi(X_n),$$

afslører, at hvis  $\varphi$  er konveks og voksende, så er konklusionen den samme for enhver submartingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Læseren opfordres til at formulere tilsvarende udsagn for supermartingaler og konkave funktioner.

Som det fremgår af ovenstående definition, betragtes her kun sub- og supermartingaler bestående af integrable variable, d.v.s. elementer i  $L^1(P)$ , hvorimod bogen kun kræver, at de ligger i  $L(P)$ . Man kan derfor her tale om den tilhørende *middelværdifunktion*  $n \mapsto E[X_n]$ , og det ses let, at denne er voksende for submartingaler, aftagende for supermartingaler og konstant for martingaler. Ligheden  $|x| = 2x^+ - x$  giver derfor, at

$$E[|X_n|] = 2 \cdot E[X_n^+] - E[X_n] \leq 2 \cdot E[X_n^+] - E[X_0] \quad n \geq 0,$$

for enhver submartingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , d.v.s.

$$\sup_n E[|X_n|] < \infty \Leftrightarrow \sup_n E[X_n^+] < \infty,$$

og dermed tilsvarende  $\sup_n E[|X_n|] < \infty \Leftrightarrow \sup_n E[X_n^-] < \infty$  for enhver supermartingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

Sektion 7.6 giver eksempler på martingaler, med særlig fokus på de martingaler der fremkommer ud fra uafhængige variable. Følgende er specielt vigtige.

**Ma 9** Lad  $(X_n)_{n \geq 0}$  betegne en følge af uafhængige integrable stokastiske variable, og lad  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne filtret frembragt af  $(X_n)_{n \geq 0}$ , d.v.s.

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n) \quad n \geq 0.$$

Da gælder idet

$$S_n := \sum_{j=0}^n X_j \quad \text{og} \quad P_n := \prod_{j=0}^n X_j \quad n \geq 0$$

1)  $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en martingal, hvis  $E[X_n] = 0$  for alle  $n$ , og en submartingal, hvis  $E[X_n] \geq 0$  for alle  $n$ .

Hvis yderligere  $X_n$ 'erne alle har middelværdi 0 og endelig varians, er processen  $(S_n^2 - \sum_{j=0}^n \text{Var}(X_j), \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  også en martingal.

2)  $(P_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en martingal, hvis  $E[X_n] = 1$  for alle  $n$ . Hvis  $X_n$ 'erne er ikke negative, er  $(P_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  en submartingal, hvis  $E[X_n] \geq 1$  for alle  $n$ .

Bemærk at resultatet kun udnytter, at  $X_n$  er  $\mathcal{F}_n$ -målelig og uafhængig af  $\mathcal{F}_{n-1}$ .

En anden vigtig type er de såkaldte Lévy martingaler, d.v.s. processer på formen

$$(E[X | \mathcal{G}_n], \mathcal{G}_n)_{n \geq 0},$$

hvor  $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$  er et filter og  $X$  et vilkårligt element i  $L^1(P)$ . Ifølge Bm 16' er variablene i en Lévy martingal uniformt integrable, og vi skal senere se, at enhver uniformt integrabel martingal er en Lévy martingal.

Lad mig også nævne den såkaldte *Doob dekomposition*. Betragt en tilpasset integrabel proces  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , d.v.s.  $X_n \in L^1(P, \mathcal{F}_n)$  for  $n \geq 0$ . For  $n \geq 1$  er

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \Delta X_k = X_0 + \sum_{k=1}^n E[\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}] + \sum_{k=1}^n (\Delta X_k - E[\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}]),$$

d.v.s. dekompositionen  $X_n = X_0 + A_n + M_n$  for  $n \geq 0$ , hvor  $A_0 = M_0 \equiv 0$  og

$$A_n = \sum_{k=1}^n E[\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}] \quad \text{og} \quad M_n = \sum_{k=1}^n (\Delta X_k - E[\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}])$$

for  $n \geq 1$ . Processerne  $(A_n)_{n \geq 0}$  og  $(M_n)_{n \geq 0}$  er begge  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -tilpassede og integrable, og ved nærmere eftersyn ses, at  $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en martingal og  $(A_n)_{n \geq 0}$  en såkaldt  $(\mathcal{F}_n)$ -*predictabel* proces, d.v.s.  $A_0$  er  $\mathcal{F}_0$ -målelig og

$$A_n \text{ er } \mathcal{F}_{n-1}\text{-målelig for alle } n \geq 1.$$

Bemærk at hvis  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en submartingal og derfor  $E[\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geq 0$  for alle  $n \geq 1$ , er  $(A_n)_{n \geq 0}$  en *voksende proces*, d.v.s.

$$0 \leq A_n \leq A_{n+1} \quad P\text{-n.o. for } n \geq 0.$$

Overvejelserne kan sammenfattes i flg. udsagn:

**Doob's Dekompositionssætning.**

*Enhver  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -tilpasset integrabel proces  $(X_n)_{n \geq 0}$  kan skrives på formen*

$$X_n = M_n + A_n, \quad n \geq 1 \quad X_0 = M_0,$$

*hvor  $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en martingal og  $(A_n)_{n \geq 0}$  en  $(\mathcal{F}_n)$ -predictabel proces. Fremstillingen er  $P$ -entydig, d.v.s. for enhver lignende repræsentation*

$$X_0 = \tilde{M}_0 \text{ og } X_n = \tilde{M}_n + \tilde{A}_n \quad n \geq 1 \quad \text{er } M_n = \tilde{M}_n \text{ og } A_n = \tilde{A}_n \quad P\text{-n.o. for } n \geq 0.$$

*Hvis  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en sub- h.h.v. en supermartingal, er  $(A_n)_{n \geq 0}$  h.h.v.  $(-A_n)_{n \geq 0}$  en voksende integrabel proces.*

Hvis  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en martingal, er

$$E[\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0 \quad \text{og derfor også} \quad E[V_k \cdot \Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0 \quad k \geq 1$$

$P$ -n.o., hvis  $V_k$  er begrænset og  $\mathcal{F}_{k-1}$ -målelig. Dette giver umiddelbart anledning til flg. resultat.

**Martingal Transforms.**

Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en martingal og  $(V_n)_{n \geq 0}$  en  $(\mathcal{F}_n)$ -predictabel proces, hvor  $V_n$  er begrænset for alle  $n \geq 0$ . Da er  $(V \bullet X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  en martingal, hvor

$$V \bullet X_n := V_0 \cdot X_0 + \sum_{k=1}^n V_k \cdot \Delta X_k \quad n \geq 0.$$

Hvis  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  en submartingal, er  $(V \bullet X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  igen en submartingal, hvis  $V_n$ 'erne yderligere er ikke-negative. Processer af den her definerede art er i litteraturen kendt under navnet *martingal transforms*.

Martingalerne har som allerede nævnt mange interessante egenskaber, og vi skal i det følgende gennemgå nedenstående fundamentale resultater. Listen omfatter ikke alle de resultater, der er nævnt i Hoffmann's bog, men dog de vigtigste. Ligeledes afviger de her givne beviser ofte fra bogens.

