

## Indledning.

Den moderne sandsynlighedsteori, hvis aksiomatiske basis blev formuleret af russeren A.N. Kolmogorov i 1933 i bogen *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, er bygget op omkring et triplet ofte betegnet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Her er  $\Omega$  en ikke-tom mængde tit omtalt som *det basale udfaldsrum*, da det i mange sammenhænge er relevant at tænke på de enkelte punkter i  $\Omega$  som mulige udfald (elementar udfald) af det komplekse (tilfældige) system, man ønsker at beskrive. Det eksplicitte valg af  $\Omega$  varierer meget. Hvis det f.eks. drejer sig om kast med en terning, er det nærliggende at lade  $\Omega$  være mængden  $\{1, \dots, 6\}$ , hvorimod det i forbindelse med kursudvikling af f.eks. obligationer er naturligt at lade  $\Omega$  være en delmængde af mængden af ikke-negative funktioner defineret på et interval  $[0, T]$ , hvor  $T$  er den tidshorizont, man ønsker at benytte.

$\mathcal{F}$ , der betegnes modellens *hændelsessystemet*, består af de samlinger af elementar udfald, vi er interesserede i. D.v.s. et element  $A$  i  $\mathcal{F}$  en såkaldt *hændelse* er en delmængde af  $\Omega$ .  $\mathcal{F}$  er derfor en delmængde af mængden af alle delmængder af  $\Omega$ , d.v.s. mængden

$$\{A \mid A \subseteq \Omega\}.$$

Denne kaldes også *potensmængden* over  $\Omega$  og betegnes ofte  $2^\Omega$ . Notationen beror på, at man via relationen

$$f \leftrightarrow \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = 1\}$$

kan identificere  $\{A \mid A \subseteq \Omega\}$  og mængden af funktioner fra  $\Omega \rightarrow \{0, 1\}$ .

I overensstemmelse med, at  $\mathcal{F}$  består af de samlinger af udfald, vi er interesserede i, forlanges flg. tre betingelser opfyldte

- 1)  $\Omega \in \mathcal{F}$
- 2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- 3)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$  hvis  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ .

Kravene 1), 2) og 3) udtrykkes kort ved at sige, at  $\mathcal{F}$  er en  $\sigma$ -algebra i  $\Omega$ .

Triplets sidste del er det såkaldte *sandsynlighedsmål*  $P$ , d.v.s. en funktion fra  $\mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ . Dets værdi  $P(A)$  på en hændelse  $A \in \mathcal{F}$  kaldes *sandsynligheden for A* eller synonymt *sandsynligheden for at A indtræffer*. Udover kravet om, at alle sandsynligheder skal ligge mellem 0 og 1, kræves yderligere

- 1)  $P(\Omega) = 1$
- 2)  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$  hvis  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$  er parvis disjunkte.

1) udtrykker, at den sikre hændelse indtræffer med sandsynlighed 1, og 2) omtales som den *tællige additivitet*. Denne medfører, som vi senere skal se, det intuitivt

lettere forståelige begreb *endelig additivitet*, d.v.s.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ for disjunkte hændelser } A, B \in \mathcal{F}.$$

Eksempler viser, at endelig additivitet ikke medfører tællelig additivitet, men 2) kan, som det let ses, erstattes med et krav om endelig additivitet samt *voksende kontinuitet*, d.v.s.

$$P(A_n) \uparrow P(A) \text{ hvis } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \text{ og } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Potensmængden over  $\Omega$  er klart en  $\sigma$ -algebra i  $\Omega$ , og man kan med god ret undre sig over, hvorfor man ikke altid lader  $2^\Omega$  udgøre hændelsessystemet, d.v.s. antager at enhver delmængde er en hændelse. Men for 'store'  $\Omega$ , f.eks.  $\Omega = \mathbf{R}$ , er 'antallet' af delmængder af  $\Omega$  så utroligt stort, at den tællige additivitet for alle sæt af parvis disjunkte mængder kun kan være opfyldt under meget strenge krav, som udelukker mange interessante mål. Vi er derfor tvunget til at arbejde med mindre  $\sigma$ -algebraer.

