

Konvergensformer.

I dette afsnit indføres i tilknytning til et givent målrum (E, \mathcal{E}, μ) tre konvergensformer for følger af reelle målelige funktioner, og relationerne mellem dem studeres. Begreberne defineres for reelle funktioner, men specielt de to første generaliserer uden videre til situationer, hvor funktionerne tager værdier i et generelt separabelt metrisk rum (S, d) , blot skal $|\cdot - \cdot|$ her erstattes af $d(\cdot, \cdot)$.

Notation. Lad $(f_n)_{n \geq 1}$ og f betegne elementer i $M(\mathcal{E})$. Vi siger og skriver da

a) Konvergens μ -n.o.

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.} \text{ hvis } |f_n(e) - f(e)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \text{ for } \mu\text{-n.a. } e.$$

b) Konvergens i μ -mål.

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-mål} \text{ hvis } \mu(|f_n - f| \geq \epsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \text{ for alle } \epsilon > 0.$$

c) Konvergens i μ - p -middel ($0 < p < \infty$).

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-}p\text{-middel} \text{ hvis } \int |f_n - f|^p d\mu \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Hvis $p = 1$ siges kort μ -middel, og hvis $p = 2$ bruges ofte vendingen μ -kvadratisk middel.)

For alle tre konvergensformer betyder vendingen 'lim_n f_n eksisterer', at der findes et f i $M(\mathcal{E})$, så at $f_n \rightarrow f$ på den relevante facon.

Da \mathbf{R} er et vektorrum, og vi derfor kan addere funktioner samt multiplicere med en skalar, er det værd at bemærke, at de tre konvergensformer alle harmonerer med den lineære struktur, idet en linearkombination af konvergente følger konvergerer mod den tilsvarende linearkombination af grænseværdierne. Ligeledes kan vi give mening til en uendelig sum, idet dette som sædvanligt oversættes til et spørgsmål om konvergens af den tilhørende afsnitsfølge.

Grænseværdierne er entydigt bestemt μ -n.o. for hver af de tre konvergensformer. For betegner \rightarrow enten konvergens μ -n.o., μ -mål eller μ - p -middel, gælder

$$f_n \rightarrow f \text{ og } f_n \rightarrow g \Rightarrow f = g \text{ } \mu\text{-n.o.}$$

Dette er åbenbart for konvergens μ -n.o., hvorimod det for de to andre kræver et argument baseret på trekantsuligheden. F.eks. har vi for alle $\epsilon > 0$ og $n \geq 1$ at

$$\mu(|g - f| \geq \epsilon) \leq \mu(|g - f_n| \geq \epsilon/2) + \mu(|f_n - f| \geq \epsilon/2),$$

hvoraf grænseovergangen $n \rightarrow \infty$ viser, at $\mu(|g - f| \geq \epsilon) = 0$ for ethvert $\epsilon > 0$, og dermed $f = g$ μ -n.o. For konvergens i p -middel ses tilsvarende, at

$$\int |g - f|^p d\mu \leq 2^p \int |g - f_n|^p d\mu + 2^p \int |f_n - f|^p d\mu \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.v.s. $\int |g - f|^p d\mu = 0$, hvilket igen betyder, at $f = g$ μ -n.o..

Det næste resultat beskriver relationerne mellem de indførte konvergensformer.

Proposition 10 Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et målrum og lad $p > 0$ samt elementer $(f_n)_{n \geq 1}$ og f i $M(\mathcal{E})$ være givet. Da gælder

- 1) $f_n \rightarrow f$ i μ - p -middel $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ i μ -mål.
 - 2) $f_n \rightarrow f$ i μ -mål $\Rightarrow \exists (n_k)_{k \geq 1}$ delfølge så at $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -n.o.
- Hvis μ er et endeligt mål, d.v.s. $\mu(E) < \infty$, gælder yderligere
- 3) $f_n \rightarrow f$ μ -n.o. $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ i μ -mål.
 - 4) $f_n \rightarrow f$ i μ - p -middel $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ i μ - r -middel for $0 < r < p$.

Bevis. 4) følger af Korollaret til Jensen's ulighed, og da ifølge Markov's ulighed

$$\mu(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \epsilon^{-p} \int |f_n - f|^p d\mu$$

for alle n og ϵ er 1) ligeledes klar. Vi mangler derfor kun at vise 2) og 3).

3) Hvis $f_n(e) \rightarrow f(e)$ holder uligheden $|f_n(e) - f(e)| \geq \epsilon > 0$ højst endelig mange gange, d.v.s.

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \epsilon\}\right) = 0 \quad \text{for ethvert } \epsilon > 0.$$

Da μ er et endeligt mål, gælder derfor for alle $\epsilon > 0$, at

$$\mu(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \epsilon\}\right) \downarrow_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

2) Sæt $A_k = \{|f - f_{n_k}| > 1/k\}$ for $k \geq 1$. Der findes en delfølge $(n_k)_{k \geq 1}$, så at $\mu(A_k) \leq 2^{-k}$ for $k \geq 1$. Ifølge Borel Cantelli Lemmaet er $\limsup_k A_k$ derfor en μ -nulmængde, hvilket netop er det ønskede, thi hvis $e \notin \limsup_k A_k$ holder uligheden

$$|f(e) - f_{n_k}(e)| \leq 1/k$$

for alle pånær højst endelig mange k , d.v.s. fra et vist trin at regne. \diamond

1) og 2) viser, at for både μ -n.o., μ -mål eller μ - p -middel konvergens gælder, at

$$f_n \rightarrow f \quad \text{og} \quad f_n \geq g \quad \mu\text{-n.o. for alle } n \Rightarrow f \geq g \quad \mu\text{-n.o.}$$

Proposition 10 indeholder alle alment gældende implikationer mellem de indførte konvergensformer. Men som Lebesgue's Sætning viser, er det under visse omstændigheder muligt at slutte konvergens i middel ud fra konvergens n.o. Dette aspekt vil vi nu undersøge nærmere. Hertil får vi brug for et nyt begreb nemlig uniform integrabilitet. Uniform integrabilitet kan defineres i vilkårlige målrum, se Hoffmann afsnit 3.22, men da vi kun skal gøre brug af det i sandsynlighedsfel-ter, koncentrerer vi os om endelige målrum, hvor tingene er simple.

Definition. Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et endeligt målrum. En delmængde $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ siges at være μ -uniformt integrabel hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 : \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f| \geq K\}} |f| d\mu \leq \epsilon.$$

Bemærk at $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ -uniformt integrabel, hvis og kun hvis $\{|f| \mid f \in \mathcal{H}\}$ er μ -uniformt integrabel.

Øvelse 16. Vis at $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ -uniformt integrabel, hvis \mathcal{H} er en endelig mængde eller mere generelt hvis $|f| \leq g$ for alle $f \in \mathcal{H}$ for et $g \in L^1(\mu)$.

Øvelse 17. Vis at $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ -uniformt integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ findes et $M_\epsilon < \infty$, så at $\mathcal{H} \subseteq B_\infty(M_\epsilon) + B_1(\epsilon)$, hvor for alle $r > 0$

$$B_\infty(r) := \{f \in M(\mathcal{E}) \mid |f| \leq r \text{ } \mu\text{-n.o.}\} \quad \text{og} \quad B_1(r) := \{f \in M(\mathcal{E}) \mid \int |f| d\mu \leq r\}.$$

I beviset for hovedsætningen benyttes en alternativ beskrivelse af uniform integrabilitet. Kriteriet er inspireret af følgende kontinuitetsprincip, hvis bevis overlades til læseren.

$$f \in L^1(\mu) \Rightarrow \int |f| d\mu < \infty \quad \text{og} \quad \lim_{\mu(A) \downarrow 0} \int_A f d\mu = 0.$$

Lemma 10 Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et endeligt målrum. En delmængde $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ -uniformt integrabel hvis og kun hvis

$$\text{i) } \sup_{f \in \mathcal{H}} \int |f| d\mu < \infty \quad \text{og} \quad \text{ii) } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_A |f| d\mu \leq \epsilon \text{ hvis } \mu(A) \leq \delta.$$

D.v.s. \mathcal{H} er uniformt integrabel, hvis og kun hvis \mathcal{H} er begrænset i L^1 , og integralet over en given mængde er lille uniformt for funktioner i \mathcal{H} , hvis μ -målet af mængden er lille nok.

Korollar 1 Hvis $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subseteq L^1(\mu)$ er μ -uniformt integrable er ligeledes $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \{f_1 + f_2 \mid f_i \in \mathcal{H}_i \text{ } i = 1, 2\}$ og $\{g \in L^1(\mu) \mid \exists f \in \mathcal{H}_1 : |g| \leq |f| \text{ } \mu\text{-n.o.}\}$ μ -uniformt integrable.

Korollar 2 Lad $(f_n)_{n \geq 1}$ betegne elementer i $L^1(\mu)$. Da er $\{f_n \mid n \geq 1\}$ uniformt integrabel, hvis $f_n \rightarrow 0$ i μ -middel.

Bevis. Antag at \mathcal{H} er μ -uniformt integrabel. For alle $K > 0$ og $f \in \mathcal{H}$ gælder for ethvert $A \in \mathcal{E}$

$$\int_A |f| d\mu \leq \int_{A \cap \{|f| < K\}} |f| d\mu + \int_{A \cap \{|f| \geq K\}} |f| d\mu \leq K \cdot \mu(A) + \int_{\{|f| \geq K\}} |f| d\mu.$$

Da der i følge den uniforme integrabilitet findes et $K_1 > 0$, så at sidste led er mindre end 1, ses ved at sætte $A = E$, at \mathcal{H} er begrænset i $L^1(\mu)$, idet

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \int |f| d\mu \leq K_1 \cdot \mu(E) + 1 < \infty;$$

og hvis vi for givet ϵ vælger K_ϵ så at $\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f| \geq K_\epsilon\}} |f| d\mu \leq \epsilon/2$ gælder for $A \in \mathcal{E}$ med $\mu(A) < \epsilon/(2K_\epsilon)$ at

$$\int_A |f| d\mu = \int_{A \cap \{|f| < K_\epsilon\}} |f| d\mu + \int_{A \cap \{|f| \geq K_\epsilon\}} |f| d\mu \leq K_\epsilon \cdot \mu(A) + \epsilon/2 \leq \epsilon$$

for alle $f \in \mathcal{H}$. For at vise den manglende del af Proposition 10 lader vi for givet $\epsilon > 0$ δ være bestemt i h.h.t. ii). Markov's Ulighed

$$\mu(|f| \geq K) \leq \frac{1}{K} \int |f| d\mu \leq \sup_{f \in \mathcal{H}} \int |f| d\mu / K \quad \text{for } f \in \mathcal{H}$$

viser, at vi kan bestemme et $K_\epsilon > 0$, så at $\sup_{f \in \mathcal{H}} \mu(|f| \geq K_\epsilon) \leq \delta$ og dermed pr. valg af δ

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f| \geq K_\epsilon\}} |f| d\mu \leq \epsilon. \quad \diamond$$

Korollar 1 overlades til læseren. Betragt derfor Korollar 2. Da $\lim_n \int |f_n| d\mu = 0$ følger i) umiddelbart, da enhver konvergent reel talfølge specielt er begrænset. For alle $n_0 \geq 1$ og $A \in \mathcal{E}$ er

$$\sup_n \int_A |f_n| d\mu \leq \sup_{1 \leq n \leq n_0} \int_A |f_n| d\mu + \sup_{n \geq n_0} \int |f_n| d\mu \leq \int_A \sum_{n=1}^{n_0} |f_n| d\mu + \sup_{n \geq n_0} \int |f_n| d\mu.$$

Dette viser ii). Thi givet $\epsilon > 0$ bestemmes et n_0 , så at sidste led er mindre end $\epsilon/2$, hvorefter integrabiliteten af $\sum_{n=1}^{n_0} |f_n|$ sikrer, at vi kan vælge $\delta > 0$, så at

$$\sup_n \int_A |f_n| d\mu \leq \epsilon \quad \text{hvis } \mu(A) < \delta. \quad \diamond$$

Sætning 6 Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et endeligt målrum og $(f_n)_{n \geq 1}$ og f elementer i $M(\mathcal{E})$. Flg. påstande er da ækvivalente.

- a) $f_n \rightarrow f$ i μ -mål og $\{f_n | n \geq 1\}$ er μ -uniformt integrabel.
- b) $(f_n)_{n \geq 1}$ og f er elementer i $L^1(\mu)$ og $f_n \rightarrow f$ i μ -middel.

Korollar For ethvert $p > 0$ er flg. påstande ligeledes ækvivalente.

- a)_p $f_n \rightarrow f$ i μ -mål og $\{|f_n|^p | n \geq 1\}$ er μ -uniformt integrabel.
- b)_p $(f_n)_{n \geq 1}$ og f er elementer i $L^p(\mu)$ og $f_n \rightarrow f$ i μ -p-middel.

Bevis for sætningen. b) \Rightarrow a): Konvergenen $f_n \rightarrow f$ i μ -mål er vist i Proposition 10, og da

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-middel} \Leftrightarrow (f_n - f) \rightarrow 0 \text{ i } \mu\text{-middel}$$

er $\{f_n - f | n \geq 1\}$ ifølge Korollar 2 ovenfor uniformt integrabel, og derfor ifølge Korollar 1 også $\{f_n | n \geq 1\}$ da

$$|f_n| \leq |f_n - f| + |f| \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

a) \Rightarrow b): Ifølge Proposition 10 punkt 2 findes der en delfølge $(n_k)_{k \geq 1}$, så at $|f_{n_k}| \rightarrow |f|$ μ -n.o. og dermed $f \in L^1(\mu)$, da

$$\int |f| d\mu \leq \liminf_k \int |f_{n_k}| d\mu \leq \sup_n \int |f_n| d\mu < \infty.$$

ifølge Fatou's Lemma. Korollar 1 og ulighederne $|f - f_n| \leq |f| + |f_n|$ for $n \geq 1$ viser derfor, at $\{|f - f_n| \geq 1\}$ er μ -uniformt integrabel. Men for ethvert $0 < \epsilon < K$ er $\int |f_n - f| d\mu$ lig med

$$\begin{aligned} & \int_{\{|f_n - f| \leq \epsilon\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{\epsilon < |f_n - f| \leq K\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n - f| > K\}} |f_n - f| d\mu \\ & \leq \epsilon \cdot \mu(E) + K \cdot \mu(|f_n - f| \geq \epsilon) + \sup_n \int_{\{|f_n - f| > K\}} |f_n - f| d\mu. \end{aligned}$$

Heraf ses nu, at $f_n \rightarrow f$ i μ -middel. Thi for ϵ og K valgt, så at første og tredje led er så lille som ønsket, konvergerer det midterste mod 0 ifølge antagelsen om konvergens i mål. \diamond

Bevis for korollaret. Lad $p > 0$ være givet. Antag b)_p. Konvergens $f_n \rightarrow f$ i μ -mål er vist i Proposition 10, og da

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-}p\text{-middel} \Leftrightarrow |f_n - f|^p \rightarrow 0 \text{ i } \mu\text{-middel}$$

er $\{|f_n - f|^p | n \geq 1\}$ uniformt integrabel, og derfor også $\{|f_n|^p | n \geq 1\}$ da

$$|f_n|^p \leq 2^p |f_n - f|^p + 2^p |f|^p \text{ for alle } n \geq 1.$$

Antag omvendt a)_p. Ifølge Proposition 10 findes der en delfølge $(n_k)_{k \geq 1}$, så at $|f_{n_k}|^p \rightarrow |f|^p$ μ -n.o. og dermed $f \in L^p(\mu)$ da

$$\int |f|^p d\mu \leq \liminf_k \int |f_{n_k}|^p d\mu \leq \sup_n \int |f_n|^p d\mu < \infty.$$

Ulighederne $|f - f_n|^p \leq 2^p (|f|^p + |f_n|^p)$ for $n \geq 1$ viser derfor, at $\{|f - f_n|^p | n \geq 1\}$ er μ -uniformt integrabel; og da

$$\mu(|f - f_n|^p > \epsilon) = \mu(|f - f_n| > \epsilon^{1/p}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

for alle ϵ har vi alt i alt

$$\{|f - f_n|^p | n \geq 1\} \text{ uniformt integrabel og } |f - f_n|^p \rightarrow 0 \text{ i } \mu\text{-mål.}$$

Påstanden følger nu umiddelbart af sætningen. \diamond

Sætning 6 gør det interessant at kunne afgøre, om en given mængde af funktioner er uniformt integrabel. I denne sammenhæng er flg. resultat nyttigt.

Proposition 11 Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et endeligt målrum. $\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$ er μ -uniformt integrabel, hvis der findes en funktion $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, så at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x/\varphi(x) = 0 \quad \text{og} \quad \sup_{f \in \mathcal{H}} \int \varphi(|f|) d\mu < \infty.$$

F.eks. er \mathcal{H} μ -uniformt integrabel, hvis \mathcal{H} er begrænset i $L^\alpha(\mu)$ for et $\alpha > 1$, d.v.s.

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \int |f|^\alpha d\mu < \infty.$$

Bevis. Positiviteten af integralet sikrer for ethvert $K > 0$ og ethvert $f \in \mathcal{H}$, at

$$\int_{\{|f|>K\}} |f| d\mu = \int_{\{|f|>K\}} \varphi(|f|) \cdot \frac{|f|}{\varphi(|f|)} d\mu \leq \sup_{x>K} \frac{x}{\varphi(x)} \int \varphi(|f|) d\mu,$$

hvilket viser det ønskede, da $\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{x>K} x/\varphi(x) = 0$. \diamond

Det næste resultat, der gælder i vilkårlige målrum, anviser et andet sæt af betingelser, der sikrer konvergens i middel ud fra punktvis konvergens. Der gælder et tilsvarende resultat for konvergens i μ - p -middel for ethvert $p > 0$.

Sætning 7 Scheffe's Lemma.

Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et målrum og $(f_n)_{n \geq 1}$ og f givne elementer i $L^1(\mu)$, så at $f_n \rightarrow f$ μ -n.o. eller $f_n \rightarrow f$ μ -mål. Da gælder

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-middel} \Leftrightarrow \lim_n \int |f_n| d\mu = \int |f| d\mu.$$

Bevis. Implikationen \Rightarrow , som følger af uligheden $||f| - |f_n|| \leq |f - f_n|$, udnytter hverken, at $f_n \rightarrow f$ μ -n.o. eller $f_n \rightarrow f$ μ -mål.

Hvad angår \Leftarrow) behandles kun n.o.-tilfældet, da mål-tilfældet kan udledes heraf ved et delfølgeargument baseret på Proposition 10 punkt 2). Skriv for $n \geq 1$

$$f_n = f_n \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| < 2|f|\}} + f_n \cdot \mathbf{1}_{\{2|f| \leq |f_n|\}} := g_n + h_n.$$

Det er nu nok at vise, at $g_n \rightarrow f$ og $h_n \rightarrow 0$ i μ -middel. Antagelsen $f_n \rightarrow f$ μ -n.o. sikrer sammen med definitionen, at

$$g_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.} \quad \text{og} \quad |g_n| \leq 2|f|$$

og dermed ifølge Lebesgue's Sætning, at $g_n \rightarrow f$ i μ -middel. Men da også $|f_n| = |g_n| + |h_n|$ fås ved integration og brug af den netop viste implikation, at

$$\int |h_n| d\mu = \int |f_n| d\mu - \int |g_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu - \int |f| d\mu = 0.$$

D.v.s. $h_n \rightarrow 0$ i μ -middel. \diamond

Vi afslutter kapitlet med at se lidt nærmere på konvergens i mål. Resultaterne formuleres for reelle funktioner, men gælder 'uændret' for funktioner med værdier i et fuldstændigt separabelt metrisk rum (S, d) .

Lemma 11 Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et målrum og $(f_n)_{n \geq 1}$ en følge af elementer i $M(\mathcal{E})$. Da gælder flg. påstande.

a) Hvis der findes en følge $(\epsilon_n)_{n \geq 1} \subset \mathbf{R}_+$, så at

$$\sum_n \epsilon_n < \infty \text{ og } \sum_n \mu(|f_n - f_{n+1}| \geq \epsilon_n) < \infty,$$

eksisterer der et $f \in M(\mathcal{E})$, så at $f_n \rightarrow f$ μ -n.o. og i μ -mål.

b) $f_n \rightarrow 0$ μ -n.o. og i μ -mål hvis der findes en følge $(\epsilon_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbf{R}_+$ så at

$$\epsilon_n \rightarrow 0 \text{ og } \sum_n \mu(|f_n| \geq \epsilon_n) < \infty.$$

Bevis. a) Definer

$$A_n = \{|f_n - f_{n+1}| \geq \epsilon_n\} \text{ for } n \geq 1.$$

Antagelserne og det første Borel-Cantelli Lemma viser, at $\mu(\limsup_n A_n) = 0$, og for $e \notin \limsup_n A_n$ er $|f_n(e) - f_{n+1}(e)| \leq \epsilon_n$ fra et vist trin at regne, d.v.s.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(e) - f_{n+1}(e)| < \infty,$$

hvilket ifølge fuldstændigheden af \mathbf{R} sikrer at talfølgen $(f_n(e))_{n \geq 1}$ er konvergent i \mathbf{R} . D.v.s. $\lim_n f_n(e)$ eksisterer i \mathbf{R} for μ -n.a.e. Lad f betegne det i Lemma 5 definerede f_∞ . f er da målelig, og det netop viste betyder, at $f_n \rightarrow f$ μ -n.o. For at vise at der også er konvergens i μ -mål, lader vi $\epsilon > 0$ være givet, og n_0 vælges, så at $\sum_{k \geq n_0} \epsilon_k < \epsilon$. Da $f_k \rightarrow f$ μ -n.o. gælder for alle n

$$|f_n - f| = \lim_k |f_n - f_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |f_k - f_{k+1}| \quad \mu\text{-n.o.},$$

d.v.s. for $n \geq n_0$ er

$$\begin{aligned} \mu(|f_n - f| > \epsilon) &\leq \mu\left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k - f_{k+1}| > \epsilon\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f_{k+1}| > \epsilon_k\}\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(|f_k - f_{k+1}| > \epsilon_k) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

hvoraf konvergens i μ -mål følger.

b) Definer $A_n := \{|f_n| \geq \epsilon_n\}$ for $n \geq 1$. Igen er $\mu(\limsup_n A_n) = 0$, og da

$$\{n \geq 1 \mid |f_n(e)| \geq \epsilon_n\} \text{ er endelig}$$

for ethvert $e \notin \limsup_n A_n$ følger, at $f_n(e) \rightarrow 0$ for alle $e \notin \limsup_n A_n$ og dermed μ -n.o. Konvergens i μ -mål er åbenbar, da

$$\lim_n \mu(|f_n| \geq \epsilon) \leq \lim_n \mu(|f_n| \geq \epsilon_n) = 0 \text{ for alle } \epsilon > 0. \quad \diamond$$

Vi er nu i stand til at vise, at konvergens i mål samt p -middel for en følge $(f_n)_{n \geq 1}$ kan afgøres uden forhåndskendskab til en eventuel grænseværdi. Der gælder nemlig følgende fuldstændighedsudsagn.