**Sætning Ma 1 Optional Sampling.** (skrabet udgave)

Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en martingal. Den standsede proces  $(X_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er da en martingal for enhver stoptid  $\tau$ , og for ethvert par af begrænsede stoptider  $0 \leq \sigma \leq \tau$  er  $X_\tau$  og  $X_\sigma$  elementer i  $L^1(P)$  og

$$E[X_0] = E[X_\sigma] = E[X_\tau] \quad \text{samt} \quad E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma \quad P \text{-n.o.}$$

Der gælder helt tilsvarende resultater for sub- og supermartingaler med = erstatet af det relevante ulighedstegn.

**Sætning Ma 2 Maksimaluligheder.**

Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en submartingal og lad  $\lambda > 0$  være givet. Da gælder for alle  $n \geq 1$

$$\lambda \cdot P(\min_{0 \leq k \leq n} X_k < -\lambda) \leq E[X_n^+] - E[X_0]$$

$$\lambda \cdot P(\max_{0 \leq k \leq n} X_k > \lambda) \leq E[X_n, \max_{0 \leq k \leq n} X_k > \lambda] \leq E[X_n^+],$$

hvilket ved addition viser, at for alle  $n \geq 1$  og  $\lambda > 0$  er

$$\lambda \cdot P(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| > \lambda) \leq 3 \cdot \max_{0 \leq k \leq n} E[|X_k|].$$

Den sidste ulighed gælder også for supermartingaler. Lader vi  $n \rightarrow \infty$  fås derfor

$$\lambda \cdot P(\sup_k |X_k| > \lambda) \leq 3 \cdot \sup_k E[|X_k|] \quad \text{for } \lambda > 0,$$

d.v.s. for enhver sub- eller supermartingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er  $P(\sup_k |X_k| < \infty) = 1$ , hvis  $\sup_k E[|X_k|] < \infty$ . Specielt for enhver ikke-negativ supermartingal.

**Sætning Ma 3** *Opkrydsningsuligheder.*

Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en supermartingal. Da gælder for alle  $n \geq 1$  og alle reelle tal  $r < s$

$$(s - r) \cdot E[U_{r,s}^n] \leq E[(X_n - r)^-] \leq E[X_n^-] + |r|,$$

hvor  $U_{r,s}^n$  er antallet af opkrydsninger over  $[r, s]$  i tidsintervallet  $[0, n]$ . Ved brug af Monoton konvergens fås derfor, at

$$(s - r) \cdot E[\sup_n U_{r,s}^n] \leq \sup_n E[X_n^-] + |r|.$$

Det totale antal opkrydsninger over  $[r, s]$ , d.v.s. variabelen  $U_{r,s} := \sup_n U_{r,s}^n$  er derfor endelig  $P$ -n.o., hvis  $\sup_k E[X_k^-]$  eller ækvivalent  $\sup_k E[|X_k|]$  er endelig.

**Sætning Ma 4** *Konvergenssætninger.*

Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en sub- eller supermartingal. Da eksisterer  $\lim_n X_n(\omega)$  i  $\mathbf{R}$  for  $P$ -n.a.  $\omega$  hvis  $\sup_k E[|X_k|] < \infty$ , og grænsefunktionen er  $P$ -integrabel. Udtrykt ved hjælp af  $X_\infty$  kan dette formuleres som

$$\sup_k E[|X_k|] < \infty \Rightarrow X_n \rightarrow X_\infty \text{ } P\text{-n.o. og } X_\infty \in L^1(P).$$

Specielt konvergerer enhver ikke-negativ supermartingal  $P$ -n.o.

Kombineres med Sætning 6 fås.

**Korollar** For enhver uniformt integrabel sub- eller supermartingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  gælder

$$X_\infty \in L^1(P) \text{ og } X_n \rightarrow X_\infty \text{ } P\text{-n.o. og i } P\text{-middel.}$$

Det er naturligt at undersøge sammenhængen mellem  $X_n$  og  $E[X_\infty | \mathcal{F}_n]$ . Dette formuleres som endnu et korollar. Der gælder selvfølgelig et tilsvarende resultat for supermartingaler.

**Korollar** Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  være en submartingal, som opfylder betingelsen i Sætning Ma 4, d.v.s.  $\sup_k E[|X_k|] < \infty$ . Da er

$$X_n \leq E[X_\infty | \mathcal{F}_n] \text{ } P\text{-n.o. for } n \geq 0 \Leftrightarrow \{X_n^+ | n \geq 1\} \text{ er uniformt integrabel,}$$

og

$$X_n = E[X_\infty | \mathcal{F}_n] \text{ } P\text{-n.o. for } n \geq 0,$$

hvis og kun hvis  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en uniformt integrabel martingal.

**Sætning Ma 5** *Optional Sampling.*

Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en martingal og lad  $0 \leq \sigma \leq \tau$  betegne to stoptider, hvor  $\tau$  er optional for  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Da er  $X_\tau$  og  $X_\sigma$  elementer i  $L^1(P)$  og

$$E[X_0] = E[X_\sigma] = E[X_\tau] \quad \text{samnt} \quad E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma \quad P\text{-n.o.}$$

Der gælder et tilsvarende resultat for sub- og supermartingaler med  $=$  erstattet af det relevante ulighedstegn. Optionalitetskravet kan her svækkes lidt, idet det for en submartingal er nok, at  $\tau$  er optional for processen  $(X_n^+)_{n \geq 0}$ , og tilsvarende for en supermartingal nok at  $\tau$  er optional for  $(X_n^-)_{n \geq 0}$ .

**Sætning Ma 1 og Ma 2.**

Bevis for **Sætning Ma 1** (submartingal tilfældet). Lad  $\tau$  betegne en stoptid. Da

$$|X_{\tau \wedge n}| \leq \sum_{k=0}^n |X_k| \quad \text{og} \quad X_{\tau \wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} X_k + \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}} X_n$$

er  $X_{\tau \wedge n}$  integrabel og  $\mathcal{F}_n$ -målelig for alle  $n \geq 0$ . Ligeledes gælder for ethvert  $n$  ifølge regnereglerne for betingede middelværdier, da

$$\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} X_\tau = \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} X_{\tau \wedge n} \quad \text{og} \quad \{\tau > n\} \text{ er } \mathcal{F}_n\text{-målelige,}$$

at

$$\begin{aligned} E[X_{\tau \wedge (n+1)} | \mathcal{F}_n] &= E[\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} X_\tau + \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \\ &\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} X_\tau + \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} \cdot E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} X_\tau + \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} X_n = X_{\tau \wedge n}. \end{aligned}$$

Dette viser den første påstand. Lad dernæst  $\sigma$  og  $\tau$  betegne to stoptider, så at  $\sigma \leq \tau \leq m$ , hvor  $m \geq 1$  er et helt tal. Integrabiliteten af  $X_\tau$  og  $X_\sigma$  følger som ovenfor og ifølge det netop viste, er

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_n] = E[X_{\tau \wedge m} | \mathcal{F}_n] \geq X_{\tau \wedge n} \quad P\text{-n.o.}$$

for alle  $0 \leq n \leq m$ . Men heraf fås ifølge Ma 5, at

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = \sum_{n=0}^m E[X_\tau | \mathcal{F}_n] \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma=n\}} \geq \sum_{n=0}^m X_{\tau \wedge n} \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma=n\}} = X_{\tau \wedge \sigma}.$$