For at kunne udvikle den ønskede sandsynlighedsteori må vi først gennemgå lidt abstrakt mål og integralteori. Dette foregår i et generelt *målrum*  $(E, \mathcal{E}, \mu)$ , hvor  $(E, \mathcal{E})$  er et såkaldt *måleligt rum*, d.v.s. en ikke-tom mængde udstyret med en  $\sigma$ -algebra, og  $\mu$  er et *mål* på  $\mathcal{E}$ , d.v.s.  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  opfyldende

$$\mu(\emptyset) = 0 \text{ og } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{ for parvis disjunkte } A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{E}.$$

Det relevante stof er indeholdt i noternes første 8 afsnit. Her omtales ligeledes de såkaldte *målelige funktioner*, et begreb der i en sandsynlighedsteoretisk sammenhæng svarer til stokastiske variable. Gennemgangen forventes at strække sig over første kvarter, d.v.s. indtil efterårsferien. I andet kvarter vender vi os mod studiet af et sandsynlighedsfelt  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Det vigtige begreb *uafhængighed* defineres, og *middelværdi* begrebet indføres som et integral over  $\Omega$ . Dernæst diskuteres konvergens af målelige funktioner, med speciel vægt på stokastiske variable, og efteråret afsluttes med en behandling af spørgsmålet om eksistens af specifikke målrum, d.v.s. konstruktion af mål med forudgivne værdier på særligt pæne mængder. Et vigtigt eksempel er her konstruktionen af *længdemålet* på den reelle akse ud fra dets værdier på endelige intervaller.

### Målelige rum.

Den matematiske ramme for målteorien er et såkaldt *måleligt rum*  $(E, \mathcal{E})$ , bestående af en ikke tom mængde  $E$  og en delmængde  $\mathcal{E}$  af  $2^E$ , mængden af alle delmængder af  $E$ , som opfylder

$$(1) : E \in \mathcal{E}, \quad (2) : A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E} \quad \text{og} \quad (3) : (A_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}.$$

Elementerne i  $\mathcal{E}$  kaldes ofte de *målelige* mængder.  $A^c$  betegner her komplementet til  $A$  i  $E$ , d.v.s.

$$A^c := E \setminus A = \{e \in E \mid e \notin A\}.$$

Da  $A = (A^c)^c$  kan (2) ækvivalent formuleres som:  $A \in \mathcal{E} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{E}$ .

Et mængdesystem i  $E$ , eller synonymt mængde af delmængder af  $E$ , som opfylder (1), (2) og (3), d.v.s. indeholder hele mængden  $E$  samt er stabil under komplementær og tællelig foreningsmængde dannelse (C-stabil og  $\cup$ -stabil), kaldes en  $\sigma$ -algebra af delmængder i  $E$  eller kort en  $\sigma$ -algebra i  $E$ . Et måleligt rum er altså en mængde udstyret med en  $\sigma$ -algebra af delmængder.

Da  $E^c = \emptyset$  viser (1) og (2) at enhver  $\sigma$ -algebra indeholder den tomme mængde  $\emptyset$ , og da

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad \text{hvor} \quad B_i = A_i \wedge_n \quad i \geq 1,$$

sikrer (3) ligeledes stabilitet under endelig foreningsmængde dannelse ( $\cup$ -stabil), d.v.s.

$$(4) : A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{E}.$$

Et mængdesystem  $\mathcal{A}$  i  $E$ , der opfylder punkterne (1), (2) og (4), kaldes en *algebra* i  $E$ . Enhver  $\sigma$ -algebra er derfor specielt en algebra, hvorimod eksempler (se nedenfor) viser, at der findes algebraer, der ikke er  $\sigma$ -algebraer. Sempel induktion viser, at (4) ækvivalent kan formuleres som

$$A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}.$$

Da mængdeoperationerne fællesmængde og differensmængde dannelse kan dannes ved hjælp af foreningsmængde og komplementærmængde dannelse via formlerne

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \quad \text{og} \quad A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$$

har vi fig. resultat vedrørende algebraer og  $\sigma$ -algebraer.