Proposition 12 *Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et målrum og lad $(f_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af elementer i $M(\mathcal{E})$. Da eksisterer $\lim_n f_n$ i μ -mål hvis*

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f_m| \geq \epsilon) = 0 \quad \text{for alle } \epsilon > 0.$$

Bevis. Antagelserne sikrer eksistens af en delfølge $(n_k)_{k \geq 1}$, så at

$$\mu(|f_{n_k} - f_m| \geq 2^{-k}) < 2^{-k} \quad \text{for alle } m \geq n_k \text{ og alle } k \geq 1,$$

d.v.s. specielt

$$\mu(|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \geq 2^{-k}) < 2^{-k} \quad \text{for alle } k \geq 1.$$

Ifølge Lemma 11 findes der derfor et f i $M(\mathcal{E})$, så at $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -n.o. og i μ -mål. Dette er grænsefunktionen, vi søger, thi givet $\epsilon, \delta > 0$ kan vi vælge et k , så at

$$2^{-k} \leq (\epsilon \wedge \delta)/2 \quad \text{og} \quad \mu(|f - f_{n_k}| > \epsilon/2) \leq \delta/2;$$

og for ethvert $m \geq n_k$ gælder derfor

$$\begin{aligned} \mu(|f - f_m| > \epsilon) &\leq \mu(|f_{n_k} - f_m| > \epsilon/2) + \mu(|f - f_{n_k}| > \epsilon/2) \\ &\leq \mu(|f_{n_k} - f_m| > 2^{-k}) + \delta/2 \leq 2^{-k} + \delta/2 \leq \delta, \end{aligned}$$

hvilket viser den ønskede konvergens. \diamond

Korollar *Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et målrum og lad $(f_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af elementer i $M(\mathcal{E})$. For ethvert $p > 0$ eksisterer $\lim_n f_n$ i μ - p -middel, hvis*

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int |f_n - f_m|^p d\mu = 0.$$

Bevis. Markov's ulighed viser, at $(f_n)_{n \geq 1}$ opfylder betingelsen i Proposition 12, og propositionerne 10 og 12 sikrer derfor eksistensen af et $f \in M(\mathcal{E})$ og en delfølge (n_k) , så at $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -n.o. Heraf fås ved brug af Fatou's Lemma at for $n \geq 1$ er

$$\int |f - f_n|^p d\mu \leq \liminf_k \int |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \leq \sup_{k \geq n} \int |f_k - f_n|^p d\mu,$$

hvilket ifølge antagelsen giver det ønskede resultat. \diamond

Konvergens i mål er pr. definition et spørgsmål om, at bestemte mængder har lille mål. Det er derfor klart ud fra tidligere overvejelserne om indbyrdes kontinuitet af mål, at konvergens i mål er sammenfaldende for ækvivalente endelige mål. D.v.s. hvis μ_1 og μ_2 er to ækvivalente endelige mål på (E, \mathcal{E}) , så konvergerer en følge $(f_n)_{n \geq 1}$ i μ_1 -mål, hvis og kun hvis den konvergerer i μ_2 -mål. Det tilsvarende gælder naturligvis også for konvergens n.o., hvorimod situationen er mere kompliceret for konvergens i p -middel.

Til slut skal det nævnes, at konvergens i mål er metrisk, d.v.s. svarer til konvergens i en metrik. Denne egenskab, der er vigtig i mange bevissammenhænge, gælder også for konvergens i p -middel, men derimod ikke for konvergens n.o. Da vi primært skal beskæftige os med konvergens i mål i forbindelse med sandsynlighedsmål, nøjes vi med flg. overvejelser. Definer

$$d_0(f, g) := \int |f - g| \wedge 1 d\mu \quad \text{for } f, g \in M(\mathcal{E}).$$

En simpel overvejelse viser, at hvis μ er et endeligt mål, er der herved defineret en metrik (pseudo) på $M(\mathcal{E})$. Trekantsuligheden beror på, at

$$(x + y) \wedge 1 \leq x \wedge 1 + y \wedge 1 \quad \text{for alle } x, y \in \mathbf{R}_+,$$

og dermed $|x - y| \wedge 1 \leq |x - z| \wedge 1 + |z - y| \wedge 1$ for alle $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Der gælder nu flg. resultat.

Lemma 12 *Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et endeligt målrum og lad $(f_n)_{n \geq 1}$ og f betegne elementer i $M(\mathcal{E})$. Da gælder*

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-mål} \Leftrightarrow d_0(f, f_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \int |f - f_n| \wedge 1 d\mu \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Bevis. Da

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-mål} \Rightarrow |f - f_n| \wedge 1 \rightarrow 0 \text{ i } \mu\text{-mål}$$

og $\{|f - f_n| \wedge 1 | n \geq 1\}$ er uniform integrabel, da funktionerne alle er domineret af 1, følger \Rightarrow umiddelbart af Sætning 6. Den anden implikation følger af Markov's ulighed. For da $x \mapsto x \wedge 1$ er voksende på \mathbf{R}_+ , gælder for ethvert $\epsilon > 0$ og ethvert n , at

$$\mu(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu(|f_n - f| \wedge 1 \geq \epsilon \wedge 1) \leq (\epsilon \wedge 1)^{-1} \int |f_n - f| \wedge 1 d\mu. \quad \diamond$$

Bemærkning. $x \mapsto x \wedge 1$ kan erstattes af enhver anden begrænset, voksende konkav funktion, som er 0 i 0. F.eks. $x \mapsto \arctan x$ eller $x \mapsto x/(1+x)$.

Som en simpel anvendelse af Lemma 12 vises flg. resultat.

Proposition 13 *Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et endeligt målrum og lad $(f_n)_{n \geq 1}$ og f betegne elementer i $M(\mathcal{E})$, så at $f_n \rightarrow f$ i μ -mål. Da konvergerer $\psi(f_n) \rightarrow \psi(f)$ i μ -mål for enhver kontinuert funktion $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, og konvergen sker også i μ -1-middel, hvis enten ψ er begrænset, eller $(\psi(f_n))_{n \geq 1}$ er μ -uniformt integrabel.*

Bevis. Lad ψ betegne en kontinuert reel funktion. Ifølge Lemma 12 skal vi vise

$$d_0(\psi(f_n), \psi(f)) \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Men gælder dette ikke, eksisterer der et $\epsilon > 0$ og en delfølge $(n_k)_{k \geq 1}$, så at

$$d_0(\psi(f_{n_k}), \psi(f)) \geq \epsilon \quad \text{for alle } k \geq 1$$

samt ifølge Proposition 10 en yderligere delfølge $(l_l)_{l \geq 1}$, så at

$$f_{n_{k_l}} \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.}, \text{ og dermed } |\psi(f_{n_{k_l}}) - \psi(f)| \wedge 1 \rightarrow 0 \text{ } \mu\text{-n.o.},$$

da ψ er kontinuert. Ifølge Lebesgue's Sætning konvergerer derfor

$$d_0(\psi(f_{n_{k_l}}), \psi(f)) = \int |\psi(f_{n_{k_l}}) - \psi(f)| \wedge 1 d\mu \rightarrow 0 \text{ for } l \rightarrow \infty,$$

hvilket strider mod valget af delfølgen $(n_k)_{k \geq 1}$. Hvis ψ yderligere er begrænset, eller $(\psi(f_n))_{n \geq 1}$ er uniformt integrabel, er

$$\{|\psi(f_n) - \psi(f)| \mid n \geq 1\} \text{ } \mu\text{-uniformt integrabel,}$$

og da, som netop vist,

$$|\psi(f_n) - \psi(f)| \rightarrow 0 \text{ i } \mu\text{-mål,}$$

følger resten af Sætning 6. ◇

Bemærk at beviset kun udnytter, at ψ er kontinuert μ_f -n.o., d.v.s. at mængden af punkter, hvori ψ ikke er kontinuert, er en μ_f -nulmængde. μ_f er her billedmålet dannet ud fra μ og f .

Læseren opfordres i denne forbindelse til at overveje, at for enhver Borel funktion $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ er mængden af diskontinuitetspunkter, d.v.s.

$$\{x \in \mathbf{R} \mid h \text{ ikke kontinuert i } x\},$$

en tællelig foreningsmængde af lukkede mængder, d.v.s. specielt en Borel mængde. Overgang til komplementet viser derfor, at

$$C_h := \{x \in \mathbf{R} \mid h \text{ kontinuert i } x\}$$

er et tælleligt gennemsnit af åbne mængder.

Vink til et bevis. Vis og udnyt at et punkt x er et diskontinuitetspunkt for h , hvis og kun hvis

$$\exists m \geq 1, \forall n \geq 1 \exists z, y \in \mathbf{R} : |x - y| \vee |x - z| \leq 1/n \text{ og } |h(y) - h(z)| > 1/m.$$

Lad mig endnu en gang understrege at hovedparten af det, der i dette afsnit er sagt om reelle funktioner, kan ved at udskifte $|\cdot - \cdot|$ med $d(\cdot, \cdot)$ uændret oversættes til funktioner, som tager værdier i et separabelt metrisk rum (S, d) . Dette gælder blandt andet Lemma 12 og dermed Proposition 13, hvilket specielt viser, at konvergens i μ -mål af stokastiske funktioner med værdier i et separabelt metrisk rum (S, d) bibeholdes ved overgang til en ækvivalent metrik. D.v.s. konvergens i μ -mål afhænger ikke eksplicit af den valgte metrik.

L^p -rum.

I dette afsnit vil vi ganske kort se nærmere på L^p -rummene med særlig vægt på L^2 . Lad derfor (E, \mathcal{E}, μ) betegne et givent måleligt rum. Vi har tidligere for ethvert $p > 0$ indført

$$L^p(\mu) = \{f \in M(\mathcal{E}) \mid \int |f|^p d\mu < \infty\},$$

og vi observerede, at $L^p(\mu)$ er et vektorrum, d.v.s.

$$af + bg \in L^p(\mu) \quad \text{hvis } f, g \in L^p(\mu) \text{ og } a, b \in \mathbf{R}.$$

For ethvert $p \geq 1$ og $f \in L^p(\mu)$ definerer

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

et reelt tal kaldet $L^p(\mu)$ -normen af f , og ifølge integralets homogenitet og Minkowski's ulighed gælder, at

- 1) $\|af\|_p = |a| \cdot \|f\|_p$ for $f \in L^p(\mu)$ og $a \in \mathbf{R}$. (*homogenitet*)
- 2) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ for $f, g \in L^p(\mu)$. (*trekantsuligheden*)
- 3) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ -n.o.

For $p \geq 1$ kan vi derfor definere en pseudometrik på $L^p(\mu)$ ved fastsættelsen

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p \quad \text{for } f, g \in L^p(\mu).$$

Som allerede nævnt gælder 2) ikke for $0 < p < 1$. Men da funktionen $x \mapsto x^p$ er subadditiv på \mathbf{R}_+ , d.v.s. $(x + y)^p \leq x^p + y^p$, kan vi tilsvarende for ethvert $p \in]0, 1[$ definere en pseudometrik på $L^p(\mu)$ ved fastsættelsen

$$d_p(f, g) := \int |f - g|^p d\mu \quad \text{for } f, g \in L^p(\mu).$$

Som det er sædvanen i metriske rum, siges en følge $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^p(\mu)$ at være konvergent i $L^p(\mu)$ med grænseværdi $f \in L^p(\mu)$, normalt betegnet $f_n \rightarrow f$ i $L^p(\mu)$, hvis

$$\lim_n d_p(f, f_n) = 0.$$

En følge $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^p(\mu)$ siges kort at være konvergent i $L^p(\mu)$, hvis der findes et $f \in L^p(\mu)$, så at $f_n \rightarrow f$ i $L^p(\mu)$, og den siges at være en L^p -Cauchy-følge, hvis

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d_p(f_m, f_n) = \lim_n \sup_{m \geq n} d_p(f_m, f_n) = 0.$$

Trekantsuligheden viser, at enhver konvergent følge er en Cauchy-følge, samt at enhver L^p -Cauchy-følge $(f_n)_{n \geq 1}$ er *begrænset* i $L^p(\mu)$, d.v.s.

$$\sup_n \int |f_n|^p d\mu < \infty.$$

Mere præcist gælder

$$(f_n)_{n \geq 1} \text{ } L^p \text{-Cauchy-følge} \Rightarrow \lim_n \int |f_n|^p d\mu \text{ eksisterer i } \mathbf{R}$$

eller ækvivalent, da \mathbf{R} er fuldstændig, at integralfølgen er en reel Cauchy-følge, thi for $0 < p \leq 1$ er

$$\left| \int |f_n|^p d\mu - \int |f_m|^p d\mu \right| \leq \int |f_n - f_m|^p d\mu$$

ifølge subadditiviteten, og for $p \geq 1$ viser Minkowski's ulighed, at

$$|\|f_n\|_p - \|f_m\|_p| \leq \|f_n - f_m\|_p.$$

Tilsvarende gælder at $f_n \rightarrow f$ i $L^p(\mu) \Rightarrow |f_n|^p \rightarrow |f|^p$ i μ -middel og derfor

$$\lim_n \int |f_n|^p d\mu = \int |f|^p d\mu \quad \text{hvis } f_n \rightarrow f \text{ i } L^p(\mu).$$

Specielt $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, hvis $f_n \rightarrow f$ i $L^p(\mu)$ for $p \geq 1$.

For $p \leq 1$ er dette igen en følge af subadditiviteten af $x \mapsto x^p$, hvorimod man for $p > 1$ får brug for Hölder's ulighed samt flg. konsekvens af Middelværdisætningen

$$||x|^p - |y|^p| \leq p \cdot (|x|^{p-1} + |y|^{p-1}) \cdot |x - y| \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Konvergensbegrebet hørende til metrikken d_p er tydeligvis identisk med konvergens i μ - p -middel, og korollaret til Proposition 12 viser derfor, at $L^p(\mu)$ er fuldstændig, d.v.s. enhver L^p -Cauchy-følge er konvergent i $L^p(\mu)$. Dette vigtige resultat formuleres som en selvstændig sætning.

Sætning 8 *Lad $0 < p < \infty$ være givet. Enhver L^p -Cauchy følge $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^p(\mu)$ er da konvergent i $L^p(\mu)$.*

Bevis. Korollaret til Proposition 12 viser eksistensen af et f i $M(\mathcal{E})$, så at $f_n \rightarrow f$ μ - p -middel, og f ligger i $L^p(\mu)$, thi for ethvert $n \geq 1$ er

$$\int |f|^p d\mu \leq 2^p \int |f_n|^p d\mu + 2^p \int |f - f_n|^p d\mu. \quad \diamond$$

Korollar *Lad $p \geq 1$ og $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^p(\mu)$ være givet. Da gælder*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ konvergent i } L^p(\mu).$$

Bevis. Minkowski's ulighed viser, at afsnitssummerne $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n \geq 1}$ udgør en L^p -Cauchy-følge, og rækken er derfor konvergent. \diamond

Det bør nævnes, at der også findes et $L^\infty(\mu)$ med en pseudometrik $d_\infty(\cdot, \cdot)$. Vi nøjes med blot at give de relevante definitioner.

$$L^\infty(\mu) := \{f \in M(\mathcal{E}) \mid \exists 0 < c < \infty : \mu(|f| > c) = 0\},$$

$$d_\infty(f, g) := \inf\{c > 0 \mid \mu(|f - g| > c) = 0\} \quad \text{for } f, g \in L^\infty(\mu).$$

Tilfældet $p = 2$ er specielt vigtigt, thi ifølge Cauchy-Schwarz's ulighed definerer fastsættelsen

$$\langle f, g \rangle := \int f \cdot g \, d\mu \quad \text{for } f, g \in L^2(\mu).$$

en positiv, symmetrisk bilinear form på $L^2(\mu)$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er altså et såkaldt *skalarprodukt* eller rettere et pseudo skalarprodukt, idet $\langle f, f \rangle = 0$ kun betyder, at $f = 0$ μ -n.o.

Cauchy-Schwarz's ulighed viser, at $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er separat kontinuert, d.v.s.

$$\forall f \in L^2(\mu) : \lim_n \langle f, g_n \rangle = \langle f, g \rangle \quad \text{hvis } g_n \rightarrow g \text{ i } L^2(\mu).$$

Endvidere er $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nært forbundet med $L^2(\mu)$ -normen, da

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad \text{for alle } f \in L^2(\mu),$$

$\|\cdot\|_2$ er altså den til skalarproduktet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tilknyttede norm, og da $\|\cdot\|_2$ er fuldstændig, er $L^2(\mu)$ dermed et såkaldt *Hilbert rum*, d.v.s. et vektorrum udstyret med en fuldstændig norm stammende fra et skalarprodukt.

Eksistensen af et underliggende skalarprodukt gør det muligt at overføre det fra \mathbf{R}^n kendte orthogonalitetsbegreb til $L^2(\mu)$.

Definition. $f, g \in L^2(\mu)$ kaldes *orthogonale*, betegnet $f \perp g$, hvis $\langle f, g \rangle = 0$.

Som det er sædvane defineres $V^\perp := \{h \in L^2(\mu) \mid h \perp g \text{ for alle } g \in V\}$ for enhver delmængde V af $L^2(\mu)$. Følgende resultat er vel kendt i \mathbf{R}^n .

Proposition 14 For $f, g \in L^2(\mu)$ gælder

Pythagoras: $\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$ hvis $f \perp g$.

Parallelogramreglen: $\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = 2 \cdot \|f\|_2^2 + 2 \cdot \|g\|_2^2$.

Bevis. Opskriv $\|\cdot\|_2^2$ ved hjælp af $\langle \cdot, \cdot \rangle$ og udnyt bilineariteten. \diamond

Som en vigtig anvendelse heraf udledes følgende resultat.

Sætning 9 Projektionsætningen.

Lad $V \subseteq L^2(\mu)$ være et lukket underrum, d.v.s. lukket under addition, multiplikation med skalar samt konvergens i kvadratisk middel (enhver følge i V , som er

konvergent i kvadratisk middell, konvergerer mod et punkt i V). Da findes der til ethvert f i $L^2(\mu)$ et element $f_V \in V$, så at

$$f - f_V \in V^\perp \quad \text{og} \quad \|f - f_V\|_2 = \inf_{g \in V} \|f - g\|_2.$$

f_V er entydigt bestemt μ -n.o. og kaldes f 's orthogonale projektion på V .

Bevis. Lad $f \in L^2(\mu)$ være givet og vælg en følge $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq V$, så at

$$c := \inf_{g \in V} \|f - g\|_2 = \lim_n \|f - f_n\|_2.$$

Bemærk at $c < \infty$. Ved hjælp af parallelogramreglen har vi for alle $n, m \geq 1$

$$\|f - f_n\|_2^2 + \|f - f_m\|_2^2 = 2 \cdot \|f - (f_n + f_m)/2\|_2^2 + 2 \cdot \|(f_n - f_m)/2\|_2^2$$

d.v.s.