Uligheden  $E[X_\sigma] \leq E[X_\tau]$  følger herefter umiddelbart ved at tage middelværdi på begge sider, og  $E[X_0] \leq E[X_\sigma]$  er et specialtilfælde heraf svarende til et passende valg af begrænsede stoptider.  $\diamond$

Som en umiddelbar konsekvens ses at for enhver stoptid  $\tau$  og ethvert  $n \geq 0$  er

$$X_{\tau \wedge n} = E[X_n | \mathcal{F}_{\tau \wedge n}]$$

i martingaltilfældet og

$$X_{\tau \wedge n}^+ \leq E[X_n^+ | \mathcal{F}_{\tau \wedge n}]$$

i submartingaltilfældet. Egenskaber ved betingede middelværdier giver derfor anledning til flg. korollar

**Korollar** For enhver stoptid  $\tau$  er  $(X_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  en uniform integrabel martingal h.h.v. begrænset i  $L^1(P)$ , hvis dette gælder for  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

Tilsvarende er  $(X_{\tau \wedge n}^+, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  en uniform integrabel submartingal h.h.v. begrænset i  $L^1(P)$ , hvis dette gælder for  $(X_n^+, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

Som en første anvendelse af den viste skrabede udgave af Optional Sampling vises **Sætning Ma 2**. Lad derfor  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en submartingal og lad  $\lambda > 0$  være givet. Definer, idet  $\inf \emptyset := \infty$ ,

$$\tau_\lambda := \inf\{n \geq 0 \mid X_n > \lambda\} \quad \text{og} \quad \sigma_\lambda := \inf\{n \geq 0 \mid X_n < -\lambda\}.$$

Da  $(X_n)_{n \geq 0}$  er tilpasset, er  $\tau_\lambda$  og  $\sigma_\lambda$  stoptider, og for alle  $n$  gælder

$$\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > \lambda\} = \{\tau_\lambda \leq n\} = \{X_{\tau_\lambda \wedge n} > \lambda\} \cap \{\tau_\lambda \leq n\}$$

og tilsvarende

$$\{\min_{0 \leq k \leq n} X_k < -\lambda\} = \{\sigma_\lambda \leq n\} = \{-X_{\sigma_\lambda \wedge n} > \lambda\} \cap \{\sigma_\lambda \leq n\}.$$

Ifølge den ovenfor viste 'skrabede udgave' af Optional Sampling gælder derfor for alle  $n$ , da  $\{\tau_\lambda \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_\lambda \wedge n}$  og tilsvarende  $\{\sigma_\lambda > n\} = \{\sigma_\lambda \leq n\}^c \in \mathcal{F}_{\sigma_\lambda \wedge n}$ , at

$$\begin{aligned} \lambda \cdot P(\max_{0 \leq k \leq n} X_k > \lambda) &\leq E[X_{\tau_\lambda \wedge n}, \tau_\lambda \leq n] \\ &\leq E[X_n, \tau_\lambda \leq n] \leq E[X_n^+, \tau_\lambda \leq n] \leq E[X_n^+]. \end{aligned}$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned} \lambda \cdot P(\min_{0 \leq k \leq n} X_k < -\lambda) &\leq E[-X_{\sigma_\lambda \wedge n}, \sigma_\lambda \leq n] \\ &= E[X_{\sigma_\lambda \wedge n}, \sigma_\lambda > n] - E[X_{\sigma_\lambda \wedge n}] \\ &\leq E[X_n, \sigma_\lambda > n] - E[X_{\sigma_\lambda \wedge n}] \leq E[X_n^+] - E[X_0]. \end{aligned}$$

Da absolutværdien af en martingal er en submartingal, gælder specielt.

### Doob's Ulighed.

Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en martingal. Da gælder for alle  $\lambda > 0$  og  $n \geq 0$

$$\lambda \cdot P(\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| > \lambda) \leq E[|X_n|, \max_{0 \leq k \leq n} |X_k| > \lambda]$$

og dermed (se nedenstående momentulighed) for alle  $p > 1$

$$\|\max_{0 \leq k \leq n} |X_k|\|_p \leq p/(1-p) \cdot \|X_n\|_p \quad n \geq 0.$$

**Momentulighed.** Hvis stokastiske variable  $X$  og  $Y$  opfylder

$$\lambda \cdot P(|X| > \lambda) \leq E[|Y|, |X| > \lambda] \quad \text{for alle } \lambda > 0,$$

er for alle  $p > 1$

$$\|X\|_p = E[|X|^p]^{1/p} \leq p/(1-p) \cdot E[|Y|^p]^{1/p} = p/(1-p) \cdot \|Y\|_p.$$

**Sætning Ma 3 og Ma 4.**

Bevis for **Sætning Ma 3**. Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en supermartingal og  $r < s$  reelle tal. Da  $(X_n)_{n \geq 0}$  er tilpasset, definerer

$$\tau_1 := \inf\{n \geq 0 \mid X_n < r\} \quad \text{og} \quad \sigma_1 := \inf\{n \geq \tau_1 \mid X_n > s\}$$

$$\tau_k := \inf\{n \geq \sigma_{k-1} \mid X_n < r\} \quad \text{og} \quad \sigma_k := \inf\{n \geq \tau_k \mid X_n > s\} \quad k > 1$$

stoptider, så at  $\tau_1 \leq \sigma_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_2 \leq \dots$ . Bemærk at  $\sigma_k > k$  samt at  $X_{\tau_k} < r$  på  $\{\tau_k < \infty\}$  og tilsvarende  $X_{\sigma_k} > s$  på  $\{\sigma_k < \infty\}$  og dermed da  $\tau_k \leq \sigma_k$

$$X_{\sigma_k} - X_{\tau_k} > s - r \quad \text{på} \quad \{\sigma_k < \infty\}.$$

Definer herudfra for  $n \geq 1$  antallet af *opkrydsninger*  $U_{r,s}^n$  over intervallet  $[r, s]$  i tidsrummet  $\{0, 1, \dots, n\}$ , d.v.s.

$$U_{r,s}^n := \sup\{k \mid \sigma_k \leq n\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\sigma_k \leq n\}}.$$

For ethvert  $n, k \geq 1$  er

$$\mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n\}} = \mathbf{1}_{\{\sigma_k \leq n\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n < \sigma_k\}},$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (X_{\sigma_k \wedge n} - X_{\tau_k \wedge n}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n\}} = \sum_{k=1}^n (X_{\sigma_k} - X_{\tau_k}) \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma_k \leq n\}} \\ & + \sum_{k=1}^n (X_n - X_{\tau_k}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n < \sigma_k\}} \geq (s - r) \cdot U_{r,s}^n + \sum_{k=1}^n (X_n - r) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n < \sigma_k\}} \\ & \geq (s - r) \cdot U_{r,s}^n - (X_n - r)^- \cdot \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n < \sigma_k\}} \geq (s - r) \cdot U_{r,s}^n - (X_n - r)^-, \end{aligned}$$

og dermed

$$(s - r) \cdot U_{r,s}^n \leq (X_n - r)^- + \sum_{k=1}^n (X_{\sigma_k \wedge n} - X_{\tau_k \wedge n}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n\}}$$

Men for alle  $1 \leq k \leq n$  gælder ifølge den 'skrabede udgave' af Optional Sampling

$$E[(X_{\sigma_k \wedge n} - X_{\tau_k \wedge n}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n\}}] = E[E[X_{\sigma_k \wedge n} - X_{\tau_k \wedge n} \mid \mathcal{F}_{\tau_k \wedge n}] \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq n\}}] \leq 0,$$

og dermed

$$(s - r) \cdot E[U_{r,s}^n] \leq E[(X_n - r)^-] \leq E[X_n^-] + |r|. \quad \diamond$$

**Korollar** Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  betegne en sub- eller en supermartingal, som er begrænset i  $L^1(P)$ , d.v.s.  $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ . Da er

$$P(-\infty < \liminf_n X_n = \limsup_n X_n < \infty) = 1,$$

d.v.s.  $\lim_n X_n(\omega)$  eksisterer i  $\mathbf{R}$  for  $P$ -n.a.  $\omega$ .