**Lemma 1** *Enhver algebra  $\mathcal{A}$  er stabil under endelig fællesmængde samt mængdedifferens dannelse, d.v.s.*

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A} \quad \text{og} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

*Yderligere er en enhver  $\sigma$ -algebra stabil under tællelig fællesmængde dannelse.*

Bevis. Formlerne  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$  og  $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$  viser, at enhver algebra er stabil under endelig fællessmængde samt mængdedifferens dannelse. D.v.s.  $\cap$ -stabil og  $\setminus$ -stabil. Tilsvarende viser flg. identitet gældende for vilkårlige mængder  $A_1, A_2, \dots$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c,$$

at  $\sigma$ -algebraer er stabile under tællelig fællessmængde dannelse ( $\cap$ -stabil). For hvis  $A_i$ 'erne er elementer i en  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{E}$ , gælder dette også  $A_i^c$ 'erne og dermed den tællelige foreningsmængde  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$  tillige med dens komplement.  $\diamond$

**Øvelse 1.** Sæt  $E = \mathbf{R}$ . Definer

$$\mathcal{B} := \{A \subseteq \mathbf{R} \mid A \text{ eller } A^c \text{ er tællelig}\} \text{ og } \mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbf{R} \mid A \text{ eller } A^c \text{ er endelig}\}.$$

Vis at  $\mathcal{B}$  er en  $\sigma$ -algebra, og at  $\mathcal{A}$  er en algebra, men ikke en  $\sigma$ -algebra.  $\square$

Hvis grundmængden  $E$  indeholder mere end to elementer, findes der mindst to forskellige  $\sigma$ -algebraer i  $E$  nemlig mængdesystemerne  $\{\emptyset, E\}$  og  $2^E$ . Disse udgør h.h.v. den mindste og den største  $\sigma$ -algebra i  $E$ , da

$$\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{E} \subseteq 2^E.$$

for enhver anden  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{E}$  i  $E$ . De er dog sjældent interessante, thi den første er generelt for lille og den anden for stor, i hvert fald hvis  $E$  er overtællelig, d.v.s. ikke tællelig.

Det er ikke svært at se, at hvis  $\mathcal{E}_1$  og  $\mathcal{E}_2$  er  $\sigma$ -algebraer i  $E$ , så gælder dette også

$$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 := \{B \in 2^E \mid B \in \mathcal{E}_1 \text{ og } B \in \mathcal{E}_2\},$$

da

- (1)  $E \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  da  $E \in \mathcal{E}_1$  og  $E \in \mathcal{E}_2$ .
- (2)  $A \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \Rightarrow A \in \mathcal{E}_i$  og dermed  $A^c \in \mathcal{E}_i$  for  $i = 1, 2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ .
- (3)  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \Rightarrow (A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}_i$  og dermed  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}_i$  for  $i = 1, 2$ , d. v.s.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ .

Argumentet generaliserer uændret til en vilkårlig familie af  $\sigma$ -algebraer, hvilket åbner mulighed for, at definere  $\sigma$ -algebraer af typen 'mindste'  $\sigma$ -algebra der indeholder et givent sæt af mængder  $\mathcal{G}$ . Ordet 'mindste' skal her forstås i h.h.t. inklusion. For da  $2^E$  er en  $\sigma$ -algebra, som indeholder  $\mathcal{G}$ , er der ved definitionen

$$\sigma(\mathcal{G}) := \bigcap \mathcal{F}$$

hvor  $\mathcal{F}$  gennemløber alle  $\sigma$ -algebraer, som indeholder  $\mathcal{G}$ , d.v.s.  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , defineret en  $\sigma$ -algebra i  $E$ .  $\sigma(\mathcal{G})$  er den mindste, der indeholder  $\mathcal{G}$ , da den pr. definition er

indeholdt i enhver  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$ , som indeholder  $\mathcal{G}$ .  $\sigma(\mathcal{G})$  er derfor lig  $\mathcal{G}$ , hvis  $\mathcal{G}$  er en  $\sigma$ -algebra, d.v.s. specielt

$$\sigma(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G}),$$

og ligeledes er

$$\sigma(\mathcal{G}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{G}_2) \text{ hvis } \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2.$$