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = 2 \left(\|f - f_n\|_2^2 + \|f - f_m\|_2^2 - 2 \cdot \|f - (f_n + f_m)/2\|_2^2 \right).$$

Men da $\frac{1}{2}(f_n + f_m) \in V$, da V er et vektorrum og derfor specielt konveks, er

$$\|f - \frac{1}{2}(f_n + f_m)\|_2^2 \geq c^2 \quad \text{for alle } n, m,$$

hvoraf fås, at $\lim_{m,n} \|f_n - f_m\|_2$ er lig 0, d.v.s. $(f_n)_{n \geq 1}$ er en L^2 -Cauchy-følge. Følgen er derfor konvergent i $L^2(\mu)$, og da V er lukket under konvergens i kvadratisk middell, er der en grænseværdi f_V i V . Dette viser sætningens første del, for som tidligere bemærket sikrer Minkowski's ulighed, at

$$\|f - f_V\|_2 = \lim_n \|f - f_n\|_2 = c.$$

Bemærk at vi kun udnyttede, at V var lukket og konveks (endog kun $f, g \in V \Rightarrow (f + g)/2 \in V$). Disse to egenskaber sikrer også entydigheden, thi hvis f_V og \tilde{f}_V i V begge realiserer minimalafstanden c , fås af parallelogramreglen

$$\begin{aligned} c^2 &\leq \|f - 1/2(f_V + \tilde{f}_V)\|_2^2 = 2 \cdot \|(f - f_V)/2\|_2^2 + 2 \cdot \|(f - \tilde{f}_V)/2\|_2^2 \\ &\quad - \|(f_V - \tilde{f}_V)/2\|_2^2 = c^2 - \|(f_V - \tilde{f}_V)/2\|_2^2 \leq c^2, \end{aligned}$$

d.v.s. $\|f_V - \tilde{f}_V\|_2^2 = 0$ og dermed $f_V = \tilde{f}_V$ μ -n.o. For at vise orthogonaliteten lader vi $g \in V$ være givet. Da V er et underrum, er $f_V + t \cdot g \in V$ for alle $t \in \mathbf{R}$, og 0 er dermed minimumspunkt for andengrads polynomiet

$$t \mapsto \|f - (f_V + t \cdot g)\|_2^2 = \|f - f_V\|_2^2 - 2t \langle f - f_V, g \rangle + t^2 \cdot \|g\|_2^2,$$

hvilket betyder, at $\langle f - f_V, g \rangle = 0$, og dermed den ønskede orthogonalitet. \diamond

Øvelse 18. Lad \mathcal{G} betegne en del σ -algebra i \mathcal{E} , d.v.s. \mathcal{G} er en σ -algebra i E og $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$. Vis at

$$L^2(\mu, \mathcal{G}) := \{g \in L^2(\mu) \mid g \text{ er } \mathcal{G}\text{-målelig}\}$$

er et underrum i $L^2(\mu)$, som opfylder betingelserne i Projektionssætningen. Antag yderligere at μ er et endeligt mål. Vis ved at udnytte at $\mathbf{1}_A \in L^2(\mu, \mathcal{G})$ for alle $A \in \mathcal{G}$, at der til ethvert $f \in L^2(\mu)$ findes netop et (entydigheden er op til μ -n.o.) element $f_{\mathcal{G}} \in L^2(\mu, \mathcal{G})$, så at

$$\int_A f d\mu = \int_A f_{\mathcal{G}} d\mu \text{ for alle } A \in \mathcal{G}. \quad \square$$

Øvelse 19. Vis at underrummet $V := \text{span}(f_1, \dots, f_n)$ opfylder betingelserne i Projektionssætningen for ethvert endeligt sæt f_1, \dots, f_n af elementer i $L^2(\mu)$. \square

Kombineres Pythagoras og fuldstændigheden fås følgende særdeles nyttige udsagn om konvergens i $L^2(\mu)$. Sammenlign med korollaret til Sætning 8.

Lemma 13 Lad $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^2(\mu)$ være givet, så at f_n 'erne er parvis orthogonale, d.v.s. $f_n \perp f_m$ for $n \neq m$. Da er

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ konvergent i } L^2(\mu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2^2 < \infty.$$

Bevis. Ifølge Pythagoras har vi for alle $n \leq m$

$$\left\| \sum_{k=1}^m f_k - \sum_{k=1}^n f_k \right\|_2^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^m \|f_k\|_2^2 - \sum_{k=1}^n \|f_k\|_2^2.$$

Heraf fås påstanden umiddelbart, da konvergens i $L^2(\mu)$ og \mathbf{R} er fuldstændig. \diamond

Korollar Lad $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^2(\mu)$ være givet, så at $f_k \perp (f_{n+1} - f_n)$ for alle $1 \leq k \leq n$. Da er $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergent i $L^2(\mu)$, hvis og kun hvis $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$.

Bevis. Benyt Lemma 13 på $(g_n)_{n \geq 1}$, hvor $g_1 = f_1$ og $g_k = f_{k+1} - f_k$ $k \geq 2$. \diamond

Monoton konvergens viser sammen med Lemma 6, at de ikke-negative simple funktioner $S(\mathcal{E})_+$ er tæt i $L^1(\mu)_+$, d.v.s.

$$\forall f \in L^1(\mu)_+ \forall \epsilon > 0 \exists g \in S(\mathcal{E})_+ \cap L^1(\mu) : \|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Ved opsplitning i positiv og negativ del samt brug af trekantsuligheden følger derfor, at $S(\mathcal{E})$ er tæt i $L^1(\mu)$, d.v.s.

$$\forall f \in L^1(\mu) \forall \epsilon > 0 \exists g \in S(\mathcal{E}) \cap L^1(\mu) : \|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Da

$$\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\|_1 = \mu(A \Delta B) \quad \text{for } A, B \in \mathcal{E}$$

viser Øvelse 13, at hvis $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ er en algebra, som frembringer \mathcal{E} , så er også $S(\mathcal{A})$ tæt i $L^1(\mu)$, hvor

$$S(\mathcal{A}) := \text{span} \{ \mathbf{1}_A \mid A \in \mathcal{A} \}.$$

D.v.s. hvis \mathcal{E} er tællelig frembragt og derfor på formen $\sigma(\mathcal{A})$ for en tællelig algebra \mathcal{A} , så er $L^1(\mu)$ separabel, idet den tællelige mængde

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \mid n \geq 1, \alpha_i \in \mathbf{Q}, A_i \in \mathcal{A} \right\}$$

er tæt i $L^1(\mu)$.

Det er ofte vigtigt at vide, at en bestemt mængde af 'pæne' funktioner er tæt i $L^1(\mu)$. I denne forbindelse er flg. resultat interessant. Bemærk at \mathbf{R} og mere generelt \mathbf{R}^n udstyret med Lebesgue målet opfylder betingelserne.

Proposition 15 *Lad (S, d) betegne et metrisk rum og μ et Borel mål på S . Antag at der findes en følge af voksende åbne mængder $(U_n)_{n \geq 1}$, så at $S = \bigcup_n U_n$ og $\mu(U_n) < \infty$ for alle n . Da er $C(S)$, d.v.s. mængden af kontinuerte reelle funktioner defineret på S , tæt i $L^1(\mu)$, d.v.s.*

$$\forall f \in L^1(\mu) \forall \epsilon > 0 \exists g \in C(S) \cap L^1(\mu) : \|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Bevis. Da $S(\mathcal{E})$ er tæt i $L^1(\mu)$, viser trekantsuligheden, at det er nok at betragte funktioner $f \in S(\mathcal{E}) \cap L^1(\mu)$, d.v.s. funktioner på formen $\sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, hvor $A_i \in \mathcal{E}$ og $\mu(A_i) < \infty$ for $i = 1, \dots, k$. Men da

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} - \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i \cap U_n} \right\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^k a_i \cdot (\mathbf{1}_{A_i} - \mathbf{1}_{A_i \cap U_n}) \right\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \cdot \|\mathbf{1}_{A_i} - \mathbf{1}_{A_i \cap U_n}\|_1 = \sum_{i=1}^k |a_i| \cdot \mu(A_i \setminus U_n), \end{aligned}$$

ses, at vi uden tab af generalitet kan antage, at $A_i \subseteq U_{n_0}$ for alle i for et $n_0 \geq 1$. Lad nu $\epsilon > 0$ være givet og sæt $a := \sup_i |a_i|$. Da $\mu_{U_{n_0}}$ er et endeligt Borel mål, findes der ifølge Proposition 4 åbne mængder $(V_i)_{i=1, \dots, k}$, så at

$$A_i \subseteq V_i \subseteq U_{n_0} \quad \text{og} \quad \mu(V_i \setminus A_i) = \mu_{U_{n_0}}(V_i \setminus A_i) < \frac{\epsilon}{2ak}.$$

Men for ethvert i findes der en følge $(g_{n,i})_{n \geq 1} \subseteq C(S)_+$, så at $g_{n,i} \uparrow \mathbf{1}_{V_i}$, f.eks.

$$g_{n,i} : x \mapsto n \cdot d(x, V_i^c) \wedge 1.$$

Bemærk at $\{g_{n,i} = 1\} = \{x \in V_i \mid d(x, V_i^c) \geq 1/n\}$. Ifølge Monoton konvergens findes der derfor et $n_1 \geq 1$, så at

$$\left| \int \mathbf{1}_{V_i} d\mu - \int g_{n_1,i} d\mu \right| < \frac{\epsilon}{2ak}$$

for $i = 1, \dots, k$, hvilket ved brug af trekantuligheden medfører, at

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} - \sum_{i=1}^k a_i \cdot g_{n_1, i} \right\|_1 &\leq \left\| \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} - \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{1}_{V_i} \right\|_1 + \left\| \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{1}_{V_i} - \sum_{i=1}^k a_i \cdot g_{n_1, i} \right\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \cdot \mu(V_i \setminus A_i) + \sum_{i=1}^k |a_i| \cdot \left| \int \mathbf{1}_{V_i} d\mu - \int g_{n_1, i} d\mu \right| \leq \epsilon \end{aligned}$$

og dermed det ønskede resultat. \diamond

Bemærkning. Resultatet er formuleret for $L^1(\mu)$, men gælder uændret for $L^p(\mu)$ for ethvert $p > 0$.

Da Lebesgue målene er translationsinvariante kan man ved brug af Lebesgue's Sætning og Proposition 15 vise følgende interessante egenskab ved målrummet $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \lambda_n)$.

Korollar For ethvert $p > 0$ og ethvert $f \in L^p(\lambda_n)$ er afbildningen

$$\mathbf{R}^n \ni \underline{x} \mapsto f(\cdot + \underline{x}) \in L^p(\lambda_n)$$

kontinueret, hvis \mathbf{R}^n udstyres med den sædvanlige Euklidiske metrik og $L^p(\lambda_n)$ med $d_p(\cdot, \cdot)$ -metrikken.

Specielt findes der for ethvert $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ med $\lambda_n(A) > 0$ et $\epsilon > 0$, så at

$$b(0, \epsilon) \subseteq A - A = \{\underline{y} \in \mathbf{R}^n \mid \underline{y} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2 \text{ for } \underline{x}_i \in A \ i = 1, 2\}.$$

Radon-Nikodym's Sætning.

Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et σ -endeligt målrum. Som tidligere omtalt definerer afbildningen

$$A \mapsto \int_A g d\mu$$

for ethvert g i $\overline{M}(\mathcal{E})_+$ et μ -satureret sum-endeligt mål på (E, \mathcal{E}) . I dette afsnit vises omvendt, at der til ethvert $\nu \in m(E)$, som er μ -satureret og sum-endelig, svarer et g i $\overline{M}(\mathcal{E})_+$, så at

$$\nu(A) = \int_A g d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Tætheden g er som tidligere vist entydigt bestemt op til μ -nulmængder. Hvis ν er σ -endelig kan g vælges i $M(\mathcal{E})_+$. Resultatet, der specielt viser, at satureret og absolut kontinuitet er det samme for σ -endelige mål, formuleres som flg. sætning.

Sætning 10 Radon-Nikodym's Sætning.

Lad (E, \mathcal{E}, μ) betegne et σ -endeligt målrum, og lad ν være et sum-endeligt mål på (E, \mathcal{E}) , så at $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$. Da eksisterer der et g i $\overline{M}(\mathcal{E})_+$, så at

$$\nu(A) = \int_A g d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Bevis. Da ν er sum-endelig og μ -satureret, er $\nu = \sum_i \nu_i$, hvor ν_i er endelig og μ -satureret for alle $i \geq 1$. Har vi derfor vist, at $\nu_i = g_i d\mu$ for alle i , sikrer ligheden $\nu = \sum_i \nu_i$ og integralets egenskaber, at $\sum_i g_i$ er en tæthed for ν m.h.t. μ . D.v.s. vi kan og vil antage, at ν er et endeligt mål. Vi kan ligeledes antage, at μ er et endeligt mål. Thi da μ er σ -endeligt, findes der en overalt strengt positiv funktion $\varphi \in L^1(\mu)$. Et eksempel er

$$\varphi := \sum_{n \geq 1} \frac{2^{-n}}{1 + \mu(B_n)} \cdot \mathbf{1}_{B_n},$$

hvor $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ er valgt så at $E = \bigcup_n B_n$ og $\mu(B_n) < \infty$ for ethvert n . Defineres herudfra

$$\tilde{\mu}(A) := \int_A \varphi d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E},$$

er $\tilde{\mu}$ et endeligt mål på (E, \mathcal{E}) , og ν er $\tilde{\mu}$ -satureret, da $\tilde{\mu}$ og μ er ækvivalente. Kan vi derfor vise eksistensen af en tæthed g for ν m.h.t. $\tilde{\mu}$, vil $g \cdot \varphi$ ifølge Sætning 4 være en tæthed for ν m.h.t. μ . Alt i alt drejer det sig altså om at vise:

Til givne endelige mål μ og ν , hvor ν er μ -satureret, findes der et ikke-negativt element $g \in L^1(\mu)$, så at

$$\nu(A) = \int_A g d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Vi beviser først påstanden under antagelsen, at \mathcal{E} er tællelig frembragt, d.v.s.

$$\exists (A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E} : \mathcal{E} = \sigma((A_n)_{n \geq 1}).$$

For alle $n \geq 1$ findes der som tidligere omtalt en endelig partition $\{B_1^n, \dots, B_{2^n}^n\}$ af E , så at

$$\sigma(\{A_1, \dots, A_n\}) = \sigma(\{B_1^n, \dots, B_{2^n}^n\}),$$

og beskrivelsen af σ -algebraen frembragt af en partition, (se side 5), viser, at for ethvert $n \geq 1$ og $A \in \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$ er

$$A \cap B_i^n = B_i^n \text{ eller } \emptyset \quad \text{d.v.s.} \quad A = \bigcup_{i: B_i^n \subseteq A} B_i^n.$$

Definer for ethvert $n \geq 1$ ($0/0 := 0$)

$$f_n := \sum_{i=1}^{2^n} \frac{\nu(B_i^n)}{m(B_i^n)} \cdot \mathbf{1}_{B_i^n},$$

hvor $m = \mu + \nu$. Da $0 \leq f_n \leq 1$ for alle n , er $(f_n)_{n \geq 1}$ begrænset i $L^2(m)$, og for ethvert $1 \leq l \leq n$ og $i \leq 2^l$ er ifølge ovenstående observation

$$\begin{aligned} \int_{B_i^l} f_n dm &= \sum_{j=1}^{2^n} \frac{\nu(B_j^n)}{m(B_j^n)} \int_{B_i^l} \mathbf{1}_{B_j^n} dm \\ &= \sum_{j=1}^{2^n} \frac{\nu(B_j^n)}{m(B_j^n)} \cdot m(B_i^l \cap B_j^n) = \sum_{j: B_j^n \subseteq B_i^l} \nu(B_j^n) = \nu(B_i^l). \end{aligned}$$

Ved linearitet følger heraf, at for alle $1 \leq l \leq n$ er

$$\int f_l \cdot f_n dm = \int f_l \cdot f_{n+1} dm,$$

d.v.s. $f_l \perp (f_{n+1} - f_n)$ i $L^2(m)$ for alle $1 \leq l \leq n$. Ifølge korollaret til Lemma 13 eksisterer $\lim_n f_n$ derfor i $L^2(m)$. Grænseværdien, som betegnes f , kan naturligvis antages at opfylde ulighederne $0 \leq f \leq 1$.

For alle $n \geq 1$ og $i \leq 2^n$ har vi derfor ifølge kontinuiteten af skalarproduktet, at

$$\int_{B_i^n} f dm = \langle f, \mathbf{1}_{B_i^n} \rangle = \lim_l \langle f_l, \mathbf{1}_{B_i^n} \rangle = \lim_l \int_{B_i^n} f_l dm = \nu(B_i^n),$$

hvilket ved addition betyder, at

$$\nu(A) = \int_A f dm \quad \text{for alle } A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\{A_1, \dots, A_n\}).$$

De to endelige mål ν og $f dm$ stemmer altså overens på en algebra, som frembringer \mathcal{E} , og ifølge Proposition 2 er de derfor identiske. D.v.s.

$$\nu(A) = \int_A f dm \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E},$$

hvilket, da $m = \mu + \nu$, også kan skrives som

$$\int_A f d\mu = \int_A (1 - f) d\nu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Ved at bruge dette for $A = \{f = 1\}$ ses, at $\mu(f = 1) = 0$ og dermed $\nu(f = 1) = 0$, d.v.s. $1 - f = (1 - f) \cdot \mathbf{1}_{\{f < 1\}}$ ν -n.o., hvoraf fås ved brug af Sætning 4, at

$$\nu(A) = \int_A \frac{f}{1 - f} \cdot \mathbf{1}_{\{f < 1\}} d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Eksistensen af en tæthed for ν m.h.t. μ er hermed vist, forudsat at \mathcal{E} er tællelig frembragt. For at fjerne denne antagelse argumenteres som følger.

Som netop set er det nok at vise, at der findes et $f \in L^2(m)$, så at $0 \leq f \leq 1$ og

$$\nu(A) = \int_A f dm \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Som netop vist, findes der for enhver tællelig frembragt del σ -algebra \mathcal{F} i \mathcal{E} et $f_{\mathcal{F}} \in L^2(m, \mathcal{F})$, så at $0 \leq f_{\mathcal{F}} \leq 1$ og

$$\nu(A) = \int_A f_{\mathcal{F}} dm \quad \text{for alle } A \in \mathcal{F}.$$

Vælg nu en følge $(\mathcal{F}_i)_{i \geq 1}$ af tællelig frembragte del σ -algebraer i \mathcal{E} , så at

$$\lim_i \int f_{\mathcal{F}_i}^2 dm = \sup_{\mathcal{F}} \int f_{\mathcal{F}}^2 dm \leq m(E) < \infty,$$

hvor sup tages over alle tællelig frembragte del σ -algebraer i \mathcal{E} . Definer $\mathcal{F}^* := \sigma(\cup_{i \geq 1} \mathcal{F}_i)$. Da \mathcal{F}^* er tællelig frembragt, har det mening at betragte $f_{\mathcal{F}^*}$, og da $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}^*$ er $f_{\mathcal{F}_i}$ og $f_{\mathcal{F}^*} - f_{\mathcal{F}_i}$ orthogonale i $L^2(m)$ for ethvert i , thi

$$\int f_{\mathcal{F}_i} \cdot (f_{\mathcal{F}^*} - f_{\mathcal{F}_i}) dm = \int f_{\mathcal{F}_i} \cdot f_{\mathcal{F}^*} dm - \int f_{\mathcal{F}_i} \cdot f_{\mathcal{F}_i} dm = \int f_{\mathcal{F}_i} d\nu - \int f_{\mathcal{F}_i} d\nu = 0.$$

Ifølge Pythagoras gælder derfor, at $\int f_{\mathcal{F}_i}^2 dm \leq \int f_{\mathcal{F}^*}^2 dm$ for alle i og dermed

$$\int f_{\mathcal{F}^*}^2 dm = \sup_{\mathcal{F}} \int f_{\mathcal{F}}^2 dm.$$

Men dette viser, at $f_{\mathcal{F}^*}$ er funktionen, vi søger. Thi lad $A \in \mathcal{E}$ være givet. Da σ -algebraen $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F}^*, A)$ er tællelig frembragt og indeholder \mathcal{F}^* , vises som før, at $f_{\mathcal{F}^*}$ og $f_{\overline{\mathcal{F}}} - f_{\mathcal{F}^*}$ er orthogonale i $L^2(m)$, men på grund af maksimaliteten af $\int f_{\mathcal{F}^*}^2 dm$ må der gælde $f_{\overline{\mathcal{F}}} - f_{\mathcal{F}^*} = 0$ m -n.o., d.v.s.

$$\nu(A) = \int_A f_{\overline{\mathcal{F}}} dm = \int_A f_{\mathcal{F}^*} dm.$$

Sætningen er hermed vist. ◇

Konstruktion af mål.

Indtil nu har vi arbejdet under antagelsen, at målrummet (E, \mathcal{E}, μ) , d.v.s. et måleligt rum (E, \mathcal{E}) udstyret med et mål μ , på forhånd var givet. Men de eneste mål, vi på nuværende tidspunkt faktisk ved eksisterer, er såkaldte *diskrete mål*, d.v.s. mål af typen

$$\sum_i a_i \cdot \delta_{x_i} \quad \text{hvor } a_i > 0, x_i \in E.$$

I dette afsnit skal vi derfor beskæftige os med eksistensen af mere interessante mål som f.eks. Lebesgue målet på \mathbf{R} . Problemet, vi ønsker at løse, kan formuleres på følgende måde:

Givet et system \mathcal{G} af 'pæne' delmængder af E indeholdende \emptyset samt en funktion $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$, så at $\mu(\emptyset) = 0$. Hvornår findes der da et mål på $\sigma(\mathcal{G})$, som stemmer overens med μ på \mathcal{G} ? Eller kort, hvornår kan μ udvides til et mål på $\sigma(\mathcal{G})$?

Set i lyset af Proposition 2 og det tilhørende Korollar er situationen, hvor \mathcal{G} er stabil under endelig gennemsnit og indeholder en voksende følge $(G_n)_{n \geq 1}$ så at $E = \bigcup_n G_n$ og $\mu(G_n) < \infty$ for alle n , specielt vigtig, idet der her højst eksisterer én udvidelse.

Vigtigt eksempel:

$$E = \mathbf{R}, \quad \mathcal{G} = \{]a, b[\mid -\infty < a \leq b < \infty \} \quad \text{og} \quad \mu(]a, b[) = b - a.$$

Problemet's løsning ligger gemt i følgende resultat af Carathéodory.

Sætning 11 Carathéodory's Sætning.

Lad m betegne en ikke-negativ mængdefunktion defineret på alle delmængder af E , d.v.s. $m : 2^E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ så at $m(\emptyset) = 0$, og lad de såkaldte m -målelige mængder $\mathcal{M}(m)$ være defineret ved

$$\mathcal{M}(m) := \{ B \in 2^E \mid m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c) \text{ for alle } A \in 2^E \}.$$

$\mathcal{M}(m)$ er da en σ -algebra og m et mål på $\mathcal{M}(m)$, hvis m er voksende og tællelig subadditiv.

Bemærkning. Nedenstående bevis viser, at $\mathcal{M}(m)$ altid er en algebra, og at m er endelig additiv på $\mathcal{M}(m)$.