Bevis. Den simple sammenhæng mellem sub- og supermartingaler viser, at vi uden tab af generalitet kan antage, at  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en supermartingal. Da

$$\sup_n E[|X_n|] < \infty \Rightarrow P(\sup_n |X_n| < \infty) = 1$$

ifølge maksimalulighederne, udestår kun at vise, at lighedstegnet holder  $P$ -n.o. Men gælder dette ikke, eksisterer der, da  $\mathbf{R}$  er separabel, reelle tal  $r < s$ , så at

$$0 < P(\liminf_n X_n < r < s < \limsup_n X_n) \leq P(\sup_n U_{r,s}^n = \infty),$$

hvilket strider mod Sætning Ma3, da  $E[\sup_n U_{r,s}^n] = \sup_n E[U_{r,s}^n] < \infty$ .  $\diamond$

Bemærkning. Da  $E[|X_n|] = E[X_n] \leq E[X_0]$  for enhver ikke-negativ supermartingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en sådan altid konvergent  $P$ -n.o.

Med  $X_\infty$  defineret i henhold til den vedtagne konvention, kan det viste formuleres som.

### Martingal Konvergenssætningen.

For enhver sub- eller supermartingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  gælder

$$\sup_k E[|X_k|] < \infty \Rightarrow X_n \rightarrow X_\infty \text{ } P\text{-n.o. og } X_\infty \in L^1(P).$$

Hvis  $\{X_n | n \geq 0\}$  er uniformt integrabel, er der yderligere konvergens i  $L^1(P)$ .

Integrabiliteten følger af Fatou's Lemma, idet

$$E[|X_\infty|] \leq \liminf_n E[|X_n|] \leq \sup_n E[|X_n|] < \infty,$$

og konvergens i  $L^1(P)$  følger dernæst af Sætning 6. Det sidste punkt kan præciseres yderligere.

**Korollar** For enhver martingal  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  gælder

$$\{X_n | n \geq 0\} \text{ uniformt integrabel} \Rightarrow X_n = E[X_\infty | \mathcal{F}_n] \text{ } P\text{-n.o. } n \geq 0,$$

og hvis  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en submartingal gælder

$$\{X_n^+ | n \geq 0\} \text{ uniformt integrabel} \Rightarrow X_n \leq E[X_\infty | \mathcal{F}_n] \text{ } P\text{-n.o. } n \geq 0,$$

Bevis. Da betinget middelværdi er en kontraktion i  $L^1(P)$ , har vi

$$X_k \rightarrow X_\infty \text{ i } L^1(P) \Rightarrow E[X_k | \mathcal{F}_n] \rightarrow_{k \rightarrow \infty} E[X_\infty | \mathcal{F}_n] \text{ i } L^1(P)$$

for alle  $n$ , hvoraf martingaltildfældet umiddelbart følger, da

$$X_n = E[X_k | \mathcal{F}_n] \text{ } P\text{-n.o. for } k \geq n.$$

Betragt dernæst submartingaltildfældet. Antagelsen sikrer at  $\sup_k E[|X_k|] < \infty$  og dermed  $X_n \rightarrow X_\infty$   $P$ -n.o. For ethvert  $m \geq 0$  konvergerer derfor

$$X_n \vee (-m) \rightarrow X_\infty \vee (-m) \text{ } P\text{-n.o.,}$$

og også i  $L^1(P)$ , idet  $\{X_n \vee (-m) | n \geq 0\}$  er uniformt integrabel, da

$$|X_n \vee (-m)| \leq X_n^+ + m \text{ for alle } n, m \geq 0.$$

Ved fornyet brug af, at betingede middelværdier er kontraktioner i  $L^1(P)$ , fås derfor

$$E[X_k \vee (-m) | \mathcal{F}_n] \rightarrow_{k \rightarrow \infty} E[X_\infty \vee (-m) | \mathcal{F}_n] \text{ i } L^1(P)$$

for alle  $n \geq 0$ , og dermed  $X_n \leq E[X_\infty \vee (-m) | \mathcal{F}_n]$   $P$ -n.o. for alle  $m \geq 0$ , da

$$X_n \leq X_n \vee (-m) \leq E[X_k \vee (-m) | \mathcal{F}_n] \text{ } P\text{-n.o.}$$

for alle  $n \leq k$ . Det ønskede resultat følger nu ved grænseovergang, idet

$$E[X_\infty | \mathcal{F}_n] = \inf_{m \geq 0} E[X_\infty \vee (-m) | \mathcal{F}_n] \text{ } P\text{-n.o.}$$

for ethvert  $n \geq 0$  ifølge egenskaber ved betingede middelværdier. ◇

Konvergenssætningen giver anledning til et par interessante korollarer.

### Lévy's Sætning

For ethvert  $X \in L^1(P)$  og ethvert filter  $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$  konvergerer

$$E[X | \mathcal{G}_n] \rightarrow E[X | \mathcal{G}_\infty] \text{ } P\text{-n.o. og i } L^1(P).$$

Specielt gælder for enhver  $(\mathcal{G}_n)$ -stoptid  $\tau$ , at hvis  $X_n = E[X | \mathcal{G}_n]$  for  $n \geq 0$ , så er

$$X_\tau = E[X | \mathcal{G}_\tau] \text{ } P\text{-n.o.}$$

Bevis. Lad  $X \in L^1(P)$  og  $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$  være givet.  $(E[X | \mathcal{G}_n], \mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$  udgør da en uniform integrabel martingal, og ifølge martingalkonvergenssætningen findes der derfor et element  $\tilde{X} \in L^1(P)$ , som er  $\mathcal{G}_\infty$ -målelig, så at

$$E[X | \mathcal{G}_n] \rightarrow \tilde{X} \text{ } P\text{-n.o. og i } L^1(P) \text{ og } E[X | \mathcal{G}_n] = E[\tilde{X} | \mathcal{G}_n] \text{ } P\text{-n.o. } n \geq 0.$$