$\sigma(\mathcal{G})$  omtales naturligt nok som den af  $\mathcal{G}$  frembragte  $\sigma$ -algebra. Da en  $\sigma$ -algebra som nævnt er  $C$ -,  $\cup$ - og  $\cap$ -stabil, er

$$\mathcal{G}^c \cup \mathcal{G}_\sigma \cup \mathcal{G}_\delta \subseteq \sigma(\mathcal{G})$$

og dermed, da  $\mathcal{G}$  er indeholdt i både  $\mathcal{G}_\sigma$  og  $\mathcal{G}_\delta$ ,

$$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}^c) = \sigma(\mathcal{G}_\sigma) = \sigma(\mathcal{G}_\delta),$$

hvor vi har brugt notationen

$$\mathcal{G}^c := \{G^c \mid G \in \mathcal{G}\}, \quad \mathcal{G}_\sigma := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \mid G_i \in \mathcal{G} \ i \geq 1 \right\}, \quad \mathcal{G}_\delta := \left\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \mid G_i \in \mathcal{G} \ i \geq 1 \right\}.$$

**Eksempler.** Det overlades til læseren at eftervise de ubeviste påstande.

1)  $\sigma(\{A\}) = \{A, A^c, \emptyset, E\}$ .

2) Hvis  $\{A_1, \dots, A_n\}$  udgør en endelig *partition* af  $E$ , d.v.s. er parvis disjunkte,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  for  $i \neq j$ , og  $E = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , er

$$\sigma(\{A_1, \dots, A_n\}) = \left\{ B \subseteq E \mid B = \bigcup_{i \in I} A_i, \ I \subseteq \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Antallet af elementer i  $\sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$  er derfor højst  $2^n$ , med lighedstegn hvis  $A_i \neq \emptyset$  for  $i = 1, \dots, n$ .

Argument. Lad  $\mathcal{G}$  betegne  $\{A_1, \dots, A_n\}$ . Da højresiden netop er  $\mathcal{G}_\sigma$ , er den indeholdt i  $\sigma(\mathcal{G})$ , og der vil derfor gælde  $=$ , hvis  $\mathcal{G}_\sigma$  i denne situation udgør en  $\sigma$ -algebra. Men dette følger af formlerne

$$E = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} A_i, \quad \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I^c} A_i \text{ og } \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{i \in I_n} A_i \right) = \bigcup_{i \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} A_i.$$

Resultatet generaliserer med samme argument til følgende.

3) Hvis  $(A_i)_{i \geq 1}$  udgør en tællelig partition af  $E$ , d.v.s.  $A_i$ 'erne er parvis disjunkte og  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , er

$$\sigma((A_i)_{i \geq 1}) = \left\{ B \subseteq E \mid B = \bigcup_{i \in I} A_i, \ I \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

Hvis  $A_i \neq \emptyset$  for mere end endelig mange  $i$ , er  $\sigma((A_i)_{i \geq 1})$  overtællelig.

Hvis mængderne i 2) og 3) ikke er disjunkte, er situationen mindre gennemskuelig. Betragt f.eks. et vilkårligt endeligt sæt  $\{A_1, \dots, A_n\}$ . Til enhver af de  $2^n$  forskellige delmængder  $I$  af  $\{1, \dots, n\}$  tilordnes en mængde  $B_I$  bestemt ved

$$B_I := \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in I^c} A_i^c.$$

Det overlades til læseren at indse, at det herved fremkomne sæt  $\{B_1, \dots, B_{2^n}\}$  udgør en endelig partition af  $E$ , samt at

$$\sigma(\{A_1, \dots, A_n\}) = \sigma(\{B_1, \dots, B_{2^n}\}).$$

Antallet af elementer i  $\sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$  er derfor  $2^m$ , hvor  $m$  er antallet af ikke-tomme  $B_i$ 'er, d.v.s.  $m = 2^n$ , hvis ingen af  $B_i$ 'erne er tomme.