Bemærk endvidere at subadditiviteten af m sikrer, at $B \in 2^E$ element i $\mathcal{M}(m)$, hvis og kun hvis

$$m(A) \geq m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$$

for ethvert $A \in 2^E$ med $m(A) < \infty$. Hvis m yderligere er voksende, indeholder $\mathcal{M}(m)$ derfor alle m -nulmængder, d.v.s. delmængder $B \subseteq E$ med $m(B) = 0$.

Bevis for Sætning 11. Definitionsligningen viser umiddelbart, at $E, \emptyset \in \mathcal{M}(m)$, samt at denne er stabil under komplementærmængde dannelse. Lad B_1 og B_2 i

$\mathcal{M}(m)$ være givet. Ved først at udnytte at $B_1 \in \mathcal{M}(m)$ og dernæst at $B_2 \in \mathcal{M}(m)$ fås for ethvert $A \in 2^E$, at

$$\begin{aligned} & m(A \cap (B_1 \cup B_2)) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) \\ &= m(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + m(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) + m(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) \\ &= m(A \cap B_1) + m(A \cap B_2 \cap B_1^c) + m(A \cap B_1^c \cap B_2^c), \\ &= m(A \cap B_1) + m(A \cap B_1^c) = m(A). \end{aligned}$$

D.v.s. $\mathcal{M}(m)$ er en algebra. σ -additiviteten på $\mathcal{M}(m)$ er simpel. Thi er $(B_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}(m)$ parvis disjunkte gælder for alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) &= m\left(\bigcup_{k=1}^n B_k \cap B_1\right) + m\left(\bigcup_{k=1}^n B_k \cap B_1^c\right) = \\ & m(B_1) + m\left(\bigcup_{k=2}^n B_k\right) = m(B_1) + m(B_2) + m\left(\bigcup_{k=3}^n B_k\right) = \dots = \sum_{k=1}^n m(B_k), \end{aligned}$$

og dermed hvis m er voksende

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \geq \sup_n m\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sup_n \sum_{k=1}^n m(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k).$$

Hvis m er tællelig subadditiv må der derfor gælde $=$, d.v.s. σ -additivitet. Et fuldstændigt identisk argument viser, at for alle $n \geq 1$ og $A \subseteq E$ er

$$m\left(A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n m(A \cap B_k) \quad \text{og} \quad m\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A \cap B_k).$$

Vi mangler derfor kun at vise, at $\mathcal{M}(m)$ er stabil under tællelig disjunkt forening, hvis m er voksende og tællelig subadditiv. Lad derfor $(B_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}(m)$ parvis disjunkte være givet. Da $\mathcal{M}(m)$ er en algebra følger af det netop viste, at for alle $A \subseteq E$ med $m(A) < \infty$ er

$$\begin{aligned} m\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c\right) &\leq \inf_n m\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right)^c\right) \\ &= \inf_n \left(m(A) - m\left(A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k\right)\right) = m(A) - \sum_{k=1}^{\infty} m(A \cap B_k). \end{aligned}$$

D.v.s.

$$m\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) + m\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A \cap B_k) + m\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c\right) \leq m(A),$$

hvilket ifølge ovenstående bemærkning betyder, at $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{M}(m)$. Sætningen er hermed vist. \diamond

Lad i det følgende \mathcal{G} og μ som ovenfor være givet. For at kunne udnytte Carathéodory's Sætning må vi først ud fra μ konstruere en ikke-negativ mængdefunktion defineret på hele 2^E . Dette kan gøres på flere måder, men vi holder os til det såkaldte *ydre mål* μ^* defineret ved

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, G_i \in \mathcal{G} \right\} \quad \text{for } A \in 2^E.$$

Definitionen viser umiddelbart, at μ^* er voksende, d.v.s. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, hvis $A \subseteq B$, samt $\mu^*(\emptyset) = 0$, da $\emptyset \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, hvor $G_i = \emptyset$ for alle $i \geq 1$. Endvidere er

$$\text{i) } \mu^*(G) \leq \mu(G) \text{ for } G \in \mathcal{G} \quad \text{og} \quad \text{ii) } \mu^* \text{ tællelig subadditiv.}$$

Bevis. i) følger klart af at

$$G \subseteq G \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots \text{ og } \emptyset \in \mathcal{G} \text{ med } \mu(\emptyset) = 0.$$

Betragt derfor ii). Lad $(A_i)_{i \geq 1} \subseteq 2^E$ være givet og antag, at $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \infty$, thi i modsat fald er der intet at vise. Lad $\epsilon > 0$ være givet og vælg for ethvert $k \geq 1$ $(G_i^k)_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, så at

$$A_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^k \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i^k) \leq \mu^*(A_k) + \epsilon \cdot 2^{-k} \quad \text{for alle } k \geq 1.$$

Rearrangeres $\{G_i^k \mid i, k \geq 1\}$ som én følge, fås en følge $(\bar{G}_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, hvis forening overdækker $\bigcup_i A_i$, og da man i en sum med lutter ikke-negative led frit kan omordne leddene, uden at summen ændres, ses at

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\bar{G}_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i^k) \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \epsilon,$$

hvilket viser ii), da $\epsilon > 0$ er vilkårlig. \diamond

Ifølge Carathéodory's Sætning er μ^* et mål på $\mathcal{M}(\mu^*)$, og restriktionen af μ^* til $\sigma(\mathcal{G})$ er derfor en udvidelse af den rigtige type, hvis flg. to betingelser er opfyldte.

$$\text{I) } \mu^* = \mu \text{ på } \mathcal{G} \quad \text{og} \quad \text{II) } \mathcal{G} \text{ og dermed } \sigma(\mathcal{G}) \text{ er indeholdt i } \mathcal{M}(\mu^*).$$

Dette giver anledning til følgende løsning på ovenstående eksistensproblem. Bemærk at b), c) og d) også er nødvendige for eksistensen af måludvidelse. a) kan udskiftes med

$$\mu(G_1) \geq \mu(G_1 \cap G_2) + \mu^*(G_1 \cap G_2^c) \quad G_1, G_2 \in \mathcal{G}.$$

Sætning 12 *Antag at \mathcal{G} er stabil under endelig gennemsnit. Da udvider μ til et mål på $\sigma(\mathcal{G})$, hvis følgende betingelser er opfyldte.*

a) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G} \exists G_1^*, \dots, G_n^* \in \mathcal{G}$ parvis disjunkte : $G_1 \cap G_2^c = \bigcup_{i=1}^n G_i^*$.

b) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G} : \mu(G_1) \leq \mu(G_2)$, hvis $G_1 \subseteq G_2$.

c) $\forall G, G_1, G_2, \dots \in \mathcal{G} : \mu(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$, hvis $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$.

d) $\forall G, G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G} : \mu(G) \geq \sum_{i=1}^n \mu(G_i)$, hvis $\bigcup_{i=1}^n G_i \subseteq G$ og G_1, \dots, G_n parvis disjunkte.

Udvidelsen er entydigt bestemt, hvis der findes $(G_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, så at $G_n \uparrow E$ og $\mu(G_n) < \infty$ for alle n .

Da entydigheden allerede er afklaret, behandles kun eksistensen. Beviset opdeles for at øge overskueligheden i to dele, idet vi særskilt viser

Lemma 14 *Lad \mathcal{G} og μ være som i Sætning 12. Da gælder*

1) $b), c) \Rightarrow \mu = \mu^*$ på \mathcal{G} .

2) $c), d) \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{i=1}^n G_i) = \sum_{i=1}^n \mu^*(G_i)$ for parvis disjunkte $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$

3) $a), b), c), d) \Rightarrow \mu(G_1) \geq \mu(G_1 \cap G_2) + \mu^*(G_1 \cap G_2^c)$ $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$.

Bevis. Lad $G \in \mathcal{G}$ være givet. Som før nævnt er det nok at vise $\mu^*(G) \geq \mu(G)$. Lad hertil $(G_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{G}$ være givet, så at $G \subseteq \bigcup_i G_i$. Antagelserne giver nu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i \cap G) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \cap G)\right) = \mu(G),$$

og dermed at $\mu^*(G) \geq \mu(G)$. D.v.s. vi har vist punkt 1).

Da μ^* er subadditiv, er det i punkt 2) nok at vise \geq . Lad derfor parvis disjunkte $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$ være givet, og betragt en følge $(\tilde{G}_j)_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, hvis foreningsmængde overdækker $G_1 \cup \dots \cup G_n$. Da $G_i \cap \tilde{G}_j \subseteq \tilde{G}_j$ for $i, j \geq 1$ fås af d)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(\tilde{G}_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \mu(G_i \cap \tilde{G}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_i \cap \tilde{G}_j) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(G_i),$$

hvilket pr. definition af μ^* giver den søgte ulighed.

For at vise punkt 3) lader vi $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ være givet. Ifølge a) findes der parvis disjunkte G_1^*, \dots, G_n^* i \mathcal{G} så at $G_1 \cap G_2^c = \bigcup_{i=1}^n G_i^*$, og de allerede viste punkter 1 og 2 giver derfor, at

$$\mu(G_1) = \mu^*(G_1) = \mu^*(G_1 \cap G_2) + \sum_{i=1}^n \mu^*(G_i^*) \geq \mu(G_1 \cap G_2) + \mu^*(G_1 \cap G_2^c). \diamond$$

Bevis for Sætning 12. Da $\mu = \mu^*$ på \mathcal{G} i h.h.t. Lemma 14 punkt 1, mangler vi ifølge Carathéodory's Sætning kun at vise, at $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$, d.v.s. pr. definition af

μ^* og $\mathcal{M}(\mu^*)$ at vise, at for ethvert givet $G \in \mathcal{G}$ og $A \in 2^E$ er

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \geq \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A \cap G^c)$$

for enhver følge $(G_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, så at $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Lad derfor G , A og $(G_i)_{i \geq 1}$ med de nævnte egenskaber være givet. Ifølge Lemma 14 punkt 3 er

$$\mu(G_i) \geq \mu(G_i \cap G) + \mu^*(G_i \cap G^c) = \mu^*(G_i \cap G) + \mu^*(G_i \cap G^c) \quad \text{for alle } i \geq 1.$$

Den søgte ulighed følger nu ved summation under brug af subadditiviteten af μ^* samt inklusionerne $A \cap G \subseteq \bigcup_i (G_i \cap G)$ og $A \cap G^c \subseteq \bigcup_i (G_i \cap G^c)$, thi

$$\mu^*(A \cap G) + \mu^*(A \cap G^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(G_i \cap G) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(G_i \cap G^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i). \quad \diamond$$

Flg. klassiske resultat er et specialtilfælde af Sætning 12.

Korollar *Enhver ikke-negativ tællelig additiv mængdefunktion defineret på en algebra \mathcal{A} udvider til et mål på $\sigma(\mathcal{A})$, og udvidelsen er entydig, hvis \mathcal{A} indeholder en følge af elementer, som alle har endeligt mål, og hvis foreningsmængde overdækker hele rummet.*

En mængdefunktion λ på en algebra \mathcal{A} , siges at være tællelig additiv, hvis $\lambda(\emptyset) = 0$ og

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i),$$

hvis $(A_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ er parvis disjunkte og $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Bemærk at tællelig additivitet på \mathcal{A} medfører endelig additivitet. Ved at betragte $(B_n)_{n \geq 1}$, hvor

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \quad n \geq 1,$$

ses, at hvis hele rummet har endeligt λ mål, så er λ tællelig additiv på \mathcal{A} , hvis og kun hvis λ er endelig additiv og *kontinuert* i \emptyset , d.v.s. opfylder

$$\lim_n \lambda(B_n) = \inf_n \lambda(B_n) = 0$$

for alle $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ hvor $B_n \downarrow \emptyset$, d.v.s.

$$B_n \supseteq B_{n+1} \quad \text{for } n \geq 1 \quad \text{og} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset.$$

I forlængelse af Korollaret er det på sin plads at nævne flg. vigtige anvendelse af resultaterne i dette afsnit.

Lad (S, d) betegne et separabelt metrisk rum. Tilfældet $S = \mathbf{R}$ med den sædvanlige metrik eller S en endelig mængde udstyret med den diskrete metrik er specielt vigtige. Sæt

$$S^\infty := \{ (x_i)_{i \geq 1} \mid x_i \in S \ i \geq 1 \}$$

og definer for $n \geq 1$

$$p_n : S^\infty \rightarrow S^n \quad p_n((x_i)_{i \geq 1}) := (x_1, \dots, x_n)$$

d.v.s. p_n er projektionsafbildningen ned på de første n koordinater. Da

$$p_n^{-1}(A_n) = p_{n+1}^{-1}(A_n \times \mathbf{R})$$

for ethvert $n \geq 1$ og $A_n \in \mathcal{B}(S^n)$ er

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}(\mathcal{B}(S^n))$$

en algebra i S^∞ , og da $\mathcal{B}(S^n) = \mathcal{B}(S)^n$ er $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(S)^\infty$. Bemærk at hvis

$$p_n^{-1}(A_n) = p_m^{-1}(A_m) \quad \text{for } n \leq m \text{ og } A_n \in \mathcal{B}(S^n), A_m \in \mathcal{B}(S^m),$$

så er

$$A_m = A_n \times S \times \dots \times S \quad (m - n \text{ faktorer}).$$

Heraf ses at hvis μ_n for ethvert $n \geq 1$ et sandsynlighedsmål på $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$, så at $(\mu_n)_{n \geq 1}$ opfylder flg. konsistensbetingelse:

$$\mu_n(A) = \mu_{n+1}(A \times S) \quad \text{for } n \geq 1 \text{ og } A \in \mathcal{B}(S^n),$$

så er der ved fastsættelsen

$$\lambda(A) := \mu_n(A_n) \quad \text{hvis } A = p_n^{-1}(A_n) \ n \geq 1 \ A_n \in \mathcal{B}(S^n)$$

defineret en endelig additiv mængdefunktion på \mathcal{A} med total masse 1, d.v.s. specielt $\lambda(\emptyset) = 0$. λ er derfor tællelig additiv på \mathcal{A} , hvis den er kontinuert i \emptyset , og i så fald udvider den til et sandsynlighedsmål $\bar{\lambda}$ på $(S^\infty, \mathcal{B}(S)^\infty)$, hvis marginalfordelinger er de givne $(\mu_n)_{n \geq 1}$, d.v.s.

$$\mu_n = \bar{\lambda} \circ p_n^{-1} \quad \text{for } n \geq 1.$$

Ifølge *Kolmogorov's Konsistens Sætning* gælder dette, hvis S er et polsk rum, d.v.s. specielt $S = \mathbf{R}$ eller \mathbf{R}^n eller pæne delmængder heraf. Hvis S er en endelig mængde, er alt simpelt, idet et kompakthedsargument her viser, at

$$(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A} \quad A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \exists n_0 \geq 1 : A_n = \emptyset \quad n \geq n_0.$$

D.v.s. λ er automatisk kontinuert i \emptyset og derfor tællelig additiv.

Lad os for fuldstændighedens skyld vise Kolmogorov's Konsistens Sætning. Vi skal altså med notationen fra forrige side vise, at hvis S er et polsk rum, så gælder

$$(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A} \quad A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lambda(A_n) \rightarrow 0,$$

eller ækvivalent da $\lambda(A_n)$ 'erne er aftagende, at

$$(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A} \quad A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \quad \lambda(A_N) \leq \epsilon.$$

Hertil får vi brug for flg. hjælperesultat.

Lad $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ betegne hele tal og lad for ethvert $n \geq 1$ $K_n \subseteq S^{k_n}$ være kompakt. Da gælder

$$\bigcap_{n=1}^m p_{k_n}^{-1}(K_n) \neq \emptyset \quad \text{for } m \geq 1 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} p_{k_n}^{-1}(K_n) \neq \emptyset.$$

Bevis. Vælg for alle $m \geq 1$ et

$$\underline{a}_m = (\underline{a}_m(i))_{i \geq 1} \in \bigcap_{n=1}^m p_{k_n}^{-1}(K_n) \quad \text{d.v.s. } (\underline{a}_m(1), \dots, \underline{a}_m(k_n)) \in K_n \quad 1 \leq n \leq m.$$

Kompaktheden og et successiv udtyndingsargument sikrer, at der findes en delfølge $(m_l)_{l \geq 1}$, så at

$$\lim_l (\underline{a}_{m_l}(1), \dots, \underline{a}_{m_l}(k_n)) \quad \text{eksisterer for alle } n \geq 1,$$

og derfor specielt $\underline{a}(i) := \lim_l \underline{a}_{m_l}(i)$ for alle i . Betragtes nu $\underline{a} = (\underline{a}(i))_{i \geq 1}$ ses at for alle $n \geq 1$ er

$$(\underline{a}(1), \dots, \underline{a}(k_n)) = \lim_l (\underline{a}_{m_l}(1), \dots, \underline{a}_{m_l}(k_n)) \in K_n, \quad \text{d.v.s. } \underline{a} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} p_{k_n}^{-1}(K_n). \quad \diamond$$

Bevis for Kolmogorov's Konsistens Sætning. Lad $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ være givet, så at $A_n \downarrow \emptyset$ og lad $\epsilon > 0$ være valgt. Pr.definition findes der en voksende følge af hele tal $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$, så at

$$A_n = p_{k_n}^{-1}(\tilde{A}_n) \quad \text{hvor } \tilde{A}_n \in \mathcal{B}(S^{k_n}) \quad n \geq 1.$$

Men da ethvert Borel sandsynlighedsmål på et polsk er regulært m.h.t. de kompakte mængder, findes der derfor mængder $(K_n)_{n \geq 1}$, så at

$$K_n \subseteq \tilde{A}_n, \quad K_n \text{ kompakt} \quad \text{og} \quad \mu_{k_n}(A_n \setminus K_n) \leq \epsilon/2^n.$$

Da

$$p_{k_n}^{-1}(K_n) \subseteq p_{k_n}^{-1}(\tilde{A}_n) = A_n \quad \text{og dermed} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} p_{k_n}^{-1}(K_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

findes der ifølge ovennævnte resultat et $N \geq 1$, så at

$$\bigcap_{n=1}^N p_{k_n}^{-1}(K_n) = \emptyset$$

Men for et sådant N er

$$\begin{aligned} \lambda(A_N) &= \lambda\left(\bigcap_{n=1}^N p_{k_n}^{-1}(K_n)\right) + \lambda\left(A_N \setminus \bigcap_{n=1}^N p_{k_n}^{-1}(K_n)\right) \leq 0 + \sum_{n=1}^N \lambda(A_n \setminus p_{k_n}^{-1}(K_n)) \\ &= \sum_{n=1}^N \lambda(p_{k_n}^{-1}(\tilde{A}_n \setminus K_n)) = \sum_{n=1}^N \mu_{k_n}(\tilde{A}_n \setminus K_n) \leq \epsilon. \quad \diamond \end{aligned}$$

Lebesgue-Stieltjes mål på \mathbf{R} .

Lad E betegne \mathbf{R} og definer $\mathcal{G} := \{]a, b[\mid -\infty < a \leq b < \infty \}$. Det ses let, at \mathcal{G} indeholder \emptyset og er stabil under endelig gennemsnit. Endvidere er $G_1 \setminus G_2 = G_1 \cap G_2^c$ for ethvert par af mængder G_1 og G_2 i \mathcal{G} enten element i \mathcal{G} eller kan skrives som en disjunkt forening af to elementer fra \mathcal{G} . \mathcal{G} opfylder dermed punkt a) i Sætning 12, og ligeledes ses \mathbf{R} at være en tællelig foreningsmængde af voksende elementer $(G_n)_{n \geq 1}$ fra \mathcal{G} , f.eks. $G_n =]-n, n[$.

Lad nu $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ betegne en given voksende og højrekontinuert funktion og definer

$$\lambda_F(]a, b[) := F(b) - F(a) \quad \text{for }]a, b[\in \mathcal{G}.$$

Det overlades til læseren at overveje, at λ_F opfylder b) og d) i Sætning 12. Da λ_F kun antager endelige værdier, udvider λ_F derfor på entydig vis til et mål på $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbf{R})$, hvis punkt c), d.v.s. den tællelige subadditivitet, er opfyldt. Vi skal med andre ord vise

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) \quad \text{hvis }]a, b[= \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[.$$

Hertil får vi brug for flg. lemma.

Lemma 15 *For alle $n \geq 1$ og alle reelle tal $a \leq b$ og $a_i < b_i$ $i = 1, \dots, n$ gælder*

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) \quad \text{hvis } [a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[.$$

Bevis. Induktion efter n . $n = 1$ siger kun, at

$$F(b) - F(a) \leq F(b_1) - F(a_1) \quad \text{hvis } [a, b] \subseteq]a_1, b_1[,$$

hvilket er klart, da F er voksende. Antag det gælder for $n - 1 \geq 1$ og alle valg af $a \leq b$ og $a_i < b_i$ $i = 1, \dots, n - 1$. Betragt tilfældet n . Da påstanden gælder for $n = 1$, kan vi forudsætte, at $[a, b]$ ikke er indeholdt i nogen af $]a_i, b_i[$ 'erne.

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[\Rightarrow \exists i_0 : a \in]a_{i_0}, b_{i_0}[\quad \text{og} \quad [b_{i_0}, b] \subseteq \bigcup_{i=1, i \neq i_0}^n]a_i, b_i[.$$

Da F er voksende fås ved brug af induktionshypotesen, at

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(b) - F(b_{i_0}) + F(b_{i_0}) - F(a) \leq F(b) - F(b_{i_0}) + F(b_{i_0}) - F(a_{i_0}) \\ &\leq \sum_{i=1, i \neq i_0}^n (F(b_i) - F(a_i)) + F(b_{i_0}) - F(a_{i_0}) = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) \quad \diamond \end{aligned}$$

Bevis for subadditiviteten. Da F er højrekontinuert og voksende, fås ved et 'kompakthedsargument' (se Heine-Borel nedenfor), at der for givet $\epsilon > 0$ eksisterer et $b_i^\epsilon > b_i$ og $1 \leq n_\epsilon < \infty$, så at

$$F(b_i^\epsilon) \leq F(b_i) + \epsilon/2^i \text{ for alle } i \text{ og } [a + \epsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon}]a_i, b_i^\epsilon[.$$

Ved brug af ovenstående Lemma gælder derfor

$$F(b) - F(a + \epsilon) \leq \sum_{i=1}^{n_\epsilon} (F(b_i^\epsilon) - F(a_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) + \epsilon,$$

og dermed $F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i))$ ved grænseovergang $\epsilon \downarrow 0$. \diamond

Vi har hermed vist flg. vigtige eksistenssætning.