For alle  $n \geq 0$  og alle  $B \in \mathcal{G}_n$  gælder dermed

$$\int_B X dP = \int_B E[X | \mathcal{G}_n] dP = \int_B E[\tilde{X} | \mathcal{G}_n] dP = \int_B \tilde{X} dP$$

hvilket, da  $\bigcup_n \mathcal{G}_n$  er en algebra, som frembringer  $\mathcal{G}_\infty$ , ifølge Proposition 5 Lemma 2 viser, at

$$\tilde{X} = E[X | \mathcal{G}_\infty] \quad P\text{-n.o.}$$

og dermed korollarets første del. Da  $X_\infty = E[X | \mathcal{G}_\infty]$   $P$ -n.o. ifølge det netop viste, fås af Ma 5, at

$$X_\tau = \sum_{k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}} X_k \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} = \sum_{k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}} E[X | \mathcal{G}_k] \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} = E[X | \mathcal{G}_\tau]. \quad \diamond$$

Bemærkning. Da enhver betinget middelværdi er en kontraktion i  $L^1(P)$  kan Levý's Sætning suppleres med

$$X_n \rightarrow X \text{ i } L^1(P) \Rightarrow E[X_n | \mathcal{G}_n] \rightarrow E[X | \mathcal{G}_\infty] \text{ i } L^1(P).$$

**$L^p$ -konvergens.** ( $p > 1$ )

For enhver martingal  $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  og ethvert  $p > 1$  gælder:

$$\sup_n E[|M_n|^p] < \infty \Leftrightarrow \lim_n M_n \text{ eksisterer } P\text{-n.o. og i } L^p(P).$$

Bevis. Implikationen  $\Leftarrow$  er en umiddelbar konsekvens af  $L^p$ -konvergens. Men hvis  $\sup_n E[|M_n|^p] < \infty$  er  $\{M_n | n \geq 0\}$  uniformt integrabel, og ifølge martingal konvergenssætningen findes der derfor et  $M \in L^1(P, \mathcal{F}_\infty)$ , så at

$$M_n = E[M | \mathcal{F}_n] \quad \text{og} \quad M_n \rightarrow M \quad P\text{-n.o.}$$

Ifølge Fatou's Lemma gælder derfor

$$E[|M|^p] \leq \liminf_n E[|M_n|^p] \leq \sup_n E[|M_n|^p] < \infty,$$

d.v.s.  $M \in L^p(P)$ , og da

$$|M_n|^p \leq E[|M|^p | \mathcal{F}_n] \quad P\text{-n.o. for alle } n \geq 0$$

ifølge Jensen's ulighed for betingede middelværdier, har vi alt i alt, at  $\lim_n M_n$  eksisterer  $P$ -n.o. og  $\{|M_n|^p | n \geq 0\}$  er uniformt integrabel.  $L^p(P)$ -konvergens følger derfor af korollaret til Sætning 6.  $\diamond$

Resultatet omhandler, som det fremgår, kun tilfældet  $p > 1$  og gælder generelt ikke for  $p = 1$ , men hvis den betragtede martingal er afsnitsfølgen hørende til en sum af uafhængige centrerede variable, kan man ved hjælp af korollaret til Ottavianis ulighed vise flg. resultat for  $p = 1$ .

Hvis  $(X_i)_{i \geq 1}$  er en følge af uafhængige integrable stokastiske variable med tilhørende afsnitssummer  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$  for  $n \geq 1$ , gælder

$$\sup_n E[|S_n - E[S_n]|] < \infty \Rightarrow \lim_n (S_n - E[S_n]) \text{ eksisterer } P\text{-n.o. og i } L^1(P).$$

D.v.s. hvis  $(S_n)_{n \geq 1}$  er begrænset i  $L^1(P)$ , eksisterer  $\lim_n S_n$   $P$ -n.o. og i  $L^1(P)$ , hvis  $X_i$ 'erne alle har middelværdi 0, eller hvis  $(S_n)_{n \geq 1}$  er konvergent i fordeling.

Bevis. Martingal konvergenssætningen anvendt på

$$(S_n - E[S_n])_n = \left( \sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i]) \right)_n$$

viser, at

$$\lim_n (S_n - E[S_n]) \text{ eksisterer } P\text{-n.o.},$$

og da

$$E[\sup_n |S_n - E[S_n]|] \leq 6 \cdot \sup_n E[|S_n - E[S_n]|] < \infty$$

ifølge Korollaret til Ottaviani's ulighed, er der også konvergens i  $L^1(P)$ .

Da  $|E[S_n]| \leq E[|S_n|]$  for alle  $n$  viser trekantsuligheden, at  $\sup_n E[|S_n - E[S_n]|]$  er endelig, hvis  $(S_n)_{n \geq 1}$  er begrænset i  $L^1(P)$ . Bemærkningen er derfor klar, hvad angår tilfældet med middelværdi 0. I den anden situation konvergerer

$$(S_n)_{n \geq 1} \text{ og } (S_n - E[S_n])_{n \geq 1} \text{ begge i fordeling.}$$

Heraf følger (ikke helt trivelt), at  $\lim_n E[S_n]$  eksisterer i  $\mathbf{R}$  og dermed ved addition, at

$$\lim_n S_n \text{ eksisterer } P\text{-n.o. og i } L^1(P).$$

### Optionalitet.

**Notation.** Hvis  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er et filter i  $\mathcal{F}$  og  $(Y_n)_{n \geq 0}$  en reel tilpasset stokastisk proces, siges en stoptid  $\tau$  at være *optional* for  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , hvis  $\{Y_{\tau \wedge n} \mid n \geq 0\}$  er uniformt integrabel.

Optionalitet er altså et krav om, at processen  $(Y_n)_{n \geq 0}$  ikke må blive 'for stor' før tidspunkt  $\tau$ . Dette giver anledning til flg. simple kriterier for optionalitet.

a)  $\tau$  er optional for  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , hvis  $|Y_{\tau \wedge n}| \leq Y$   $P$ -n.o. for alle  $n \geq 0$  for et  $Y \in L^1(P)$ , eller ækvivalent hvis  $\sup_n |Y_{\tau \wedge n}| \in L^1(P)$ .

b)  $\tau$  er optional for  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , hvis der findes et  $\alpha > 1$ , så at  $\sup_n E[|Y_{\tau \wedge n}|^\alpha] < \infty$ .

Hvis  $Y_n$ 'erne er integrable, d.v.s. elementer i  $L^1(P)$ , er enhver begrænset stoptid  $\tau$  optional for  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , thi hvis  $\tau \leq M$  for et positivt helt tal  $M$  er

$$|Y_{\tau \wedge n}| \leq \sum_{k=0}^M |Y_k| \quad \text{for alle } n \geq 0,$$

og da højresiden er integrabel, fås optionaliteten umiddelbart af a).

Ud over kriterierne a) og b) er det også værd at huske, at Bm 16 sommetider kan benyttes til at vise optionalitet, samt at

c)  $\tau$  er optional for  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , hvis  $\lim Y_{\tau \wedge n}$  eksisterer i  $L^1(P)$ .