**Notation.** En  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{E}$  siges at være *tællelig frembragt*, hvis  $\mathcal{E} = \sigma((A_n)_{n \geq 1})$  for en følge  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq 2^E$ .

Bemærk at enhver tællelig frembragt  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{E}$  er på formen  $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$ , hvor  $\mathcal{A}$  er en algebra indeholdende højst tællelig mange elementer, f.eks.

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\{A_1, \dots, A_n\}), \quad \text{hvis } \mathcal{E} = \sigma((A_n)_{n \geq 1}).$$

I mange teoretiske sammenhænge er det givne system  $\mathcal{G}$  stabil under endelig gennemsnit (synonym for fællesmængde), d.v.s.

$$A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}.$$

Denne situation er speciel vigtig, fordi  $\sigma(\mathcal{G})$ , som vi nu skal se, her kan beskrives på en alternativ simplere måde. For lettere at kunne formulere resultatet, der er kendt under navnet *Dynkin's Lemma*, indføres flg. notation.

**Notation.**  $\mathcal{D} \subseteq 2^E$  kaldes et  $d$ -system, hvis  $\mathcal{D}$  opfylder flg. tre punkter

- a)  $E \in \mathcal{D}$
- b)  $A, B \in \mathcal{D}$  og  $B \subseteq A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$
- c)  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{D}$  og  $A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$ .

Da  $B^c = E \setminus B$  sikrer a) og b) stabilitet under komplementærmængde dannelse. Punkt c) udtrykkes kort ved at sige, at  $\mathcal{D}$  er  $\uparrow$ -stabil, d.v.s. lukket under tællelig voksende forening. Da  $\mathcal{D}$  er stabil under komplementærmængde dannelse, er den ligeledes  $\downarrow$ -stabil, d.v.s. lukket under tællelig aftagende gennemsnit.

I overensstemmelse med det tidligere defineres for ethvert  $\mathcal{G} \subseteq 2^E$

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) := \bigcap \mathcal{D}$$

hvor  $\mathcal{D}$  gennemløber alle  $d$ -systemer, som indeholder  $\mathcal{G}$ , d.v.s.  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$ . Simple argumenter viser, at  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  er det mindste  $d$ -system, som indeholder  $\mathcal{G}$ . Med denne notation på plads gælder.

**Lemma 2 Dynkin's Lemma.**

Hvis  $\mathcal{G} \subseteq 2^E$  er stabil under endelig gennemsnit, er  $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{D}(\mathcal{G})$ .

Bevis. Da enhver  $\sigma$ -algebra er et  $d$ -system, er inklusionen  $\supseteq$  klar, og den anden følger pr. definition af  $\sigma(\mathcal{G})$ , hvis vi viser, at  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  er en  $\sigma$ -algebra, d.v.s. opfylder (1), (2) og (3) på side 3. Her er (1) og (2) allerede klaret. Hvad angår (3) viser den generelle identitet

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=1}^n B_k \right),$$

at  $\cup$ -stabilitet og  $\cup$ -stabilitet er det samme for  $\uparrow$ -stabile mængdesystemer, og da  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  er  $\uparrow$ -stabil, mangler vi derfor kun at vise, at  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  er stabil under endelig foreningsmængde dannelse. Men da  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ , som nævnt, er stabil under komplementærmængde dannelse, er dette ækvivalent med at vise stabilitet under endelig fællesmængde dannelse, d.v.s.  $A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$  for alle  $A, B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ .

Lad hertil  $G \in \mathcal{G}$  være givet. Betragt flg. delmængde af  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$

$$\mathcal{D}(G) := \{B \in \mathcal{D}(\mathcal{G}) \mid B \cap G \in \mathcal{D}(\mathcal{G})\}.$$

Udnyttes at  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  er et  $d$ -system, ses umiddelbart at  $\mathcal{D}(G)$  ligeledes er et  $d$ -system, og da den pr. antagelse indeholder  $\mathcal{G}$ , er den lig  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ . D.v.s.  $G \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$  for alle  $G \in \mathcal{G}$  og  $B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ . Vælg dernæst et  $A \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$  og definer tilsvarende

$$\mathcal{D}(A) := \{B \in \mathcal{D}(\mathcal{G}) \mid A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{G})\}.$$

Ifølge det netop viste er  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{G})$ , og da  $\mathcal{D}(A)$  tilsvarende ses at være et  $d$ -system, er  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{G})$ . Da dette gælder for ethvert  $A$  i  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ , har vi hermed vist den ønskede stabilitet under endelig fællesmængde dannelse.  $\diamond$

Vi vil i det følgende møde mange 'minimal'  $\sigma$ -algebraer. Et første vigtigt eksempel er den såkaldte *produkt  $\sigma$ -algebra*  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$  på produktrummet  $E \times F$ , dannet ud fra to givne målelige rum  $(E, \mathcal{E})$  og  $(F, \mathcal{F})$ . Udtrykt i den ovenfor indførte notation er

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} := \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\}),$$

d.v.s. produkt  $\sigma$ -algebraen er den mindste  $\sigma$ -algebra i  $E \times F$ , der indeholder alle produktmængder, hvis sider er målelige. Skønt således frembragt af produktmængder er det værd at understrege, at  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$  indeholder mængder, som ikke er af produkttype. Bemærk at mængden af kasser med målelige sider er stabil under endelig gennemsnit, idet

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Proceduren udvider umiddelbart til situationer med endelig eller endog tællelig mange faktorer. For at spare plads bruges ofte notation som  $(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i)$ , og hvis faktorerne er ens skrives f.eks.  $\mathcal{E}^2$  i stedet for  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ .

**Vigtig regel.** For at vise, at alle elementer i en  $\sigma$ -algebra af typen  $\sigma(\mathcal{G})$  har en given egenskab  $p$ , er det nok at vise, at ethvert  $G \in \mathcal{G}$  har egenskaben  $p$ , samt at

$$\mathcal{E}_p := \{A \subseteq E \mid A \text{ har egenskaben } p\}$$

udgør en  $\sigma$ -algebra i  $E$ . Thi i så fald har vi altså, at  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}_p$  og dermed  $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{E}_p$ , da  $\mathcal{E}_p$  er en  $\sigma$ -algebra. Hvis  $\mathcal{G}$  er stabil under endelig gennemsnit, er det nok at vise, at  $\mathcal{E}_p$  er et  $d$ -system.

**Øvelse 2.** Vis at et mængdesystem  $\mathcal{E} \subseteq 2^E$  er en  $\sigma$ -algebra, hvis og kun hvis  $\mathcal{E}$  er både en algebra og et  $d$ -system.

Definer for ethvert  $\mathcal{G} \subseteq 2^E$

$$\mathcal{M}o(\mathcal{G}) := \bigcap M$$

hvor  $M$  gennemløber alle  $\uparrow\downarrow$ -stabile mængdesystemer indeholdende  $\mathcal{G}$ .

Overvej at  $\mathcal{M}o(\mathcal{G})$  er  $\uparrow\downarrow$  stabil og konkluder her ud fra, at  $\mathcal{M}o(\mathcal{G})$  er det mindste mængdesystem, der indeholder  $\mathcal{G}$  og er  $\uparrow\downarrow$  stabil.

Vis dernæst at  $\mathcal{M}o(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ , hvis  $\mathcal{A}$  er en algebra.

Vink: Vis at  $\mathcal{M}o(\mathcal{A})$  er en algebra, d.v.s.  $C$ -stabil og  $\cup f$ -stabil. Kopier bevisteknikken i Dynkin's lemma.  $\square$