Sætning 13 For enhver voksende højrekontinuert funktion $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ findes der et mål λ_F på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, kaldet Lebesgue-Stieltjes målet hørende til F , bestemt ved

$$\lambda_F(]a, b]) = F(b) - F(a) \text{ for alle } a < b.$$

Specialtilfældet $F(x) = x$ svarer til det en-dimensionale Lebesgue mål λ_1 .

Vi gjorde i beviset brug af flg. resultat.

Proposition 16 Heine-Borel.

Hvis $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[$ findes der et $n \geq 1$ så at $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[$.

Bevis. Hvis påstanden ikke holder, kan vi for ethvert n vælge et punkt x_n , så at

$$x_n \in [a, b] \text{ og } x_n \notin \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[.$$

Hvert af intervallerne $]a_i, b_i[$ indeholder derfor højst endelig mange x_n 'er. Men da $[a, b]$ er lukket og begrænset, eksisterer der en delfølge $(n_k)_{k \geq 1}$, så at $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in [a, b]$, og der findes derfor et interval $]a_{i_0}, b_{i_0}[$, som indeholder x_∞ , og dermed, da $]a_{i_0}, b_{i_0}[$ er åben, x_{n_k} 'erne fra et vist trin at regne. Dette er en klar modstrid, og sætningen er hermed vist. \diamond

I forbindelse med fordelingsmål har man ofte brug for at vide, om et Lebesgue-Stieltjes mål λ_F hørende til en voksende højrekontinuert funktion F er absolut kontinuert m.h.t. Lebesgue målet λ_1 , eller ækvivalent, da målene er σ -endelige, om λ_F er satureret m.h.t. λ_1 . Da punkter er λ_1 -nulmængder og

$$\lambda_F(\{x\}) = F(x) - F(x-) \text{ for alle } x \in \mathbf{R},$$

skal F i det mindste være kontinuert for at absolut kontinuitet kan komme på tale, og vi vil derfor i det følgende antage, at F er kontinuert.

Udnyttes at $] - n, n [\uparrow \mathbf{R}$ ses, at

$$\lambda_F \ll \lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_{F,n} \ll \lambda_{1,n} \text{ for alle } n \geq 1,$$

hvor $\lambda_{F,n}$ og $\lambda_{1,n}$ er restriktionen af λ_F og λ_1 til intervallet $] -n, n [$. Da disse mål alle er endelige, viser Proposition 4, at $\lambda_F \ll \lambda_1$ hvis og kun hvis enhver begrænset åben mængde U har lille λ_F -mål, hvis dens λ_1 -mål er tilstrækkeligt lille. Men som vist i Appendiks C er enhver begrænset åben delmængde af den reelle akse en højst tællelig disjunkt forening af åbne intervaller, og der gælder derfor flg. kriterium for absolut kontinuitet.

Lebesgue-Stieltjes målet λ_F hørende til en voksende kontinuert funktion F er absolut kontinuert m.h.t. λ_1 , d.v.s. $\lambda_F \ll \lambda_1$, hvis og kun hvis

$$\forall n \geq 1 \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \sum_{i \geq 1} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i \geq 1} (F(b_i) - F(a_i)) < \epsilon$$

for enhver følge $(] a_i, b_i [)_{i \geq 1}$ af disjunkte intervaller alle indeholdt i $] -n, n [$.

Men vi er også interesseret i at kende en eventuel tæthed. Hertil betragtes funktionsfølgen $(f_n)_{n \geq 1}$ defineret ved

$$f_n(x) := n(F(x + 1/n) - F(x)) \quad x \in \mathbf{R}.$$

f_n 'erne er da kontinuerte og ikke-negative og udnyttes, at Lebesgue målet er translationsinvariant, fås for alle $n \geq 1$ og alle reelle tal $a < b$, at

$$\int_a^b f_n(x) dx = n \left(\int_{a+1/n}^{b+1/n} F(x) dx - \int_a^b F(x) dx \right)$$

og dermed

$$\int_a^b f_n(x) dx = n \left(\int_b^{b+1/n} F(x) dx - \int_a^{a+1/n} F(x) dx \right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} F(b) - F(a).$$

Dette viser umiddelbart implikation:

$$\lim_n f_n \text{ eksisterer i } L^1(\lambda_1) \Rightarrow \lambda_F \ll \lambda_1.$$

Ud fra f_n 'erne defineres som i Lemma 5 funktionen f_∞ ved fastsættelsen

$$f_\infty(x) := \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{hvis denne eksisterer i } \mathbf{R} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

Vi kan nu formulere flg. resultat. Husk at F er forudsat kontinuert.

Proposition 17 $\lim_n f_n(x)$ eksisterer i \mathbf{R} for λ_1 -n.a. x , d.v.s. $f_n \rightarrow f_\infty$ λ_1 -n.o., og λ_F er absolut kontinuert m.h.t. λ_1 med tæthed f_∞ hvis og kun hvis

$$\int_{-k}^k f_\infty d\lambda_1 = F(k) - F(-k) \quad \text{for vilkårligt store } k,$$

eller ækvivalent, hvis $\lambda_F(\mathbf{R}) < \infty$,

$$\int_{\mathbf{R}} f_\infty d\lambda_1 = \lambda_F(\mathbf{R}).$$

I beviset benyttes flg. dybe resultat, som vi ikke viser.

A : Enhver kontinuert voksende funktion $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ er differentiabel λ_1 -n.o.

Bevis for Proposition 17. Eksistensen af $\lim_n f_n$ i \mathbf{R} λ_1 -n.o. er en konsekvens af A, og da 'kun hvis'-delen er åbenbar, koncentrerer vi os om 'hvis'-delen.

Lad μ betegne målet $f_\infty d\lambda_1$. Ved brug af Fatou's lemma har vi, hvis $I_{a,b}$ er et endeligt interval med venstre og højre endepunkt lig a og b , at

$$\mu(I_{a,b}) = \int_a^b f_\infty d\lambda_1 \leq \lim_n \int_a^b f_n d\lambda_1 = F(b) - F(a) = \lambda_F(I_{a,b}) < \infty.$$

D.v.s. $\mu(I) \leq \lambda_F(I)$ på ethvert endeligt interval, men da de pr. antagelse stemmer overens på intervaller af formen $[-k, k]$ for vilkårligt store k , følger ved additivitet, at de stemmer overens på alle endelige intervaller. Ifølge Proposition 2 er derfor $\mu = \lambda_F$, d.v.s. λ_F er absolut kontinuert m.h.t. λ_1 med tæthed f_∞ . \diamond

Det er måske på sin plads at nævne, at hvis Lebesgue-Stieltjes målet λ_F er absolut kontinuert m.h.t. λ_1 , så er f_∞ en tæthed. Dette er en direkte konsekvens af flg. variant af resultat A.

B : Lad $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ være en Borel funktion, som er integrabel m.h.t. λ_1 over ethvert endeligt interval. Da er for ethvert $a \in \mathbf{R}$ funktionen

$$\Phi_a : r \mapsto \int_a^r f(x) \lambda_1(dx) \quad r \geq a$$

differentiabel i t med $\Phi'_a(t) = f(t)$ for λ_1 -n.a. $t > a$.

I mange sammenhænge er flg. resultat vigtigt. Beviset udelades.

Proposition 18 *Lad F være en kontinuert voksende funktion. Da er $\lambda_F \ll \lambda_1$, hvis $t \mapsto F(t)$ er differentiabel i ethvert punkt i en mængde $D \subseteq \mathbf{R}$, hvor $\mathbf{R} \setminus D$ er højst tællelig; og i givet fald er*

$$t \mapsto F'(t) \cdot \mathbf{1}_D(t)$$

en tæthed.

Betragt igen $\mathcal{G} = \{]a, b] \mid -\infty < a \leq b < \infty \}$ og $\lambda(]a, b]) := b - a$. Ifølge Carathéodory's Sætning er det tilhørende ydre mål λ^* et σ -additivt mål på $\mathcal{M}(\lambda^*)$, og som hovedsætningen viser, er

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{M}(\lambda^*) \quad \text{og} \quad \lambda^* = \lambda_1 \text{ på } \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

Dette giver anledning til flg. spørgsmål.

Er $\mathcal{M}(\lambda^*)$ større end $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ og i givet fald hvor meget ?

For at besvare dette vises først identiteten

$$\mathcal{N}_{\lambda_1} = \{A \subseteq \mathbf{R} \mid \lambda^*(A) = 0\}.$$

Bevis. $A \in \mathcal{N}_{\lambda_1} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) : A \subseteq B$ og $\lambda_1(B) = 0$. Men λ^* er voksende og lig λ_1 på $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, d.v.s.

$$0 \leq \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) = 0.$$

Antag omvendt at $\lambda^*(A) = 0$. Pr. definition af λ^* findes der for ethvert n en følge $(G_{kn})_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R})$, så at

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{kn} \quad \text{og} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(G_{kn}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_{kn}) < 1/n,$$

d.v.s., hvis $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{kn}$, så er $A \subseteq B$ og B en Borel mængde, og da

$$\lambda_1(B) \leq \inf_n \lambda_1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{kn}\right) \leq \inf_n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(G_{kn}) = 0$$

er $A \in \mathcal{N}_{\lambda_1}$. ◇

Vi kan nu give en 'nøjagtig' beskrivelse af $\mathcal{M}(\lambda^*)$.

Proposition 19 $\mathcal{M}(\lambda^*) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbf{R}) \cup \mathcal{N}_{\lambda_1})$ og for ethvert $B \in \mathcal{M}(\lambda^*)$ findes der Borel mængder B' og B'' , så at

$$B' \subseteq B \subseteq B'' \quad \text{og} \quad \lambda_1(B'' \setminus B') = 0;$$

d.v.s. $B'' \setminus B \in \mathcal{N}_{\lambda_1}$ og $\lambda^*(B) = \lambda_1(B') = \lambda_1(B'')$.

Bemærkning. Resultatet viser specielt, at $\mathcal{M}(\lambda^*)$ er lukket under translation, og at λ^* er translationsinvariant.

Korollar For ethvert $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, som er målelig m.h.t. $(\mathcal{M}(\lambda^*), \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, findes der funktioner f_1 og f_2 i $\mathcal{M}(\mathbf{R})$, så at

$$f_1 \leq f \leq f_2 \quad \text{og} \quad f_1 = f_2 \quad \lambda_1\text{-n.o.}$$

Bevis. Korollaret er åbenbart for simple funktioner, og fås derfor generelt via Lemma 6 og linearitet. Detaljerne overlades til læseren. Bemærkningen efter Carathéodory's Sætning og ligheden $\mathcal{N}_{\lambda_1} = \{A \subseteq \mathbf{R} \mid \lambda^*(A) = 0\}$ viser, at $\mathcal{N}_{\lambda_1} \subseteq \mathcal{M}(\lambda^*)$ og dermed

$$\sigma(\mathcal{B}(\mathbf{R}) \cup \mathcal{N}_{\lambda_1}) \subseteq \mathcal{M}(\lambda^*).$$

Lad $B \in \mathcal{M}(\lambda^*)$ være givet. Definer for $n \geq 1$ $B_n := B \cap I_n$, hvor $I_n :=] - n, n[$. Da $\lambda^*(B_n) < \infty$ for alle n , findes der pr. definition af λ^* for ethvert k en følge $(G_{ik}^n)_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R})$, så at

$$B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ik}^n \subseteq I_n \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1(G_{ik}^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(G_{ik}^n) < \lambda^*(B_n) + 1/k.$$

D.v.s.

$$B_n'' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ik}^n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \text{ og } B_n \subseteq B_n'' \subseteq I_n$$

samt

$$\lambda^*(B_n'') = \lambda_1(B_n'') \leq \inf_k \lambda_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ik}^n\right) \leq \inf_k \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1(G_{ik}^n) = \inf_k \left(\lambda^*(B_n) + \frac{1}{k}\right) = \lambda^*(B_n)$$

og dermed, da $B_n \in \mathcal{M}(\lambda^*)$, ligheden

$$\lambda^*(B_n'' \setminus B_n) = \lambda^*(B_n'') - \lambda^*(B_n) = 0.$$

Tilsvarende eksisterer der en Borel mængde $\tilde{B} \subseteq I_n$, så at

$$I_n \setminus B_n \subseteq \tilde{B} \text{ og } \lambda^*(\tilde{B}) = \lambda^*(I_n \setminus B_n).$$

$B_n' := I_n \setminus \tilde{B}$ er derfor en Borel mængde indeholdt i B_n , og da

$$\lambda_1(I_n) = \lambda^*(I_n) = \lambda^*(B_n) + \lambda^*(I_n \setminus B_n)$$

da $B_n \in \mathcal{M}(\lambda^*)$ samt

$$\lambda_1(I_n) = \lambda_1(\tilde{B}) + \lambda_1(I_n \setminus \tilde{B}) = \lambda^*(I_n \setminus B_n) + \lambda_1(B_n')$$

ses at

$$\lambda^*(B_n') = \lambda_1(B_n') = \lambda^*(B_n).$$

Definer nu Borel mængder B' og B'' ved

$$B' := \bigcup_n B_n' \text{ og } B'' := \bigcup_n B_n''.$$

Pr. konstruktion er $B' \subseteq B \subseteq B''$, og da

$$B \setminus B' = \bigcup_n (B_n \setminus B_n') \subseteq \bigcup_n (B_n \setminus B_n'') \text{ og } B'' \setminus B = \bigcup_n (B_n'' \setminus B) \subseteq \bigcup_n (B_n'' \setminus B_n)$$

ses, at

$$\lambda^*(B'' \setminus B) \leq \sum_n \lambda^*(B_n'' \setminus B_n) = 0,$$

og tilsvarende at $\lambda^*(B \setminus B') = 0$. Ved addition fås derfor, at $\lambda_1(B'' \setminus B') = 0$ og dermed

$$B = B'' \setminus (B'' \setminus B) \in \sigma(\mathcal{B}(\mathbf{R}) \cup \mathcal{N}_{\lambda_1})$$

samt

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B'') = \lambda_1(B'') = \lambda_1(B'). \quad \diamond$$

Proposition 19 samt tilhørende korollar gælder ikke kun for Lebesgue målet, men generaliserer uændret til ethvert σ -endeligt mål.

Mængdesystemet $\mathcal{M}(\lambda^*)$, som i modsætning til $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ikke er tællelig frembragt, omtales som de *Lebesgue målelige* mængder. Det indeholder ikke alle delmængder af den reelle akse, d.v.s. $\mathcal{M}(\lambda^*)$ er ikke lig $2^{\mathbf{R}}$, og Lebesgue målet kan ikke udvides til et σ -additivt mål på hele $2^{\mathbf{R}}$. Denne umulighed er den væsentligste grund til, at vi er tvunget til at indføre begrebet σ -algebra. Et 'simpelt' eksempel på en ikke Lebesgue målelig mængde kan ved brug af det såkaldte *Udvalgsaksiom* konstrueres på flg. måde.

Lad \tilde{M} betegne mængdesystemet $(r + \mathbf{Q})_{r \in \mathbf{R}}$, hvor \mathbf{Q} betegner de rationale tal. Da \mathbf{Q} er stabil under differens, er elementerne i dette mængdesystem enten disjunkte eller ens, d.v.s.

$$(r_1 + \mathbf{Q}) \cap (r_2 + \mathbf{Q}) \neq \emptyset \Rightarrow (r_1 + \mathbf{Q}) = (r_2 + \mathbf{Q}),$$

og da \mathbf{Q} er tæt i \mathbf{R} , er $(r + \mathbf{Q}) \cap]0, 1[\neq \emptyset$ for ethvert $r \in \mathbf{R}$. Det har derfor mening (tænk over dette, her bruges Udvalgsaksiomet) at betragte en mængde M med flg. egenskaber

$$M \subseteq]0, 1[\quad \text{og} \quad \#(M \cap \tilde{m}) = 1 \quad \text{for alle } \tilde{m} \in \tilde{M},$$

d.v.s. M indeholder præcist et punkt fra hver af mængderne i \tilde{M} . Det er nu klart, at der gælder.

- 1) For ethvert $r \in \mathbf{R}$ findes der et $r_M \in M$ så at $r - r_M \in \mathbf{Q}$.
- 2) $r_1 - r_2 \in \mathbf{Q}^c$ for ethvert par af forskellige elementer r_1, r_2 i M .

Ved brug af 1) ses at

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbf{Q} \cap [-1, 1]} (q + M) \subseteq [-1, 2],$$

og ifølge 2) er $q_1 + M$ og $q_2 + M$ disjunkte, hvis q_1 og q_2 er forskellige rationale tal. Heraf følger nu, at M ikke er Lebesgue målelig. For hvis M og derfor også $q + M$ er Lebesgue målelig, skal den fælles værdi $a := \lambda^*(M) = \lambda^*(q + M)$ være positiv, da $\lambda^*([0, 1]) = 1$, og samtidigt skal $na \leq \lambda^*([-1, 2]) = 3$ for alle n , hvilket klart er umuligt.

Lebesgue målet på \mathbf{R}^n .

På grund af Lebesgue målets store betydning skal vi i dette afsnit se nærmere på målene λ_n . Som allerede nævnt er de alle translationsinvariante, og som næste resultat viser, er denne egenskab fundamental for Lebesgue målene.

Lemma 16 *Lad m betegne et translationsinvariant mål på $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, hvis værdi på enhver begrænset n -dimensional kasse er endelig. Da er*

$$m = c_m \cdot \lambda_n \quad \text{hvor } c_m = m([0, 1]^n).$$

Bevis. Lad for ethvert $k \geq 1$ $(D_i^k)_{i \geq 1}$ være en nummerering af de akseparallelle dyadisk rationale kasser med kantlængde 2^{-k} , d.v.s. alle kasser af formen

$$\prod_{j=1}^n [(i_j - 1)/2^k, i_j/2^k] \quad \text{hvor } i_1, \dots, i_n \in \mathbf{Z}.$$

Bemærk at $(D_i^k)_{i \geq 1}$ 'erne for ethvert k udgør en tællelig partition af \mathbf{R}^n . Translationsinvariansen betyder, at tallene $m(D_i^k)$ og $\lambda_n(D_i^k)$ kun afhænger af k , d. v.s. er uafhængige af i . Men da $[0, 1]^n$, som har λ_n -mål 1, er en disjunkt forening af 2^{kn} D_i^k 'er, betyder dette, at

$$m(D_i^k) = c_m \cdot \lambda_n(D_i^k) \quad \text{for alle } i, k \geq 1,$$

og dermed $m = c_m \cdot \lambda_n$ ifølge Proposition 2, da $\{D_i^k \mid i, k \geq 1\} \cup \{\emptyset\}$ ifølge Øvelse 3 er stabil under endelig gennemsnit og frembringer $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. Det sidste følger af, at enhver åben mængde er en foreningsmængde af visse af D_i^k 'erne. \diamond

Ud fra Lemma 16 kan vi nu vise den såkaldte *lineære transformationssætning*.