Opskrivningerne

$$Y_{\tau \wedge \sigma \wedge n} = \mathbf{1}_{\{\sigma > \tau\}} Y_{\tau \wedge n} + \mathbf{1}_{\{\sigma \leq \tau\}} Y_{\sigma \wedge n}, \quad Y_{(\tau \vee \sigma) \wedge n} = \mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} Y_{\tau \wedge n} + \mathbf{1}_{\{\sigma \geq \tau\}} Y_{\sigma \wedge n}$$

og dermed

$$|Y_{\tau \wedge \sigma \wedge n}| \leq |Y_{\tau \wedge n}| + |Y_{\sigma \wedge n}| \quad \text{og} \quad |Y_{(\tau \vee \sigma) \wedge n}| \leq |Y_{\tau \wedge n}| + |Y_{\sigma \wedge n}|,$$

viser, at hvis  $\tau$  og  $\sigma$  er optionale stoptider for  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , så er både  $\tau \wedge \sigma$  og  $\tau \vee \sigma$  optional for  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

Pr. definition af  $Y_\tau$  er  $|Y_\tau| \leq \liminf_n |Y_{\tau \wedge n}|$   $P$ -n.o., og ifølge Fatou's Lemma gælder derfor, at

$$E[|Y_\tau|] \leq \liminf_n E[|Y_{\tau \wedge n}|] \leq \sup_n E[|Y_{\tau \wedge n}|],$$

d.v.s.  $\tau$  kan kun være optional, hvis  $E[|Y_\tau|] < \infty$ . Men betingelsen er langt fra tilstrækkelig, og vi vil nu se undersøge på, hvad der yderligere skal til. Ligheden

$$Y_{\tau \wedge n} = \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} Y_n + \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} Y_\tau$$

viser, da  $\{\tau > n\}$  og  $\{\tau \leq n\}$  er disjunkte, at  $\tau$  er optional, hvis og kun hvis

$$\{\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} Y_\tau \mid n \geq 0\} \quad \text{og} \quad \{\mathbf{1}_{\{\tau > n\}} Y_n \mid n \geq 0\}$$

begge er uniformt integrable. Her er der ingen problemer med den første, thi da  $\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}}|Y_\tau| \uparrow \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}|Y_\tau|$   $P$ -n.o. ses at

$$\{\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}}Y_\tau \mid n \geq 0\} \text{ uniformt integrabel} \Leftrightarrow \int_{\{\tau < \infty\}} |Y_\tau| dP < \infty.$$

Den anden er derimod mere kompliceret. Men opskrivningen

$$\mathbf{1}_{\{\tau > n\}}Y_n = \mathbf{1}_{\{n < \tau < \infty\}}Y_n + \mathbf{1}_{\{\tau = \infty\}}Y_n$$

viser som før, da  $\mathbf{1}_{\{n < \tau < \infty\}}Y_n \rightarrow 0$   $P$ -n.o., at

$$\{\mathbf{1}_{\{\tau > n\}}Y_n \mid n \geq 0\} \text{ uniformt integrabel hvis og kun hvis}$$

$$\{\mathbf{1}_{\{\tau = \infty\}}Y_n \mid n \geq 0\} \text{ uniformt integrabel og } \lim_n \int_{\{n < \tau < \infty\}} |Y_n| dP = 0.$$

Alt i alt har vi vist flg. optionalitetskriterium.

*En endelig stoptid  $\tau$  er optional for  $(Y_n)_{n \geq 0}$  hvis og kun hvis*

$$\int_{\{\tau < \infty\}} |Y_\tau| dP < \infty \text{ og } \lim_n \int_{\{n < \tau < \infty\}} |Y_n| dP = 0,$$

Bemærk at da  $\tau$  er endelig, er

$$\int_{\{\tau < \infty\}} |Y_\tau| dP = E[|Y_\tau|] \text{ og } \int_{\{n < \tau < \infty\}} |Y_n| dP = E[|Y_n|; \tau > n] \quad n \geq 0$$

Som allerede nævnt er en stoptid  $\tau$  optional, hvis processen ikke bliver for stor før tid  $\tau$ . Det er derfor nærliggende at tro, at optionalitet af  $\tau$  medfører optionalitet af enhver stoptid  $\sigma$ , som er mindre end  $\tau$ , d.v.s. opfylder  $\sigma \leq \tau$ . Dette gælder dog ikke altid, men ligheden

$$Y_{\sigma \wedge n} = \mathbf{1}_{\{\sigma \leq n\}}Y_\sigma + \mathbf{1}_{\{\sigma > n\}}Y_n = \mathbf{1}_{\{\sigma \leq n\}}Y_\sigma + \mathbf{1}_{\{\sigma > n\}}Y_{\tau \wedge n}$$

viser, at det er sandt, hvis  $\{\mathbf{1}_{\{\sigma \leq n\}}Y_\sigma \mid n \geq 0\}$  er uniformt integrabel, hvilket, som ovenfor vist, er ensbetydende med, at

$$\int_{\{\sigma < \infty\}} |Y_\sigma| dP < \infty.$$

Men som før bemærket, er denne egenskab også nødvendig, d.v.s. hvis en stoptid  $\tau$  er optional for  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , så gælder for enhver stoptid  $\sigma \leq \tau$ , at

$$\sigma \text{ er optional for } (Y_n)_{n \geq 0} \Leftrightarrow \int_{\{\sigma < \infty\}} |Y_\sigma| dP < \infty.$$

**Sætning Ma 5.**

Bevis for **Sætning Ma 5**. Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  være en submartingal og  $0 \leq \sigma \leq \tau$  stoptider, hvor  $\tau$  antages optional for  $(X_n^+)_{n \geq 0}$ , d.v.s.  $\{X_{\tau \wedge n}^+ \mid n \geq 0\}$  er uniformt integrabel.

Da  $\sigma \wedge n \leq \tau \wedge n$  viser den 'skrabede udgave' af Optional Sampling at

$$X_{\sigma \wedge n} \leq E[X_{\tau \wedge n} \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge n}] \text{ og dermed } X_{\sigma \wedge n}^+ \leq E[X_{\tau \wedge n}^+ \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge n}]$$

for  $n \geq 0$ , og ifølge egenskaber ved betingede middelværdier er  $\{X_{\sigma \wedge n}^+ \mid n \geq 0\}$  derfor uniformt integrabel, d.v.s.  $\sigma$  er også optional for  $(X_n^+)_{n \geq 0}$ .

Benyttes martingal konvergenssætningen på de to submartingaler  $(X_{\sigma \wedge n}, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  og  $(X_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  fås derfor, at  $X_\sigma$  og  $X_\tau$  er elementer i  $L^1(P)$  og

$$X_{\sigma \wedge n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_\sigma \text{ og } X_{\tau \wedge n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_\tau \text{ } P\text{-n.o.}$$

Korollaret til martingal konvergenssætningen viser endvidere, at

$$X_{\tau \wedge n} \leq E[X_\tau \mid \mathcal{F}_n] \text{ } P\text{-n.o.}$$

og dermed ifølge den skrabede udgave af Optional Sampling

$$X_{\sigma \wedge n} \leq E[X_{\tau \wedge n} \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge n}] \leq E[E[X_\tau \mid \mathcal{F}_n] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge n}] = E[X_\tau \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge n}].$$

Som allerede nævnt konvergerer venstresiden her  $P$ -n.o. mod  $X_\sigma$ , og da

$$E[X_\tau \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \text{ } P\text{-n.o.,}$$

ifølge Lévy's Sætning ses at

$$X_\sigma \leq E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \text{ } P\text{-n.o.}$$

og dermed også uligheden  $E[X_\sigma] \leq E[X_\tau]$ . ◇

I martingaltilfældet gælder tilsvarende formler blot med lighedstegn overalt.