### Borel $\sigma$ -algebraer.

Lad  $(S, d)$  betegne et metrisk rum. Vigtige eksempler er som bekendt  $\mathbf{R}$  eller mere generelt  $\mathbf{R}^n$  udstyret med den sædvanlige Euklidiske metrik. Lad  $\mathcal{U}$  betegne mængden af åbne delmængder af  $S$ , d.v.s. en delmængde  $U \subseteq S$  ligger i  $\mathcal{U}$  hvis

$$\forall x \in U \exists r > 0 : b(x, r) \subseteq U,$$

hvor  $b(x, r) = \{y \in S \mid d(x, y) < r\}$  er den *åbne kugle* med centrum  $x$  og radius  $r$ . (Overvej at  $b(x, r)$  er åben.) Ud fra de åbne mængder defineres den såkaldte *Borel  $\sigma$ -algebra*  $\mathcal{B}(S)$  som den mindste  $\sigma$ -algebra, der indeholder alle åbne mængder, d.v.s.

$$\mathcal{B}(S) := \sigma(\mathcal{U}).$$

Da mængdesystemet  $\mathcal{U}^c = \{G^c \mid G \subseteq S \text{ åben}\}$  pr. definition netop er mængden af lukkede delmængder af  $S$ , kan  $\mathcal{B}(S)$  ækvivalent beskrives som den mindste  $\sigma$ -algebra, der indeholder alle lukkede delmængder af  $S$ . Hvis ikke andet eksplicit siges, er det altid Borel  $\sigma$ -algebraen, man benytter i et metrisk rum, og ligesom mængden af åbne mængder ændres den ikke ved skift til en ækvivalent metrik. Hvis  $(S, d)$  er *separabel*, d.v.s. der findes en tællelig delmængde  $(x_i)_{i \geq 1} \subseteq S$ , så at

$$\forall x \in S \forall r > 0 \exists i \geq 1 : x_i \in b(x, r)$$

(man udtrykker dette ved at sige, at  $(x_i)_{i \geq 1}$  er *tæt* i  $S$ ), kan  $\mathcal{B}(S)$  også beskrives, som  $\sigma$ -algebraen frembragt af alle åbne kugler i  $(S, d)$ . Thi hvis  $(x_i)_{i \geq 1}$  er en tællelig tæt mængde i  $S$ , gælder for enhver åben delmængde  $U$  i  $S$ , at

$$U = \bigcup_{(i,j), b(x_i, j^{-1}) \subseteq U} b(x_i, j^{-1}).$$

Bevis. (tænk på  $\mathbf{R}$  med den sædvanlige metrik)

Lad  $x \in U$  være givet. Da  $U$  er åben, findes der et  $j \geq 1$ , så at  $b(x, j^{-1}) \subseteq U$ . Vælg nu  $x_i \in b(x, (2j)^{-1})$  og betragt kuglen  $b(x_i, (2j)^{-1})$ . De grundlæggende egenskaber ved en metrik, specielt trekantsuligheden, sikrer, at

$$x \in b(x_i, (2j)^{-1}) \subseteq b(x, j^{-1}) \subseteq U,$$

hvilket viser den postulerede lighed. ◇

I separable metriske rum er enhver åben mængde altså en tællelig foreningsmængde af åbne kugler, og Borel  $\sigma$ -algebraen er derfor frembragt af de åbne kugler. Bemærk at argumentet mere præcist viser, at

$$\mathcal{B}(S) = \sigma(\{b(x_i, j^{-1}) \mid i, j \geq 1\}),$$

d.v.s.  $\mathcal{B}(S)$  er tællelig frembragt, hvis  $(S, d)$  er separabel.

Lad os et øjeblik se på, hvad dette betyder i tilfældene  $\mathbf{R}$  og  $\mathbf{R}^n$ . Disse rum er separable, thi  $\mathbf{Q}$  og  $\mathbf{Q}^n$ , d.v.s. punkterne i  $\mathbf{R}^n$  med rationale koordinater, er tællelige tætte delmængder af h.h.v.  $\mathbf{R}$  og  $\mathbf{R}^n$ . Da intervallerne af formen  $]a, b[$  for  $-\infty < a < b < \infty$  netop er de åbne kugler i den Euklidiske metrik, idet

$$b(x, r) = ]x - r, x + r[ \text{ og dermed } ]a, b[ = b((a + b)/2, (b - a)/2),$$

fås derfor, at

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\{ ]a, b[ \mid -\infty < a < b < \infty \}).$$

Tilsvarende er

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \sigma(\{ \prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[ \mid -\infty < a_i < b_i < \infty \ i = 1, \dots, n \}),$$

hvor

$$\prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[ = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \ i = 1, \dots, n \}.$$

Det flerdimensionale tilfælde indses lettest ved at bruge metrikken

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad \text{for } \underline{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \underline{y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n.$$

$d_\infty$  er ækvivalent med den Euklidiske metrik på  $\mathbf{R}^n$ , og de tilhørende åbne kugler er af formen  $\prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[$ , hvor kantlængden  $b_i - a_i$  er uafhængig af  $i$ .