Proposition 20 *Hvis $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ er på formen $\underline{x} \mapsto T(\underline{x}) = \underline{x}_0 + T_1(\underline{x})$, hvor $\underline{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ og T_1 er en lineær bijektion af \mathbf{R}^n på \mathbf{R}^n , er*

$$\lambda_{n,T} := \lambda_n \circ T^{-1} = \frac{1}{|\det T_1|} \cdot \lambda_n.$$

Bevis. For ethvert $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ og $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ er

$$T^{-1}(A + \underline{x}) = T_1^{-1}(A + \underline{x} - \underline{x}_0) = T_1^{-1}(A) + \tilde{\underline{y}} \quad \text{hvor } T_1(\tilde{\underline{y}}) = \underline{x} - \underline{x}_0,$$

og dermed da λ_n er translationsinvariant

$$\lambda_{n,T}(A + \underline{x}) = \lambda_{n,T_1}(A) \quad \text{for alle } \underline{x} \in \mathbf{R}^n \text{ og } A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n).$$

D.v.s. $\lambda_{n,T}$ er translationsinvariant og $\lambda_{n,T} = \lambda_{n,T_1}$. Vi kan og vil derfor antage, at $T = T_1$, d.v.s. at T er en lineær bijektion, og da $\lambda_{n,T} = \lambda_{n,T}([0, 1]^n) \cdot \lambda_n$

ifølge Lemma 16, mangler vi kun at vise, at konstanten $c_T := \lambda_{n,T}([0, 1]^n)$ er lig $1/|\det T|$. Dette er let, hvis T er en multiplikationsafbildning, d.v.s. på formen

$$T(\underline{x}) = (d_1 \cdot x_1, \dots, d_n \cdot x_n) \quad \text{for } \underline{x} = (x_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbf{R}^n,$$

hvor d_1, \dots, d_n er givne strengt positive reelle tal. Thi her er

$$T^{-1}([0, 1]^n) = \prod_{i=1}^n [0, d_i^{-1}]$$

og dermed

$$c_T = \lambda_{n,T}([0, 1]^n) = \prod_{i=1}^n d_i^{-1} = \frac{1}{\det T} = \frac{1}{|\det T|}.$$

Beregningen af c_T for en generel lineær bijektion udnytter udover produktformlen

$$c_{T_1 \circ T_2} = c_{T_1} \cdot c_{T_2},$$

som let verificeres ved brug af reglerne for billedmål dannelse, at der ifølge teorien om positive selvadjungerede afbildninger til enhver lineær bijektion T findes en lineær isometri O og en multiplikationsafbildning D af ovennævnte type, så at

$$O^{-1} \circ T^* \circ T \circ O = D \quad \text{og dermed } T^* \circ T = A \circ A,$$

hvor $A := O \circ \sqrt{D} \circ O^{-1}$, og notationen $*$ betegner den adjungerede lineære afbildning. A er altså en selvadjungeret lineær bijektion og $c_A = c_{\sqrt{D}}$. Ifølge regneregler for determinanter gælder derfor, at

$$\det A = \det \sqrt{D} = \sqrt{\det D} = \sqrt{\det T^* \cdot \det T} = |\det T|,$$

og da $\lambda_{n,T} = c_T \cdot \lambda_n$ og $\lambda_{n,A} = c_A \cdot \lambda_n$ fås, idet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er det indre produkt i \mathbf{R}^n ,

$$\begin{aligned} c_T \int e^{-\langle x, x \rangle} \lambda_n(dx) &= \int e^{-\langle T(x), T(x) \rangle} \lambda_n(dx) = \int e^{-\langle T^* \circ T(x), x \rangle} \lambda_n(dx) \\ &= \int e^{-\langle A \circ A(x), x \rangle} \lambda_n(dx) = \int e^{-\langle A(x), A(x) \rangle} \lambda_n(dx) = c_A \int e^{-\langle x, x \rangle} \lambda_n(dx) \end{aligned}$$

og dermed ved forkortning, da integralet er endeligt, at

$$c_T = c_A = c_{\sqrt{D}} = 1/\det \sqrt{D} = 1/|\det T|.$$

Proposition 20 er hermed vist. ◇

Ved brug af Tonelli's Sætning ses umiddelbart, at

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle x, x \rangle} \lambda_n(dx) = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}} e^{-x_i^2} \lambda_1(dx_i) = \pi^{n/2},$$

og beregnes integralet ligeledes ved hjælp af integrationsformlen

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle x, x \rangle} \lambda_n(dx) = \int_0^\infty \lambda_n(e^{-\langle \cdot, \cdot \rangle} > t) dt = \int_0^1 \lambda_n(b(\underline{0}, \sqrt{\log 1/t})) dt$$

fås ved hjælp af Proposition 20, at

$$\pi^{n/2} = \lambda_n(b(\underline{0}, 1)) \int_0^1 (\log 1/t)^{n/2} dt = \lambda_n(b(\underline{0}, 1)) \int_0^\infty x^{n/2} \cdot e^{-x} dx,$$

d.v.s. for alle $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ og alle $r > 0$ gælder

$$\lambda_n(b(\underline{x}, r)) = \lambda_n(b(\underline{0}, r)) = r^n \cdot \lambda_n(b(\underline{0}, 1)) = \frac{\pi^{n/2} \cdot r^n}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

Vi afslutter kapitlet med at formulere og bevise en meget vigtig udvidelse af den lineære transformationssætning. Resultatet kan generaliseres yderligere, se f.eks. Hoffmann's bind II for en mere generel udgave.

Sætning 14 Transformationssætningen.

Lad U og V betegne to åbne mængder i \mathbf{R}^n , og lad $T : U \rightarrow V$ være en bijektion af klasse C^1 , hvorom det yderligere antages, at

$$|\det T'(x)| > 0 \quad \text{for alle } x \in U.$$

Idet S betegner T^{-1} , gælder flg. formel

$$\lambda_{U,T} \ll \lambda_V \quad \text{og} \quad \frac{d\lambda_{U,T}}{d\lambda_V}(\cdot) = |\det T'(S(\cdot))|^{-1},$$

hvor λ_U og λ_V betegner restriktionen af λ_n til h.h.v. U og V , og $\lambda_{U,T}$ er billedmålet af λ_U under afbildningen T . Udtrykt ved hjælp af integraler gælder altså

$$\int_U f(T(x)) \lambda_n(dx) = \int_V \frac{f(y)}{|\det T'(S(y))|} \lambda_n(dy)$$

for alle $f \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}^n))_+$.

Ifølge den såkaldte *open mapping theorem* er S af samme type som T , d.v.s. S er en bijektion af klasse C^1 af V på U og $|\det S'(y)| > 0$ for alle $y \in V$.

Bevis for sætningen. Vi skal vise, at

$$\lambda_{U,T}(B) = \int_B |\det T'(S(y))|^{-1} \lambda_V(dy) \quad \text{for alle } B \in \mathcal{B}(V).$$

Men ifølge symmetrien mellem S og T er det nok at vise \leq . Thi antag dette vist for enhver afbildning af nævnte type, d.v.s. specielt både for S og T .

For ethvert $A \in \mathcal{B}(U)$ har vi da

$$\lambda_U(A) = \lambda_{U,T}(S^{-1}(A)) \leq \int_{S^{-1}(A)} |\det T'(S(y))|^{-1} \lambda_V(dy)$$

$$\begin{aligned}
&= \int |\det T'(S(y))|^{-1} \cdot \mathbf{1}_A(S(y)) \lambda_V(dy) = \int |\det T'(x)|^{-1} \cdot \mathbf{1}_A(x) \lambda_{V,S}(dx) \\
&\leq \int |\det T'(x)|^{-1} \cdot \mathbf{1}_A(x) \cdot |\det S'(T(x))|^{-1} \lambda_U(dx) \\
&= \int \mathbf{1}_A(x) \cdot |\det(S \circ T)'(x)|^{-1} \lambda_U(dx) = \lambda_U(A),
\end{aligned}$$

d.v.s. der må gælde lighedstegn hele vejen. Opgaven består derfor i at vise, at

$$\lambda_{U,T}(B) \leq \int_B |\det T'(S(y))|^{-1} \lambda_V(dy) \text{ for alle } B \in \mathcal{B}(V).$$

Da begge sider definerer mål, som er endelige på enhver lukket begrænset mængde K indeholdt i V , viser resultatet angående ydre regularitet af Borel mål, at det er tilstrækkeligt at betragte åbne mængder, d.v.s. vise, at

$$\lambda_{U,T}(O) \leq \int_O |\det T'(S(y))|^{-1} \lambda_V(dy) \text{ for alle } O \subseteq V \text{ åben.}$$

Men enhver sådan åben delmængde af V kan skrives som en tællelig disjunkt foreningsmængde af akseparallelle dyadiske kasser, og beviset er derfor ført, hvis vi for enhver akseparallel dyadisk kasse $D_{i_0, k_0} \subseteq V$ viser, at

$$\lambda_{U,T}(D_{i_0, k_0}) \leq \int_{D_{i_0, k_0}} |\det T'(S(y))|^{-1} \lambda_V(dy).$$

Lad D_{i_0, k_0} være valgt. For ethvert $k \geq k_0$ er

$$D_{i_0, k_0} = \bigcup_{i: (i, k) \in J(i_0, k_0)} D_{i, k}$$

hvor $J(i_0, k_0) = \{(i, k) \mid D_{i, k} \subseteq D_{i_0, k_0}\}$, og de indgående kasser er disjunkte. Definer nu for $k \geq k_0$

$$f_k := \sum_{i: (i, k) \in J(i_0, k_0)} \frac{\lambda_{U,T}(D_{i, k})}{\lambda_V(D_{i, k})} \cdot \mathbf{1}_{D_{i, k}}.$$

Bemærk at

$$\lambda_{U,T}(D_{i_0, k_0}) = \int_{D_{i_0, k_0}} f_k d\lambda_V \text{ for alle } k \geq k_0.$$

Vi ønsker at vise, at $\lim_k f_k$ eksisterer i $L^2(\lambda_V)$. Men da $f_l \perp (f_{k+1} - f_k)$ pr. konstruktion for alle $k_0 \leq l \leq k$ vides fra korollaret til Lemma 13, at det er tilstrækkeligt at vise, at $\{f_k \mid k \geq k_0\}$ udgør en begrænset delmængde af $L^2(\lambda_V)$. Hertil får vi brug for flg. vurderinger.

Lad for ethvert i og k $y_{i, k}$ betegne 'centrum' i kassen $D_{i, k}$. Da T er kontinuert differentiabel, findes der en følge af ikke-negative reelle tal (ϵ_k) , som konvergerer mod 0, så at

$$|T(S(y)) - T(S(y_{i, k})) - T'(S(y_{i, k})) \cdot (S(y) - S(y_{i, k}))| \leq \epsilon_k \cdot |y - y_{i, k}|$$

for alle (i, k) i $J(i_0, k_0)$ og alle $y \in D_{i,k}$. D.v.s. da $S = T^{-1}$, at

$$T^{-1}(D_{i,k}) = S(D_{i,k}) \subseteq T_{i,k}^{-1}(D_{i,k} + c_n \cdot \epsilon_k \cdot 2^{-k} \cdot K),$$

hvor c_n er en konstant, som kun afhænger af n , K terningen $] -1/2, 1/2]^n$ og $T_{i,k}$ afbildningen fra \mathbf{R}^n ind i sig selv givet ved

$$T_{i,k}(x) := T(S(y_{i,k})) + T'(S(y_{i,k})) \cdot (x - S(y_{i,k})).$$

Bemærk at $T_{i,k}$ 'erne er afbildninger af den type, som indgik i Proposition 20. Benyttes nu dette resultat, fås for ethvert $(i, k) \in J(i_0, k_0)$ vurderingen

$$\begin{aligned} \lambda_{U,T}(D_{i,k})/\lambda_V(D_{i,k}) &\leq \lambda_{n,T_{i,k}}(D_{i,k} + \epsilon_k \cdot 2^{-k} \cdot K)/2^{-nk} \\ &\leq |\det T'(S(y_{i,k}))|^{-1} \cdot (2^{-k} + c_n \cdot \epsilon_k \cdot 2^{-k})^n \cdot 2^{nk}. \end{aligned}$$

D.v.s. for alle $k \geq k_0$ gælder uligheden

$$f_k \leq \sum_{i:(i,k) \in J(i_0, k_0)} (1 + c_n \cdot \epsilon_k)^n \cdot |\det T'(S(y_{i,k}))|^{-1} \cdot \mathbf{1}_{D_{i,k}},$$

og derfor $f_k \leq c \cdot \mathbf{1}_{D_{i_0, k_0}}$ for alle $k \geq k_0$ for en konstant c . Følgen $(f_k)_{k \geq k_0}$ er altså begrænset og dermed konvergent i $L^2(\lambda_V)$ med grænseværdi f_∞ .

Ifølge Proposition 10 findes der en delfølge $(f_{n_k})_{k \geq 1}$, som konvergerer λ_V -n.o. mod f_∞ , og lader vi $k \rightarrow \infty$ i ovenstående ulighed samt udnytter at $\epsilon_k \rightarrow 0$ tillige med kontinuiteten af

$$y \mapsto |\det T'(S(y))|^{-1},$$

fås at

$$f_\infty \leq |\det T'(S(\cdot))|^{-1} \cdot \mathbf{1}_{D_{i_0, k_0}} \quad \lambda_V\text{-n.o.}$$

Men som tidligere vist, er skalarproduktet i $L^2(\lambda_V)$ kontinuert, d.v.s.

$$\int_{D_{i_0, k_0}} f_\infty d\lambda_V = \int f_\infty \cdot \mathbf{1}_{D_{i_0, k_0}} d\lambda_V = \lim_k \int f_k \cdot \mathbf{1}_{D_{i_0, k_0}} d\lambda_V = \lambda_{U,T}(D_{i_0, k_0})$$

og derfor

$$\lambda_{U,T}(D_{i_0, k_0}) \leq \int_{D_{i_0, k_0}} |\det T'(S(y))|^{-1} \lambda_V(dy).$$

Sætningen er hermed vist. ◇

Transformation af tætheder.

Ved brug af resultaterne i sidste afsnit kan man i 'pæne' situationer løse problemet vedrørende bestemmelse af fordelingen af en transformation af en given variabel med en kendt tæthed. Thi lad $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ betegne en stokastisk vektor, som er absolut kontinuert m.h.t. λ_n med tæthed f , d.v.s. for alle $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ er

$$P_{\underline{X}}(A) = P(\underline{X} \in A) = \int_A f d\lambda_n.$$

Man er nu ofte interesseret i en transformation af \underline{X} , d.v.s. en stokastisk vektor \underline{Y} af formen $T(\underline{X})$, hvor $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ er en given målelig afbildning. Da vi ønsker at beskrive en situation, hvor \underline{Y} igen har tæthed, vil vi antage, at T opfylder følgende betingelse:

$$\exists U \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) : P_{\underline{X}}(U) = 1 \text{ og } \exists S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ målelig: } S(T(\underline{x})) = \underline{x}, \underline{x} \in U.$$

Bemærk at betingelsen specielt er opfyldt, hvis T er en bijektion med en målelig invers, f.eks. hvis T er en affin bijektion, thi her kan $U = \mathbf{R}^n$ og $S = T^{-1}$ bruges.

Antagelsen og regneregler for billedmål sikrer for ethvert $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$, at

$$P_{\underline{Y}}(A) = P(\underline{Y} \in A) = P_{\underline{X}}(T^{-1}(A)) = P_{\underline{X}}(T^{-1}(A) \cap U) \\ \int_{T^{-1}(A) \cap U} f d\lambda_n = \int f(S \circ T) \cdot \mathbf{1}_A(T) d\lambda_{n,U} = \int_A f(S) d(\lambda_{n,U} \circ T^{-1}),$$

d.v.s. $P_{\underline{Y}}$ har tæthed $\underline{y} \mapsto f(S(\underline{y}))$ m.h.t. billedmålet $\lambda_{n,U} \circ T^{-1}$.

Det er derfor afgørende, om vi under de ovenstående betingelser på U og T er i stand til at bestemme $\lambda_{n,U} \circ T^{-1}$. Dette er f.eks. muligt, hvis T er en affin bijektion, d.v.s.

$$T : \underline{x} \mapsto \underline{a} + L(\underline{x}),$$

hvor $\underline{a} \in \mathbf{R}^n$ og L er en lineær bijektion i \mathbf{R}^n . Thi da T^{-1} her eksisterer som en kontinuert og derfor målelig funktion, kan U vælges lig \mathbf{R}^n , og da

$$\lambda_{n,U} \circ T^{-1} = \lambda_n \circ T^{-1} = |\det L|^{-1} \cdot \lambda_n$$

ifølge Proposition 20, viser dette, at $\underline{Y} = T(\underline{X})$ har tæthed (m.h.t. λ_n)

$$\underline{y} \mapsto |\det L|^{-1} \cdot f(T^{-1}(\underline{y})).$$

En simpel men vigtig anvendelse af den lineære transformationsætning viser, at hvis X_1, \dots, X_n er uafhængige $N(0, 1)$ -variable og T en lineær bijektion på \mathbf{R}^n , så er for ethvert $\underline{\mu} \in \mathbf{R}^n$

$$Y := \underline{\mu} + T(\underline{X}),$$

hvor $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$, absolut kontinuert med tæthed givet ved

$$\underline{y} \mapsto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \underline{\sigma}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (y_i - \mu_i) \underline{\sigma}^{-1}(i, j) (y_j - \mu_j) \right) \quad \underline{y} \in \mathbf{R}^n,$$

hvor $\underline{\sigma}$ er $n \times n$ -matricen svarende til den lineære afbildning $T \circ T^*$ beregnet m.h.t. den kanoniske basis i \mathbf{R}^n .

Det 'lineære' eksempel er et specialtilfælde af flg. ofte forekommende mere generelle situation, hvor der findes en åben mængde $U \subseteq \mathbf{R}^n$, så at $P_{\underline{X}}(U) = 1$ og

T er injektiv på U af klasse C^1 med $\det T'(\underline{x}) \neq 0$ for alle $\underline{x} \in U$.

I denne situation sikrer den såkaldte *open mapping theorem*, at $V := T(U)$ er en åben mængde i \mathbf{R}^n , samt at afbildningen $S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ defineret ved

$$S(\underline{y}) := T^{-1}(\underline{y}) \quad \underline{y} \in V \quad \text{og} \quad S(\underline{y}) := \underline{0} \quad \underline{y} \notin V$$

er målelig endog af type C^1 på V . Identifikationen af billedmålet $\lambda_{n,U} \circ T^{-1}$ følger af Sætning 14, som viser, at

$$\lambda_{n,U} \circ T^{-1} \ll \lambda_{n,V} \quad \text{med tæthed} \quad \underline{y} \mapsto |\det T'(S(\underline{y}))|^{-1},$$

og vi kan derfor med udgangspunkt i Sætning 14 formulere flg. vigtige resultat.

Transformationssætningen for tætheder.

Lad U, V, T og S være som i Sætning 14 og lad \underline{X} betegne en n -dimensional stokastisk vektor, som er absolut kontinuert m.h.t. λ_n med tæthed f og opfylder $P(\underline{X} \in U) = 1$. Da har $\underline{Y} := T(\underline{X})$ tæthed m.h.t. λ_n givet ved

$$\underline{y} \mapsto |\det T'(S(\underline{y}))|^{-1} \cdot f(S(\underline{y})) \cdot \mathbf{1}_V(\underline{y}).$$

Husk at $V = T(U)$ og at $S(\underline{y})$ for ethvert $\underline{y} \in V$ er bestemt ved identiteterne

$$S(\underline{y}) \in U \quad \text{og} \quad T(S(\underline{y})) = \underline{y}.$$

Resultatet omhandler som nævnt n -dimensionale transformationer. Men ofte kan det med fordel også anvendes ved beregning af tætheden for en situation, hvor T er en 'pæn' transformation med værdier i et lavere dimensionalt rum. Ideen er her at finde en udvidelse $\tilde{T} = (T, T_1) : U \rightarrow \mathbf{R}^n$, hvorpå man kan udnytte ovenstående resultat, og så dernæst at finde tætheden for $T(\underline{X})$, som en marginal i $\tilde{T}(\underline{X})$. T_1 kan naturligvis normalt vælges på mange måder, men man er selvfølgelig interesseret i at vælge den så simpel som muligt.

Sandsynlighedsfelter og stokastiske funktioner.

Som allerede nævnt i indledningen består et sandsynlighedsfelt (Ω, \mathcal{F}, P) af et måleligt rum (Ω, \mathcal{F}) og et sandsynlighedsmål P på (Ω, \mathcal{F}) . Ω kaldes *udfaldsrummet* og elementerne i \mathcal{F} *hændelser*. Værdien $P(A)$ af P på en hændelse A omtales som 'sandsynligheden for, at A indtræffer'.

Ofte er det ikke de enkelte udfald, der er interessante, men snarere en konsekvens heraf, d.v.s. en funktion, hvis værdimængde normalt er \mathbf{R} eller \mathbf{R}^n , men mere generelle rum kan dog forekomme. Sådanne objekter kaldes i teorien stokastiske variable, stokastiske vektorer eller generelt stokastiske funktioner, og de betegnes med store bogstaver X, Y o.s.v. I overensstemmelse med at sandsynlighedsteoretiske modeller beskriver systemer, hvor man forud ikke nøjagtigt kan vide eller beregne, hvilket udfald der indtræffer, er det ikke de funktionsmæssige egenskaber, der har interesse. Det interessante er derimod størrelsen af sandsynlighederne for, at en given stokastisk funktion antager en værdier i en given pæn delmængde af værdimængden, d.v.s. sandsynligheder for forskellige urbilleder. Men da sandsynligheder kun kan tilordnes hændelser, har dette kun mening for \mathcal{F} -målelige funktioner, og det fører derfor til flg. notation.

$X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ kaldes en *stokastisk variabel*, hvis og kun hvis $X \in M(\mathcal{F})$, og en $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$ -målelig afbildning $\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ kaldes en *n -dimensional stokastisk vektor*. Helt generelt kaldes en $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -målelig afbildning Y defineret på Ω med værdier i et måleligt rum (E, \mathcal{E}) en *stokastisk funktion*.

Ved brug af M 6 ses, at $\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ er en n -dimensional stokastisk vektor, hvis og kun hvis \underline{X} er på formen

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n),$$

hvor X_i 'erne er stokastiske variable. Disse kaldes ofte de til \underline{X} hørende *koordinatvariable*.

Måleligheden bevirker, at man til enhver stokastisk funktion Y ved hjælp af billedmålsideen kan tilordne det såkaldte *fordelingsmål* P_Y defineret ved

$$P_Y := P \circ Y^{-1} \text{ d.v.s. } P_Y(A) = P(Y \in A) \quad A \in \mathcal{E}.$$

Y er her en stokastisk funktion med værdier i et måleligt rum (E, \mathcal{E}) . Specielt hvis X og \underline{X} er h.h.v. en stokastisk variabel og en n -dimensional stokastisk vektor, så er P_X og $P_{\underline{X}}$ Borel sandsynlighedsmål på h.h.v. \mathbf{R} og \mathbf{R}^n givet ved

$$P_X(A) = P(X \in A) \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \quad \text{og} \quad P_{\underline{X}}(B) = P(\underline{X} \in B) \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n).$$

Fordelingsmålene indeholder altså præcis den information, vi søger, og man kan derfor med god ret sige, at en stokastisk funktion er fuldstændigt beskrevet ved det tilhørende fordelingsmål.

Ved at kombinere Lemma 3 og Proposition 2 ses, at *fordelingsfunktionerne*

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto F_X(x) := P(X \leq x) \quad \text{og} \quad \mathbf{R}^n \ni \underline{x} \mapsto F_{\underline{X}}(\underline{x}) := P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

entydigt bestemmer fordelingsmålene for en stokastisk variabel X og en n -dimensional stokastisk vektor \underline{X} .

Med udgangspunkt i fordelingsmålene inddeles de stokastiske funktioner i forskellige typer, hvoraf to er specielt vigtige. F.eks. siges en stokastisk variabel X at være *diskret*, hvis der findes en højst tællelig delmængde $E \subseteq \mathbf{R}$, så at

$$P(X \in E) = 1.$$

Fordelingsmålet P_X er i denne situation entydigt bestemt ved den såkaldte *diskrete tæthedsfunktion*

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto P(X = x),$$

idet $P_X = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}$, d.v.s.