Som en konsekvens af Ma 7 og det viste resultat har vi flg. korollar.

**Korollar.** *Lad  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  være en martingal og  $\tau$  en stoptid, som er optional for  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Da er*

$$X_{\sigma \wedge \tau} = E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \text{ } P\text{-n.o.}$$

for enhver stoptid  $\sigma$ , d.v.s.  $\{X_\sigma \mid \sigma \text{ stoptid, } \sigma \leq \tau\}$  er uniformt integrabel.

Hvis  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  er en submartingal og  $\tau$  optional for  $(X_n^+)_{n \geq 0}$ , gælder tilsvarende

$$X_{\sigma \wedge \tau} \leq E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \text{ } P\text{-n.o.}$$

for enhver stoptid  $\sigma$  og  $\{X_\sigma^+ \mid \sigma \text{ stoptid, } \sigma \leq \tau\}$  er derfor uniformt integrabel.

### Appendiks E. Kronecker's Lemma.

Lad i det følgende  $(a_n)_{n \geq 1}$  betegne en reel talfølge. Der gælder nu flg. varianter af det såkaldte Kroneckers lemma.

For enhver reel talfølge  $(b_n)_{n \geq 1}$ , så at  $0 < b_n < b_{n+1} \uparrow \infty$ , gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n/b_n \text{ konvergent i } \mathbf{R} \Rightarrow 1/b_n \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow 0.$$

Bemærkning. Speciltilfældet  $b_n = n$  er kendt under navnet Kronecker's Lemma.

Bevis. Sæt

$$r_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i/b_i \quad n \geq 1.$$

D.v.s.  $r_n \rightarrow 0$  og

$$a_n = b_n(r_n - r_{n+1}) = b_{n-1}r_n - b_n r_{n+1} + r_n(b_n - b_{n-1})$$

og dermed for alle  $n > m \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n (b_{i-1}r_i - b_i r_{i+1}) + \sum_{i=m+1}^n r_i(b_i - b_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i + (b_m r_{m+1} - b_n r_{n+1}) + \sum_{i=m+1}^n r_i(b_i - b_{i-1}). \end{aligned}$$

Ved brug af trekantsuligheden fås derfor for  $n > m \geq 1$

$$\left| \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \frac{1}{b_n} \left( \sum_{i=1}^m |a_i| + \sup_{i>m} |r_i| ((b_m + b_n) + (b_n - b_m)) \right) \leq \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^m |a_i| + 2 \sup_{i>m} |r_i|.$$

For givet  $\epsilon > 0$  bestemmes  $m$  så at sidste led er mindre end  $\epsilon/2$ , og for  $m$  fast går første led mod 0, da  $b_n \rightarrow \infty$ .  $\diamond$

Ud over Kronecker's Lemma får vi også brug for flg. resultat.

Hvis  $(a_n)_{n \geq 1}$  er enten opad eller nedad begrænset, d.v.s. hvis  $\sup_n a_n < \infty$  eller  $\inf_n a_n > -\infty$ , så er

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = 0 \quad \text{hvis} \quad \lim_n \frac{1}{\nu_k(n)} \sum_{i=1}^{\nu_k(n)} a_i = 0 \quad \text{for alle } k \geq 1,$$

hvor

$$\nu_k(n) := \lfloor (1 + 1/k)^n \rfloor \quad \text{for } n, k \geq 1.$$

Bevis. Antag at  $a_n$ 'erne er nedad begrænset. Ved addition med en ikke-negativ konstant  $M$  ses, at vi kan antage, at  $a_n$ 'erne er ikke-negative, og samt at det nu

drejer sig om at vise konvergens mod  $M$  ud fra en antagelse om konvergens mod  $M$ . Men dette følger umiddelbart. For lader vi for ethvert  $n \geq 2$  og ethvert  $k$   $\nu_k(l_n)$  være valgt så at

$$\nu_k(l_n) \leq n < \nu_k(l_n + 1),$$

gælder åbenbart

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \leq \frac{1}{\nu_k(l_n)} \sum_{i=1}^{\nu_k(l_n+1)} a_i \leq \frac{1 + 1/k}{\nu_k(l_n + 1)} \sum_{i=1}^{\nu_k(l_n+1)} a_i \rightarrow (1 + 1/k) \cdot M$$

og

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \frac{1}{\nu_k(l_n + 1)} \sum_{i=1}^{\nu_k(l_n)} a_i \geq \frac{(1 + 1/k)^{-1}}{\nu_k(l_n)} \sum_{i=1}^{\nu_k(l_n)} a_i \rightarrow (1 + 1/k)^{-1} \cdot M,$$

for alle  $k$  og derfor

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow M. \quad \diamond$$

## Appendiks F.

I forbindelse med gennemgangen af konvergens i fordeling udnyttede vi flg. egenskab ved den reelle akse.

*Enhver åben begrænset delmængde af den reelle akse er en højst tællelig disjunkt forening af åbne intervaller.*

'Bevis'. Lad  $G \subseteq \mathbf{R}$  betegne en begrænset ikke tom åben delmængde og lad  $K > 0$  være valgt så at  $G \subseteq [-K, K]$ . Definer for ethvert  $x \in G$

$$x_h := \inf\{y \mid y > x, y \notin G\} \quad \text{og} \quad x_v := \sup\{y \mid y < x, y \notin G\}.$$

Da  $G$  er åben og begrænset, og  $\mathbf{Q}$  er tæt i  $\mathbf{R}$  ses let at flg. betingelser er opfyldte for alle  $x \in G$ :

a)  $-K \leq x_v < x < x_h \leq K$ .   b)  $(x_v, x_h) \subseteq G$ .   c)  $\mathbf{Q} \cap (x_v, x_h) \neq \emptyset$ .

samt

d)  $(x_v, x_h) \cap (\tilde{x}_v, \tilde{x}_h) \neq \emptyset \Rightarrow (x_v, x_h) = (\tilde{x}_v, \tilde{x}_h)$  for vilkårlige  $x, \tilde{x} \in G$ .

Specielt findes der altså for alle  $x \in G$  et  $\tilde{x} \in \mathbf{Q} \cap G$ , så at

$$(x_v, x_h) = (\tilde{x}_v, \tilde{x}_h).$$

Lader vi derfor  $(x(n))_{n \geq 1}$  betegne en nummerering af  $\mathbf{Q} \cap G$  har vi

$$G = \bigcup_{x \in G} (x_v, x_h) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x(n)_v, x(n)_h),$$

og intervallerne er enten sammenfaldende eller disjunkte. Ved uddynding og overgang til en eventuel delfølge fås derfor, at  $G$  kan skrives som en højst tællelig disjunkt forening af åbne intervaller.  $\diamond$

Det er på sin plads at bemærke, at resultatet kun gælder i dimension 1. Et tilsvarende resultat i højere dimensioner er flg.

*Enhver åben mængde  $G \subseteq \mathbf{R}^n$  kan skrives som en højst tællelig disjunkt foreningsmængde af 'halvåbne' kasser, d.v.s. mængder på formen*

$$\prod_{i=1}^n ]a_i, b_i]$$

hvor  $-\infty < a_i < b_i < \infty$  for  $i = 1, \dots, n$ . Dette resultat udnyttes i beviset for Transformationsætningen, d.v.s. Sætning 13.