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(x_i) \cdot P(X = x_i) (= \sum_{x \in A} P(X = x))$$

for alle $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, hvor $(x_i)_{i \geq 1}$ er en nummerering af E . Begreberne diskrete stokastiske vektorer og funktioner defineres tilsvarende.

Simple egenskaber ved tællelige mængder viser, at hvis \underline{X} er en n -dimensional stokastisk vektor med koordinatvariable X_1, \dots, X_n , så er

$$\underline{X} \text{ diskret} \Leftrightarrow X_i \text{ diskret for } i = 1, \dots, n,$$

og i givet fald gælder for ethvert i og ethvert $x \in \mathbf{R}$, at

$$P(X_i = x) = P(\underline{X} \in E_i^x) = \sum_{\underline{x} \in E_i^x} P(\underline{X} = \underline{x}) \text{ hvor } E_i^x = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n \mid x_i = x\}.$$

D.v.s. de marginale diskrete tæthedsfunktioner fremkommer ud fra den simultane diskrete tæthedsfunktion ved at 'summere de andre variable ud'.

Fordelingsmålet for en diskret stokastiske variabel er singulært m.h.t. Lebesgue målet. I modsætning hertil er den anden type, vi vil omtale, karakteriseret ved, at de tilhørende fordelingsmål er absolut kontinuerte m.h.t. Lebesgue målet. En stokastisk variabel X siges nemlig at være *absolut kontinuert*, hvis

$$P_X \ll \lambda_1$$

og den Radon-Nikodym afledede $dP_x/d\lambda_1$ kaldes i givet fald en *tæthed* for X . Tætheden, der som bekendt er entydig bestemt op til λ_1 -nulmængder, bestemmer oplagt fordelingsmålet for en absolut kontinuert stokastisk variabel.

Det flerdimensionale begreb defineres analogt, men i modsætning til det diskrete tilfælde kan vi her kun slutte

$$\underline{X} \text{ absolut kontinuert} \Rightarrow X_i \text{ absolut kontinuert for } i = 1, \dots, n.$$

hvor \underline{X} er en n -dimensional stokastisk vektor med koordinatvariable X_1, \dots, X_n . Den omvendte implikation er generelt ikke sand, hvilket f.eks. ses ved at betragte en stokastisk vektor af formen (X, X) , hvor X er en absolut kontinuert stokastisk variabel. Men hvis en stokastisk vektor er absolut kontinuert, er det som ovenfor igen muligt at beregne de marginale tætheder ud fra den simultane. Resultatet er et specialtilfælde af flg. mere generelle resultat.

Hvis $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ er absolut kontinuert med tæthed f , så er enhver marginal $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$ også absolut kontinuert, og en tæthed findes ved at integrere de ikke-relevante variable ud.

Nedenstående eksemplificerer bevismetoden. Antag at $\underline{X} = (X_1, \dots, X_5)$ er absolut kontinuert med tæthed f , d.v.s.

$$f \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{B}(\mathbf{R}^5))_+ \quad \text{og} \quad P(\underline{X} \in A) = \int_A f d\lambda_5 \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^5).$$

Definer $\underline{U} := (X_1, X_3, X_5)$. D.v.s. \underline{U} er en 3-dimensional stokastisk vektor, og vi vil nu vise, at den er absolut kontinuert med tæthed

$$f_{\underline{U}}(\underline{u}) := \int f(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3) \lambda_2(dv) \quad \underline{u} \in \mathbf{R}^3.$$

Lemma 9 sikrer at $f_{\underline{U}} \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{B}(\mathbf{R}^3))_+$ og ifølge Proposition 2 mangler vi derfor blot at vise, at

$$P(\underline{U} \in A_1 \times A_2 \times A_3) = \int_{A_1 \times A_2 \times A_3} f_{\underline{U}} d\lambda_3$$

for alle $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Lad A_1, A_2 og A_3 være givet.

$$\begin{aligned} P(\underline{U} \in A_1 \times A_2 \times A_3) &= P(\underline{X} \in A_1 \times \mathbf{R} \times A_2 \times \mathbf{R} \times A_3) \\ &= \int_{A_1 \times \mathbf{R} \times A_2 \times \mathbf{R} \times A_3} f d\lambda_5 = \int \mathbf{1}_{A_1}(x_1) \mathbf{1}_{A_2}(x_3) \mathbf{1}_{A_3}(x_5) f(\underline{x}) \lambda_5(d\underline{x}) \\ &\quad \int \cdots \int \mathbf{1}_{A_1}(x_1) \mathbf{1}_{A_2}(x_3) \mathbf{1}_{A_3}(x_5) f(\underline{x}) \lambda_1(dx_4) \lambda_1(dx_2) \lambda_1(dx_5) \lambda_1(dx_3) \lambda_1(dx_1) \\ &\quad \int \int \int \mathbf{1}_{A_1}(x_1) \mathbf{1}_{A_2}(x_3) \mathbf{1}_{A_3}(x_5) \cdot \left\{ \int \int f(\underline{x}) \lambda_1(dx_4) \lambda_1(dx_2) \right\} \lambda_1(dx_5) \lambda_1(dx_3) \lambda_1(dx_1) \\ &= \int \int \int \mathbf{1}_{A_1}(x_1) \mathbf{1}_{A_2}(x_3) \mathbf{1}_{A_3}(x_5) \cdot f_{\underline{U}}(x_1, x_3, x_5) \lambda_1(dx_5) \lambda_1(dx_3) \lambda_1(dx_1) \\ &= \int_{A_1 \times A_2 \times A_3} f_{\underline{U}} d\lambda_3. \end{aligned}$$

Vi har her op til flere gange udnyttet, at Lemma 9 og Tonelli's sætning, som tidligere nævnt, udvider til produktmål med mere end to marginaler. \diamond

Ved brug af integralteorien indføres endvidere det såkaldte middelværdibegreb, idet en stokastisk variabel X siges at *have middelværdi* h.h.v. *have endelig middelværdi*, hvis

$$X \in L(P) \quad \text{h.h.v.} \quad X \in L^1(P)$$

og i givet fald defineres tallet

$$E[X] := \int X dP$$

og kaldes *middelværdien* af X . For stokastiske variable med endelig middelværdi er middelværdien derfor et reelt tal. Defineret som et abstrakt integral har *middelværdiafbildningen*

$$X \mapsto E[X]$$

de i Sætning 2 nævnte egenskaber. Den eksplicite talværdi er pånær for simple stokastiske variable svær at beregne ud fra definitionsformlen. Men ved brug af den lille transformationsætning ses, at

$$X \in L(P) \text{ h.h.v. } L^1(P) \Leftrightarrow x \mapsto |x| \in L(P_X) \text{ h.h.v. } L^1(P_X)$$

og

$$E[X] = \int_{\mathbf{R}} x P_X(dx),$$

hvis X har middelværdi. Formlen viser, at middelværdiens eksistens og værdi, som ventet, kun afhænger af fordelingsmålet, og den åbner mulighed for en eksplicit beregning. Hvis f.eks. X er absolut kontinuert med tæthed f , er

$$E[X] = \int_{\mathbf{R}} x \cdot f(x) dx,$$

ifølge Sætning 4, og hvis X er diskret, viser Sætning 3 punkt C), at

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbf{R}} x \cdot P(X = x) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i),$$

hvor $(x_i)_{i \geq 1}$ er en følge af reelle tal, så at $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$.

For enhver ikke-negativ stokastisk variabel X gælder ifølge integrationsformlen på side 50 endvidere flg. beregningsformel

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt.$$

Som det er vel kendt fra indledende sandsynlighedsteori tilknytter man til ethvert $B \in \mathcal{F}$ med $P(B) > 0$ sandsynligheds målet

$$P_{|B}(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad A \in \mathcal{F}$$

kaldet det *betingede mål* givet B . Dets værdi på en hændelse A , som normalt betegnes $P(A|B)$, omtales som den *betingede sandsynlighed* for A givet at B er indtruffet. Bemærk at $P(A) = P_{|B}(A)$ hvis og kun hvis A og B er uafhængige.

$P_{|B}$ er som nævnt et sandsynligheds mål på (Ω, \mathcal{F}) , og man kan nu gentage ovenstående definitioner og bemærkninger for sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P_{|B})$. F.eks taler man for en given stokastisk variabel X eller stokastisk vektor \underline{X} om den *betingede fordeling* for X h.h.v. \underline{X} givet B . Hermed menes selvfølgelig sandsynligheds målene

$$P_{|B} \circ X^{-1} \text{ (betegnet } P_{X|B}) \text{ h.h.v. } P_{|B} \circ \underline{X}^{-1} \text{ (betegnet } P_{\underline{X}|B}).$$

Betinget tæthedsfunktion, diskret eller absolut kontinuert, har i denne forbindelse en helt oplagt mening. På samme måde siger man, at den *betingede middelværdi* for X givet B eksisterer, hvis

$$X \in L(P_{|B}) \text{ (eller ækvivalent) } x \mapsto |x| \in L(P_{X|B}),$$

og i givet kaldes

$$\int X dP_{|B} = \int x P_{X|B}(dx)$$

den betingede middelværdi for X givet B og betegnes $E[X | B]$. Bemærk at

$$X \in L(P) (L^1(P)) \Rightarrow X \in L(P_{|B}) (L(P_{|B}))$$

for ethvert $B \in \mathcal{F}$ med $P(B) > 0$.

Læseren opfordres til at oversætte øvrige begreber og udtryk til den nye situation.

Da betingede sandsynligheder ofte er a priori givne eller lette at udregne, er det vigtigt at vide, hvordan man ud fra kendskab til de betingede sandsynligheder kan beregne de ubetingede sandsynligheder. Et simpelt men vigtigt resultat i denne sammenhæng siger følgende.

Loven om total sandsynlighed.

Lad $(B_i)_{i \geq 1}$ betegne endelig eller tællelig mange parvis disjunkte hændelser, så at

$$P(B_i) > 0 \text{ for } i \geq 1 \quad \text{og} \quad \sum_{i \geq 1} P(B_i) = 1.$$

Da gælder for ethvert $A \in \mathcal{F}$ h.h.v. $X \in L^1(P)$, at

$$P(A) = \sum_{i \geq 1} P(A|B_i) \cdot P(B_i) \quad \text{og} \quad E[X] = \sum_{i \geq 1} E[X | B_i] \cdot P(B_i).$$

Bevis. Overlades til læseren.

Uafhængighed.

Lad (Ω, \mathcal{F}, P) betegne et givent sandsynlighedsfelt. Som det er velkendt fra elementær sandsynlighedsteori, siges hændelser A_1, \dots, A_n at være uafhængige hvis

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

for alle valg af indices $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. D.v.s. i alt $2^n - 1$ ligninger, hvoraf de n , svarende til $k = 1$, dog er trivielle. En simpel overvejelse viser, at betingelsen for uafhængighed ækvivalent kan formuleres som

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n B_j\right) = \prod_{j=1}^n P(B_j) \quad \text{for } B_j \in \{A_j, \Omega\} \quad j = 1, \dots, n.$$

Dette kan nu udvides til systemer af hændelser, idet hændelsessystemer $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ indeholdt i \mathcal{F} siges at være uafhængige, hvis

$$G_1, \dots, G_n \text{ er uafhængige for alle valg af } G_j \in \mathcal{G}_j \text{ for } j = 1, \dots, n,$$

eller ækvivalent

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n G_j\right) = \prod_{j=1}^n P(G_j) \quad \text{for } G_j \in \mathcal{G}_j^* \quad j = 1, \dots, n,$$

hvor $\mathcal{G}_j^* = \mathcal{G}_j \cup \{\Omega\}$ for $j \geq 1$. Dette betyder specielt, at

$$\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n \text{ uafhængige} \Leftrightarrow \mathcal{G}_1^*, \dots, \mathcal{G}_n^* \text{ uafhængige.}$$

Mere generelt siges en vilkårlig familie $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ af hændelsessystemer i \mathcal{F} at være uafhængige, hvis for ethvert $n \geq 1$

$$\mathcal{G}_{i_1}, \dots, \mathcal{G}_{i_n} \text{ er uafhængige for alle valg af forskellige indices } i_1, \dots, i_n \in I.$$

Begrebet uafhængige σ -algebraer er specielt vigtigt, og i denne sammenhæng er det næste resultat af stor betydning.

Ua 1 Lad $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ betegne mængdesystemer i \mathcal{F} , som alle er $\cap f$ -stabile. Da er σ -algebraerne $\sigma(\mathcal{G}_1), \dots, \sigma(\mathcal{G}_n)$ uafhængige, hvis og kun hvis

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n G_j\right) = \prod_{j=1}^n P(G_j) \quad \text{for } G_j \in \mathcal{G}_j^* \quad j = 1, \dots, n,$$

d.v.s. $\sigma(\mathcal{G}_1), \dots, \sigma(\mathcal{G}_n)$ er uafhængige, hvis og kun hvis $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ er uafhængige.

Bevis. Lad $G_k \in \mathcal{G}_k^*$ $k = 2, \dots, n$ være givet. Definer for $A \in \mathcal{F}$

$$\mu_1(A) := P(A \cap G_2 \cap \dots \cap G_n) \quad \text{og} \quad \nu_1(A) := P(A) \cdot \prod_{k=2}^n P(G_k).$$

μ_1 og ν_1 er da endelige mål på \mathcal{F} , og pr. antagelse er de ens på \mathcal{G}_1^* og dermed på $\sigma(\mathcal{G}_1)$ ifølge Proposition 2. Vælg dernæst $G_1 \in \sigma(\mathcal{G}_1)$ og $G_k \in \mathcal{G}_k^*$ $k = 3, \dots, n$ og definer som før for $A \in \mathcal{F}$

$$\mu_2(A) := P(G_1 \cap A \cap G_3 \cap \dots \cap G_n) \text{ og } \nu_2(A) := P(G_1) \cdot P(A) \cdot \prod_{k=3}^n P(G_k).$$

Ifølge det netop viste er disse to endelige mål ens på \mathcal{G}_2^* og derfor ifølge Proposition 2 også på $\sigma(\mathcal{G}_2)$. Sådan fortsættes n -gange og vi ender op med, at

$$P(G_1 \cap \dots \cap G_n) = \prod_{k=1}^n P(G_k)$$

for alle $G_k \in \sigma(\mathcal{G}_k)$ $k = 1, \dots, n$, hvilket netop er det ønskede resultat. \diamond

Benyttes Ua 1 på hændelsessystemer $\mathcal{G}_j = \{A_j\}$, hvor A_1, A_2, \dots, A_n er givne hændelser, genfindes flg. vel kendte implikation

$$A_1, A_2, \dots, A_n \text{ uafhængige} \Rightarrow B_1, B_2, \dots, B_n \text{ uafhængige,}$$

hvor B_j er enten A_j eller A_j^c for $j = 1, 2, \dots, n$.

For at kunne udnytte uafhængighedsbegrebet fuldt ud skal man vide, hvordan man opererer med uafhængige mængdesystemer. Resultatet, vi skal kende, siger løst sagt, at uafhængighed bevares, hvis man undgår at opbryde de enkelte systemer. For at budskabet ikke skal drukne helt i bar notation, formuleres det kun for en tællelig indeksmængde. Men det generelle tilfælde er åbenbar og overlades til læseren. Da mængdesystemet $\{\emptyset, \Omega\}$ er uafhængigt af alle mængdesystemer inklusiv sig selv, omfatter det formulerede resultat uden videre situationen, hvor udgangspunktet er endelig mange uafhængige mængdesystemer.

Ua 2 Lad $(\mathcal{G}_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige mængdesystemer i \mathcal{F} , som hver især er $\cap f$ -stabile. Lad endvidere $(\alpha_j)_{j \geq 1}$ betegne en endelig eller tællelig familie af parvis disjunkte delmængder af $\{1, 2, \dots\}$. Da er $(\mathcal{H}_j)_{j \geq 1}$ uafhængige, hvor $\mathcal{H}_j := \sigma(\cup_{i \in \alpha_j} \mathcal{G}_i)$ for $j \geq 1$.

Bevis. Ifølge Ua 1 kan vi uden tab af generalitet antage, at \mathcal{G}_i 'erne alle er σ -algebraer. Lad j_1, \dots, j_n være givet. Vi skal vise, at $\mathcal{H}_{j_1}, \dots, \mathcal{H}_{j_n}$ er uafhængige. Ifølge Ua 1 er det nok at vise, at $\tilde{\mathcal{H}}_{j_1}, \dots, \tilde{\mathcal{H}}_{j_n}$ er uafhængige, hvor

$$\tilde{\mathcal{H}}_{j_k} = \left\{ \bigcap_{i \in \beta_k} A_i \mid A_i \in \mathcal{G}_i \ i \in \beta_k \text{ hvor } \beta_k \subseteq \alpha_{j_k} \ k = 1, \dots, n \text{ endelig delmængde} \right\},$$

thi $\tilde{\mathcal{H}}_{j_k}$ 'erne er hver for sig $\cap f$ -stabile, og $\sigma(\tilde{\mathcal{H}}_{j_k}) = \mathcal{H}_{j_k}$ for alle k , da

$$\mathcal{G}_i \subseteq \tilde{\mathcal{H}}_{j_k} \quad i \in \alpha_{j_k}, \ k = 1, \dots, n.$$

Specielt er $\Omega \in \tilde{\mathcal{H}}_{j_k}$ for alle k . Vi skal altså vise

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) = \prod_{k=1}^n P(B_k)$$

for alle valg af $B_k \in \tilde{\mathcal{H}}_{j_k}$ $k = 1, \dots, n$. Men for ethvert sådant valg er

$$\bigcap_{k=1}^n B_k = \bigcap_{k=1}^n \bigcap_{i \in \beta_k} G_i^k, \text{ hvor } \beta_k \subseteq \alpha_{j_k} \text{ endelig og } G_i \in \mathcal{G}_i \text{ } i \in \beta_k \text{ for } k = 1, \dots, n.$$

D.v.s. $\bigcap_{k=1}^n B_k$ er ligesom de enkelte B_k 'er et endeligt gennemsnit af G_i 'er stammende fra \mathcal{G}_i for forskellige i . Antagelsen sikrer derfor, at

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) = \prod_{k=1}^n \prod_{i \in \beta_k} P(G_i^k) \text{ og } P(B_k) = \prod_{i \in \beta_k} P(G_i^k) \quad k = 1, \dots, n,$$

hvoraf resultatet umiddelbart følger. \diamond

Med udgangspunkt i begrebet uafhængige mængdesystemer overføres uafhængighedsbegrebet til stokastiske variable og mere generelt stokastiske funktioner. Idet en familie $(X_i)_{i \in I}$ af målelige variable defineret på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i målelige rum $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ siges at være *uafhængige*, hvis og kun hvis $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ er uafhængige σ -algebraer. Da $\sigma(\psi_i(X_i)) \subseteq \sigma(X_i)$ for alle i , hvis ψ_i er en målelig transformation af (E_i, \mathcal{E}_i) ind i (F_i, \mathcal{F}_i) , ses umiddelbart at

$$(X_i)_{i \in I} \text{ uafhængige} \Rightarrow (\psi_i(X_i))_{i \in I} \text{ uafhængige.}$$

Ved brug af Ua 2 kan dette skærpes til, at hvis $(X_i)_{i \geq 1}$ er uafhængige stokastiske variable, og $(\alpha_j)_{j \geq 1}$ en endelig eller tællelig familie af parvis disjunkte delmængder af \mathbf{N} , så er $(Z_j)_{j \geq 1}$ uafhængige, hvis Z_j for ethvert j er en målelig funktion af $(X_i)_{i \in \alpha_j}$. F.eks. har vi implikationen

$$(X_i)_{i \geq 1} \text{ uafhængige} \Rightarrow (X_{2i} + X_{2i-1})_{i \geq 1} \text{ uafhængige.}$$

Der gælder igen et tilsvarende resultat for en vilkårlig parametermængde.

Som en vigtig konsekvens af Ua 1 fås, at hvis $\mathcal{E}_i = \sigma(\mathcal{G}_i)$ for $i \in I$, hvor \mathcal{G}_i er $\cap f$ -stabil for alle i , så er

$$(X_i)_{i \in I} \text{ uafhængige} \Leftrightarrow (X_i^{-1}(\mathcal{G}_i))_{i \in I} \text{ uafhængige,}$$

hvor

$$X_i^{-1}(\mathcal{G}_i) = \{X_i^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{G}_i\} \quad i \in I.$$

F.eks. er to stokastiske variable X og Y uafhængige, hvis og kun hvis

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbf{R}.$$

Der gælder et lignende resultat for stokastiske vektorer. D.v.s. for givne stokastiske variable X_1, \dots, X_n med marginale fordelingsfunktioner F_k $k = 1, \dots, n$ og simultan fordelingsfunktion F gælder flg. biimplikation.

Ua 3

$$X_1, \dots, X_n \text{ uafhængige} \Leftrightarrow F(\underline{x}) = \prod_{k=1}^n F_k(x_k) \text{ for alle } \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Ligheden

$$P_X(A) = P(X \in A) \text{ og } P_{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B)$$

for $A \in \mathcal{E}$ og $B \in \mathcal{F}$, hvor X og Y er stokastiske funktioner med værdier i målelige rum (E, \mathcal{E}) og (F, \mathcal{F}) , viser ved brug af Proposition 2 flg. vigtige biimplikation. Der gælder et tilsvarende resultat for endelig og endog tællelig mange variable.

Ua 4

$$X \text{ og } Y \text{ uafhængige} \Leftrightarrow P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y.$$

Herudfra udledes ved brug af Tonelli-Fubini's Sætning umiddelbart flg. version af *Loven om total sandsynlighed*.