## Appendiks G.

Fra indledende reel analyse er det velkendt, at for reelle tal  $(a_n)_{n \geq 1}$  og  $a$  gælder implikationen

$$a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} e^a.$$

Men i forbindelse med beviset for den klassiske udgave af Den centrale Grænseværdisætning udnyttedes, at resultatet også gælder for komplekse tal. Et argument herfor går som følger.

Lad  $(a_n)_{n \geq 1}$  og  $a$  betegne komplekse tal, så at  $a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} a$ . Ifølge definitionen på konvergens af komplekse tal har vi derfor

$$|a_n| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} |a|, \quad \Re a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \Re a \quad \text{og} \quad \Im a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \Im a.$$

Da  $a_n/n \rightarrow 0$  gælder derfor fra et vist trin at regne, at

$$1 + \frac{a_n}{n} = \left|1 + \frac{a_n}{n}\right| \cdot e^{i \arctan \theta_n} \quad \text{hvor} \quad \theta_n = \frac{\Im a_n/n}{1 + \Re a_n/n},$$

og dermed

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \left|1 + \frac{a_n}{n}\right|^n \cdot e^{in \arctan \theta_n}.$$

$x \mapsto \arctan x$  betegner her hoveddeterminationen af  $\tan^{-1}$ . Da denne er differentiable i 0 med differentialkvotient 1 og  $\theta_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$  fås derfor, at

$$n \arctan \theta_n = n \cdot \theta_n \cdot \frac{\arctan \theta_n}{\theta_n} = \frac{\Im a_n}{1 + \Re a_n/n} \cdot \frac{\arctan \theta_n}{\theta_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \Im a.$$

Tilsvarende fås ved brug af ovenstående reelle udgave, at

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{a_n}{n}\right|^n &= \left((1 + \Re a_n/n)^2 + (\Im a_n/n)^2\right)^{n/2} = \left(\left(1 + \frac{|a_n|^2}{n^2} + \frac{2\Re a_n}{n}\right)^n\right)^{1/2} = \\ &= \left(\left(1 + \frac{|a_n|^2/n + 2\Re a_n}{n}\right)^n\right)^{1/2} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \sqrt{e^{2\Re a}} = e^{\Re a}. \end{aligned}$$

D.v.s. alt i alt

$$\lim_n \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \lim_n \left|1 + \frac{a_n}{n}\right|^n \cdot \lim_n e^{in \arctan \theta_n} = e^{\Re a} \cdot e^{i\Im a} = e^a.$$

## INDHOLDSFORTEGNELSE

Tillæg til sektion 4.18	130
Momentproblemet	135
Den flerdimensionale normalfordeling	137
Tillæg til sektion 2.18	140
De store tals love I	142
De store tals love II	150
Fordelingskonvergens	157
Kriterier for konvergens i fordeling	161
Regneregler for konvergens i fordeling	164
Kontinuitetssætningen for karakteristiske funktioner	165
Den Centrale Grænseværdisætning	172
Betingede middelværdier	181
Martingaler	192
Appendiks E	212
Appendiks F	214
Appendiks G	215

Forelæsningsnoterne skal ses i sammenhæng med Hoffmann's bog, og der er flg. forbindelse mellem bogen og noternes forskellige afsnit.

**Målelige rum** henter stof fra sektionerne 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.11, 1.12 og 1.43.

Bemærkning. Sektion 1.6 indeholder blandt andet Dynkin's Lemma.

**Borel  $\sigma$ -algebraer** henter stof fra sektionerne 1.8, 1.9, 1.10 og 1.43.

Bemærkning. Sektion 1.9 indeholder blandt andet identiteten  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R})^n$ , samt at Borel  $\sigma$ -algebraen i et seperabelt metrisk rum er frembragt af mængdesystemet bestående af alle kugler.

**Målelige funktioner** henter stof fra sektionerne 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42, 1.43, 1.45, 1.46 og 1.48.

**Mål** henter stof fra sektionerne 1.3, 1.4, 1.7, 1.13, 1.14, 1.15, 1.19, 1.20 og 1.44.

**Mål på metriske rum** henter stof fra sektionerne 1.34 og 1.37.

**Integralet, konstruktion og egenskaber** henter stof fra sektionerne 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.15, 3.17 og 3.26.

Bemærkning. Integralet af en ikke-negativ funktion defineres straks i sektion 3.1, hvorefter det vises, at det har de ønskede egenskaber.

**Uligheder** henter stof fra sektionerne 3.9, 3.10, 3.11 og 3.12.

**Produktmål, eksistens og egenskaber** henter stof fra sektionerne 3.20, 3.21 og 3.30. Bemærk at noterne bruger Dynkin's Lemma i stedet for sektion 1.49.

**Konvergensformer** henter stof fra sektionerne 3.13, 3.22, 3.23, 3.24 og 3.25.

$L^p$ -rum henter stof fra sektionerne 3.22 og 3.25.

**Radon-Nikodym's Sætning** henter stof fra sektionerne 3.18 og 3.19. Beviset i sektion 3.18 er helt anderledes end det i noterne.

**Konstruktion af mål** henter stof fra sektionerne 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26 og 1.27.

Bemærkning. Noterne løser eksistensproblemet ved brug af ydre mål. Den duale konstruktion via indre mål berøres overhovedet ikke.

**Lebesgue-Stieltjes mål på  $\mathbf{R}$**  henter stof fra sektionerne 1.32 og 3.27.

Bemærkning. Beviset for eksistens af Lebesgue-Stieltjes mål på  $\mathbf{R}$  er ændret lidt, da noterne, som allerede nævnt, kun behandler målkonstruktion via ydre mål.

Afsnittene **Lebesgue målet på  $\mathbf{R}^n$**  og **Transformation af tætheder** har ingen direkte pendant i bogen, men den formulerede transformationssætning er et specialtilfælde af en generel sætning, som findes i bind II.

**Sandsynlighedsfelter og stokastiske funktioner** henter stof fra sektionerne 2.1, 2.7, 2.8, 2.14, 4.1 og 4.2.

**Uafhængighed** henter stof fra sektionerne 2.3, 2.4 og 2.5.

**De store tals love I og II** henter stof fra sektionerne 4.7, 4.8, 4.9, 4.11, 4.12, 4.13, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34 og 4.36.

**Fordelingskonvergens** henter stof fra sektionerne 5.1 5.2, 5.3, 5.4 og 5.9.

**Kontinuitetssætningen for karakteristiske funktioner** henter stof fra sektionerne 5.5, 5.6, 5.8 og 5.10.

**Den Centrale Grænseværdisætning** henter stof fra sektionerne 5.16, 5.21, 5.22 og 5.23.

**Betingede middelværdier** henter stof fra sektionerne 6.1, 6.4, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10 og 6.11.

**Martingaler** henter stof fra sektionerne 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10 7.12, 7.13, 7.14, 7.16 og 7.17.

Afsnittene **Momentproblemet** og **Den flerdimensionale normalfordeling** skal ses sammen med sektion 4.17 og sektion 4.22.