Korollar. *Lad X og Y være uafhængige og lad H betegne et element i enten $M(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_+$ eller $bM(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$. Da er*

$$E[H(X, Y)] = E[H_1(X)] = E[H_2(Y)],$$

hvor $H_1(x) = E[H(x, Y)]$ og $H_2(y) = E[H(X, y)]$ for alle $x \in E$ og $y \in F$.

Som en anvendelse fås formel (4.6.5).

Lad X og Y betegne uafhængige stokastiske variable, så at Y har endelig middelværdi. Da er

$$E[|X - Y|^p] \geq E[|X - E[Y]|^p] \text{ for } p \geq 1.$$

Specielt er $E[|X|^p] \leq E[|X - Y|^p]$ hvis $E[Y] = 0$.

Bevis. Lad $p \geq 1$ være givet og sæt $H(x, y) = |x - y|^p$. Ifølge det netop viste gælder da

$$E[|X - Y|^p] = E[H(X, Y)] = E[H_1(X)]$$

hvoraf resultatet følger, da

$$H_1(x) = E[H(x, Y)] = E[|x - Y|^p] \geq |x - E[Y]|^p$$

ifølge Jensen's ulighed brugt på den konvekse funktion $y \mapsto |x - y|^p$. ◇

3.40 The Uniqueness Theorem III

Vi skal kun bruge en lille del af dette meget generelle resultat, som behandler spørgsmålet om, hvorvidt en delmængde $\mathcal{H} \subseteq M(\mathcal{E})$ på et måleligt rum (E, \mathcal{E}) er såkaldt *målseparerende* for en mængde m af endelige mål på (E, \mathcal{E}) , d.v.s. hvornår der for ethvert par af mål $\mu, \nu \in m$ gælder

$$\int f d\mu = \int f d\nu \quad \forall f \in \mathcal{H} \Rightarrow \mu = \nu.$$

Et simpelt resultat af denne type er.

Lad (S, d) være et metrisk rum. Da er $bC(S)_+$ målseparerende for mængden af Borel sandsynlighedsmål på S .

Bevis. Lad μ og ν betegne to Borel sandsynlighedsmål på S . Ifølge Proposition 2 er det nok at vise, at

$$\mu(U) = \nu(U) \quad \text{for alle } U \subseteq S \text{ åben.}$$

Men dette fås af Monoton konvergens, thi betragt for givet U funktionerne

$$x \mapsto f_n(x) := (n \cdot d(x, U^c)) \wedge 1 \quad n \geq 1.$$

f_n 'erne er ikke-negative, kontinuerte og begrænsede, og da $f_n \uparrow \mathbf{1}_U$ overalt har vi

$$\mu(U) = \lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \int f_n d\nu = \nu(U). \quad \diamond$$

Som konsekvens heraf kan vi nu vise, at funktionerne

$$x \mapsto x^n \quad n \geq 1$$

er målseparerende for mængden af Borel sandsynlighedsmål på \mathbf{R} , som er koncentreret på $[0, 1]$ ($[0, 1]$ kan udskiftes med ethvert andet begrænset interval).

Korollar 1 To Borel sandsynlighedsmål μ og ν på \mathbf{R} , som begge er koncentreret på $[0, 1]$, d.v.s. $\mu([0, 1]) = \nu([0, 1]) = 1$, er ens, hvis

$$\int x^n \mu(dx) = \int x^n \nu(dx) \quad \text{for } n \geq 1.$$

(Integralerne er vel definerede da $x \mapsto x^n \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$ for alle $n \geq 1$.)

D.v.s. et Borel sandsynlighedsmål μ på \mathbf{R} koncentreret på $[0, 1]$ er bestemt ved den tilhørende momentfølge, d.v.s. talfølgen $(m_n)_{n \geq 1}$, hvor for $n \geq 1$

$$m_n := \int x^n \mu(dx).$$

Bevis. Det er nok at vise den sidste påstand. $(m_n)_{n \geq 1}$ bestemmer, da integralet er lineær på L^1 , ethvert integral af typen $\int p d\mu$, hvor p er et polynomium, d.v.s. en funktion af formen

$$x \mapsto a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \quad \text{hvor } a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}.$$

Ifølge Lebegue's og Weierstrass-Bernstein's Sætning, Appendiks D, bestemmer momentfølgen derfor også alle integraler $\int f d\mu$, hvor $f \in C(\mathbf{R})$, da enhver sådan funktion kan approksimeres uniformt på $[0, 1]$ af en følge af polynomier. Resultatet er derfor en konsekvens af ovenstående generelle resultat. \diamond

Korollar 2 *To Borel sandsynlighedsmål μ og ν på \mathbf{R} , som er koncentreret på $[0, \infty)$, er ens, hvis*

$$\int e^{-nx} \mu(dx) = \int e^{-nx} \nu(dx) \quad \text{for } n \geq 1.$$

D.v.s. et Borel sandsynlighedsmål μ koncentreret på $[0, \infty)$, er bestemt ved talfølgen $(l_n)_{n \geq 1}$, hvor

$$l_n := \int e^{-nx} \mu(dx) \quad \text{for } n \geq 1.$$

Bevis. Igen er det nok at vise den sidste påstand. Definer sandsynlighedsmålet $\tilde{\mu} := \mu \circ \psi^{-1}$, hvor ψ er den reelle funktion $x \mapsto e^{-x}$. $\tilde{\mu}$ er da koncentreret på $[0, 1]$, da

$$\tilde{\mu}([0, 1]) = \mu(\psi^{-1}([0, 1])) = \mu([0, \infty)) = 1,$$

og ifølge den lille transformationssætning er

$$\int x^n \tilde{\mu}(dx) = \int e^{-nx} \mu(dx) = l_n \quad \text{for } n \geq 1$$

D.v.s. $(l_n)_{n \geq 1}$ bestemmer $\tilde{\mu}$ og dermed μ , da $\mu = \tilde{\mu} \circ \varphi^{-1}$, hvor $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ er givet ved

$$\varphi(x) = -\log x \quad \text{for } x > 0 \text{ og } 0 \text{ ellers.}$$

Bemærk at $\varphi \circ \psi(x) \equiv x$. \diamond

Da et sandsynlighedsmål på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ er bestemt ved sine værdier på de endelige åbne intervaller, kan vi ud fra det ovenstående umiddelbart slutte, at ethvert sandsynlighedsmål μ på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ er entydigt bestemt ved tallene

$$\int e^{-n(x-a)^2} \mu(dx) \quad n \geq 1, a \in \mathbf{R}.$$

Thi ifølge Korollar 2 bestemmer de for ethvert $a \in \mathbf{R}$ billedmålet

$$\mu \circ \psi_a^{-1} \quad \text{hvor } \psi_a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ : x \mapsto (x-a)^2$$

og dermed

$$\mu(a-r, a+r) = \mu \circ \psi_a^{-1}([0, r^2]) \quad \text{for alle } r > 0, a \in \mathbf{R}.$$

Appendiks D.

Weierstrass - Bernstein's Sætning

Til ethvert $f \in C(\mathbf{R})$ findes der en følge af polynomier $(P_n)_{n \geq 1}$ så at $P_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformt for $x \in [0, 1]$.

Bevis. Lad $f \in C(\mathbf{R})$ være givet. Definer for alle $n \geq 1$ og $x \in \mathbf{R}$

$$P_n f(x) := \sum_{k=0}^n f(k/n) \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}.$$

Bemærk at for alle $n \geq 1$ og $x \in [0, 1]$ er

$$P_n f(x) = E[f(S_n^x/n)]$$

hvor $S_n^x \sim bi(n, x)$, hvor $bi(n, 0) := \delta_0$. Da

$$E[S_n^x/n] = x \quad \text{og} \quad \text{Var}(S_n^x/n) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

fås ved brug af Chebychev's ulighed, at for alle $n \geq 1$, $x \in [0, 1]$ og $\epsilon > 0$ er

$$P(|S_n^x/n - x| > \epsilon) \leq (4n\epsilon^2)^{-1}.$$

D.v.s. for $x \in [0, 1]$ har vi for alle $n \geq 1$ og $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} |P_n f(x) - f(x)| &= |E[f(S_n^x/n) - f(x)]| \leq E[|f(S_n^x/n) - f(x)|] \\ &= E[|f(S_n^x/n) - f(x)|, |S_n^x/n - x| > \epsilon] + E[|f(S_n^x/n) - f(x)|, |S_n^x/n - x| \leq \epsilon] \\ &\leq M_f \cdot P(|S_n^x/n - x| > \epsilon) + V_f(\epsilon) \leq \frac{M_f}{4n\epsilon^2} + V_f(\epsilon), \end{aligned}$$

hvor

$$M_f = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad \text{og} \quad V_f(\epsilon) = \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in [0, 1], |u - v| \leq \epsilon\}.$$

Men heraf følger umiddelbart, da f er begrænset og uniformt kontinuert på $[0, 1]$, d.v.s. $M_f < \infty$ og $V_f(\epsilon) \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} 0$, at $P_n f(x) \rightarrow f(x)$ uniformt for $x \in [0, 1]$. \diamond

Supplerende Opgaver

Stokastiske variable.

Alle stokastiske objekter nævnt i det følgende antages defineret på et givent sandsynlighedsfelt (Ω, \mathcal{F}, P) .

Opgave 58 Vis for enhver følge af hændelser $(A_n)_{n \geq 1}$ at

$$P(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n P(A_n) \quad \text{og} \quad P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n).$$

Opgave 59 Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne stokastiske variable og sæt

$$L^* = \limsup_n X_n \quad \text{og} \quad L_* = \liminf_n X_n.$$

Vis for alle $x \in \mathbf{R}$ at

$$P(L_* > x) \leq P(\liminf_n \{X_n > x\}) \leq P(L_* \geq x)$$

og

$$P(L^* > x) \leq P(\limsup_n \{X_n > x\}) \leq P(L^* \geq x)$$

Antag at X_n 'erne er uafhængige. Vis nu at $L^* = c$ P -n.o., hvor

$$c := \inf \left\{ t \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > t) < \infty \right\} = \sup \left\{ t \in \mathbf{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > t) = \infty \right\}.$$

Da hændelserne $\{\sup_i |X_i| = \infty\}$ og $\{\limsup_i |X_i| = \infty\}$ er identiske fås at

$$P(\sup_i |X_i| = \infty) \text{ er lig } 0 \text{ eller } 1.$$

Opgave 60 Vis for $x > 0$ at

$$\frac{x}{1+x^2} \cdot e^{-x^2/2} \leq \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy \leq \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2/2}.$$

Vink: Udnyt at for $y > x$ er $y/x \geq 1$ samt

$$d/dy (-y^{-1} \cdot e^{-y^2/2}) = (1+y^{-2}) \cdot e^{-y^2/2} \quad \text{og} \quad (1+y^{-2}) \leq (1+x^{-2}).$$

Opgave 61 Lad $(X_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af stokastiske variable, som alle er $N(0, 1)$ -fordelt, d.v.s. X_i 'erne er absolut kontinuerte med tæthed

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Vis ved hjælp af den højre ulighed i Opgave 58 at $L \leq 1 + \epsilon$ P -n.o. for alle $\epsilon > 0$ og dermed $L \leq 1$ P -n.o., hvor

$$L := \limsup_n X_n / \sqrt{2 \log n}.$$

Antag yderligere at X_i 'erne er uafhængige. Vis ved hjælp af Opgave 57 og venstre ulighed i Opgave 58 at $L = 1$ P -n.o.

Opgave 62 Lad $(X_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige stokastiske variable, som alle er $E(1)$ -fordelt, d.v.s. X_i 'erne er absolut kontinuerte med tæthed

$$x \mapsto e^{-x} \cdot \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x).$$

Beregn for $\alpha > 0$ $P(H_\alpha)$, hvor

$$H_\alpha := \{X_n > \alpha \log n \text{ uendelig ofte}\}.$$

Slut heraf at $\limsup_n M_n / \log n = 1$ P -n.o., hvor $M_n := \max_{1 \leq k \leq n} X_k$.
Vis endvidere at

$$P(M_n / \log n < 1 - \epsilon) = (1 - e^{-(1-\epsilon) \log n})^n = (1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}})^n$$

og derfor, da $1 - x \leq e^{-x}$, at $\lim_n M_n / \log n = 1$ P -n.o.

Opgave 63 Lad $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ betegne en stokastisk vektor, så at X_i 'erne har endelig andet moment, d.v.s. $X_i \in L^2(P)$ for $i = 1, \dots, n$. Vis at

$$A_{\underline{X}}(\underline{x}) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \cdot x_j \cdot \text{Cov}(X_i, X_j) = E[|\sum_{i=1}^n x_i (X_i - E[X_i])|^2] \geq 0$$

for alle $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Vis endvidere, at hvis \underline{X} er absolut kontinuert, så gælder

$$A_{\underline{X}}(\underline{x}) \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}.$$

Vink: Vis og udnyt at ethvert ægte underrum i \mathbf{R}^n er en Lebesgue nulmængde.

Opgave 64 Lad X og Y betegne absolut kontinuerte stokastiske variable med tætheder f_X og f_Y . Vis ved hjælp af Tonelli's sætning, at X og Y er uafhængige, hvis og kun hvis

$$(x, y) \mapsto f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

er en tæthed for den 2-dimensionale stokastiske vektor (X, Y) .

Opgave 65 Lad X og Y betegne uafhængige stokastiske variable. Vis at $X + Y$ og $X - Y$ er absolut kontinuerte, hvis en af X eller Y er absolut kontinuerte. Vis at det samme gælder for $X \cdot Y$ og X/Y , hvis yderligere hverken X eller Y har punktmasse i 0.

Vis at hvis X og Y er uafhængige og absolut kontinuerte med tætheder f_X og f_Y , så har $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$ og X/Y tætheder givet ved

$$X + Y : t \mapsto \int f_X(t-s) \cdot f_Y(s) \lambda_1(ds), \quad X - Y : t \mapsto \int f_X(t+s) \cdot f_Y(s) \lambda_1(ds)$$

$$X \cdot Y : t \mapsto \int f_X\left(\frac{t}{s}\right) \cdot f_Y(s) \cdot \frac{1}{|s|} \lambda_1(ds), \quad X/Y : t \mapsto \int f_X(t \cdot s) \cdot f_Y(s) \cdot |s| \lambda_1(ds).$$

Opgave 66 Lad Y , X_1 og X_2 betegne uafhængige stokastiske variable, så at

$$Y \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{og} \quad X_i \sim \Gamma(f_i/2, 2\sigma^2) \quad i = 1, 2,$$

hvor f_1 og f_2 er naturlige tal.

Parametriseringen af Gamma fordelingen følger her Hoffmann's sektion 4.23. Denne afviger fra den, der bruges i Stat 1, idet parameter værdien (α, β) hos Hoffmann svarer til parameter værdien $(\alpha, 1/\beta)$ i Stat 1.

$\Gamma(f/2, 2\sigma^2)$ -fordelingen er en såkaldt $\sigma^2\chi^2$ -fordeling med f frihedsgrader.

Bestem ved brug af Transformationssætningen tætheder for fig. tre variable

$$\frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad \frac{X_1/f_1}{X_2/f_2} \quad \text{og} \quad \frac{Y/\sigma}{\sqrt{X_1/f_1}}.$$

Opgave 67 Lad $p \in (0, \infty)$ være givet. Vis brug af Fubini's Sætning at

$$E[|X|^p] = p \int_0^\infty P(|X| > t) \cdot t^{p-1} dt.$$

Vis endvidere at hvis X er ikke-negativ heltallig, så gælder

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

Slut heraf at for $p > 0$ har en stokastisk variabel X endelig p 'te moment hvis og kun hvis

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X|^p \geq n) < \infty$$

Opgave 68 Lad X og Y betegne uafhængige stokastiske variable. Vis at for alle $0 < p < \infty$ gælder, at

$$E[|X + Y|^p] < \infty \Leftrightarrow E[|X|^p] + E[|Y|^p] < \infty$$

Vink til \Rightarrow . Vis ved brug af Tonelli's Sætning, at der findes mindst et y , så at

$$E[|X + y|^p] < \infty.$$

Opgave 69 Vis at hvis X og Y er uafhængige stokastiske variable, og Y har endelig middelværdi 0, så gælder for alle $1 \leq p < \infty$

$$E[|X|^p] \leq E[|X + Y|^p].$$

Opgave 70 Lad X betegne en ikke-negativ stokastisk variabel. Vis ved brug af korollaret til Jensen's Ulighed, at

$$\lim_{p \uparrow \infty} E[X^p]^{1/p} = \sup \{M > 0 \mid P(X > M) > 0\}.$$

og

$$\lim_{p \downarrow 0} E[X^p]^{1/p} = e^{E[\log X]} \quad \text{hvis } X \in \bigcup_{p > 0} L^p(P).$$

Vink til punkt 2. Udnyt Lebesgue's Sætning samt identiteten

$$\log E[X^p]^{1/p} = \frac{1}{p} \log E[X^p] = E\left[\frac{e^{p \log X} - e^0}{p}\right] \cdot \frac{\log(1 + (E[X^p] - 1))}{E[X^p] - 1}.$$

Opgave 71 Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ være identisk fordelte stokastiske variable. Vis at

$$X_1 \in L^1(P) \Rightarrow \{X_n \mid n \geq 1\} \text{ uniformt integrabel.}$$

Opgave 72 Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ være kvadratisk integrable stokastiske variable. Vis at $\{X_n \mid n \geq 1\}$ er uniformt integrabel, hvis $(E[X_n])_{n \geq 1}$ og $(Var(X_n))_{n \geq 1}$ begge er begrænsede talfølger.

Opgave 73 Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne stokastiske variable, så at $\{X_n \mid n \geq 1\}$ er uniformt integrabel. Definer

$$Y_n := (X_1 + \cdots + X_n)/n \quad n \geq 1.$$

Vis at $\{Y_n \mid n \geq 1\}$ er uniformt integrabel. Vink: Udnyt f.eks. Lemma 10.

Generelt gælder: \mathcal{H} uniformt integrabel $\Rightarrow \text{conv}(\mathcal{H})$ uniformt integrabel.

Opgave 74 Antag at $(X_n)_{n \geq 1}$ er uafhængige stokastiske variable, som alle har middelværdi 0 og endelig andet moment σ^2 . Vis at X_n 'erne er orthogonale i $L^2(P)$ og deducer herudfra ved brug af Pythagoras at

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n/n \text{ konvergent i } L^2(P).$$

Opgave 75 Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ og X betegne stokastiske variable og f en kontinuert funktion fra \mathbf{R} ind i \mathbf{R} . Vis at

$$X_n \rightarrow X \text{ } P\text{-n.o.} \Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(X) \text{ } P\text{-n.o..}$$

Vis det tilsvarende for konvergens i sandsynlighed, samt at $E[f(X_{n_k})] \rightarrow E[f(X)]$ hvis f yderligere er begrænset. Vink. Udnyt Sætning 6 samt at konvergens i sandsynlighed er metriserbar.

Opgave 76 Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ og X betegne stokastiske variable, så at $X_n \rightarrow X$ i sandsynlighed, d.v.s. P -mål. Vis, hvis $\{X_n^2 | n \geq 1\}$ er uniformt integrabel, at

$$E[X_n] \rightarrow E[X], \quad E[X_n^2] \rightarrow E[X^2] \quad \text{og} \quad \text{Var}(X_n) \rightarrow \text{Var}(X).$$

Opgave 77 Lad X og ξ betegne uafhængige stokastiske variable, så at

$$P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = 1/2.$$

Vis at $\xi \cdot X$ og $\xi \cdot |X|$ er symmetriske, samt at

$$X \text{ er symmetrisk hvis og kun hvis } X \sim \xi \cdot X \sim \xi \cdot |X|.$$

Opgave 78 Lad $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$ betegne uafhængige stokastiske variable, så at

$$P(\epsilon_i = 0) = P(\epsilon_i = 1) = 1/2 \quad i \geq 1.$$

Definer

$$U := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \cdot \epsilon_i = (\epsilon_1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \cdot \epsilon_{i+1})/2.$$

Vis at

$$P(U \in (0, 1)) = 1 \text{ og at } U \sim (\epsilon_1 + \tilde{U})/2,$$

hvor ϵ_1 og \tilde{U} er uafhængige og $U \sim \tilde{U}$. Slut heraf at

$$(2^{n+1} - 2) \cdot E[U^n] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot E[U^k]$$

for $n \geq 1$, og brug dette til at vise at $U \sim U(0, 1)$. Vink: Sammenlign momenterne.

Opgave 79 Lad X betegne en stokastisk variabel med en kontinuert fordelingsfunktion F_X . Vis at $F_X(X) \sim U(0, 1)$. Vink: Vis og udnyt at for $0 < t < 1$ er

$$F_X(a_t) = t \quad \text{og} \quad \{F_X(X) \leq t\} = \{X \leq a_t\} \quad \text{hvor} \quad a_t := \sup\{x | F_X(x) \leq t\}.$$

Slut heraf at for enhver kontinuert fordelingsfunktion F er

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(F(x)) dF(x) = \int_0^1 h(x) dx \quad \text{for } h \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}))_+.$$

Opgave 80 Lad $(X_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af stokastiske variable. Vis at

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[|X_i|^q] < \infty \Rightarrow X_n \rightarrow 0 \text{ } P\text{-n.o.}$$

for ethvert $q > 0$.

INDHOLDSFORTEGNELSE

Konvergensformer	71
L^p -rum	81
Radon-Nikodym's Sætning	88
Konstruktion af mål	91
Lebesgue-Stieltjes mål på \mathbb{R}	99
Lebesgue målet på \mathbb{R}^n	106
Transformation af tætheder	111
Sandsynlighedsfelter og stokastiske funktioner	113
Uafhængighed	118
Tillæg til sektion 3.40	122
Appendiks D	124
Supplerende Opgaver, 58-80.	125