Men der findes mange andre frembringersystemer. F.eks. viser identiteterne øverst side 5 sammen med ligheden

$$]a, b[ = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, b - 1/n],$$

at  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  også er frembragt af mængden af lukkede intervaller (detaljerne overlades til læseren). Til senere brug fremhæves specielt flg. resultat. Bemærk at de to frembringersystemer begge er stabile under endelig gennemsnit.

**Lemma 3**  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  er frembragt af mængdesystemet  $\{(-\infty, b] \mid b \in \mathbf{R}\}$ , og tilsvarende er  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  frembragt af  $\{\prod_{i=1}^n (-\infty, b_i] \mid b_i \in \mathbf{R} \ i = 1, \dots, n\}$ .

Bevis. Vi viser kun det endimensionale tilfælde. Det generelle går analogt. Lad  $\mathcal{B}$  betegne  $\sigma(\{(-\infty, b] \mid b \in \mathbf{R}\})$ . Da  $(-\infty, b]$  er en lukket mængde, er

$$\mathcal{B} \subseteq \sigma(\{\text{lukkede mængder}\}) = \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

D.v.s. det drejer sig om at vise, at  $\mathcal{B}$  er stor nok, f.eks. at den indeholder ethvert åbent interval  $]a, b[$ . Men dette fås for alle  $a < b$  af ligheden

$$]a, b[ = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - 1/n] \cap (-\infty, a]^c.$$

**Øvelse 3.** Definer for alle  $\underline{i} \in \mathbf{Z}^n$  og  $k \geq 1$

$$D_{\underline{i}}^k := \prod_{j=1}^n ](i_j - 1) \cdot 2^{-k}, i_j \cdot 2^{-k}].$$

Vis at mængden af disse akseparallelle *dyadiske kasser* frembringer  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ , samt at  $\{D_{\underline{i}}^k \mid \underline{i} \in \mathbf{Z}^n, k \geq 1\} \cup \{\emptyset\}$  er stabil under gennemsnit.  $\square$

Hvis  $(S, d)$  er et metrisk rum, er det naturligt at udstyre produktrummet  $S^n$  med en såkaldt *produktmetrik*. En metrik  $\tilde{d}$  på  $S^n$  kaldes en produktmetrik, hvis  $\tilde{d}$ -konvergens af en punktfølge i  $S^n$  er ækvivalent med  $d$ -konvergens af de  $n$  tilhørende koordinatfølger, d.v.s.

$$\lim_k \underline{x}_k = \underline{x} \quad \text{i } (S^n, \tilde{d}) \Leftrightarrow \lim_k x_{k,i} = x_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{i } (S, d).$$

hvor  $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$  og  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Bemærk at  $S^n$  er separabel i enhver produktmetrik, hvis  $S$  er separabel. F.eks. er

$$\{(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) \mid k_i \geq 1 \quad i = 1, \dots, n\},$$

tæt i  $S^n$ , hvis  $(x_k)_{k \geq 1}$  er tæt i  $S$ . Vigtige eksempler på produktmetrikker er

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i), \quad d_1(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) \quad \text{og} \quad d_2(\underline{x}, \underline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)^2}$$

for  $\underline{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\underline{y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in S^n$ . (Tænk over dette)

Da  $S^n$  kan opfattes både som et produktrum og et metrisk rum, er  $\mathcal{B}(S)^n$  og  $\mathcal{B}(S^n)$  begge naturlige  $\sigma$ -algebraer på  $S^n$ . Det er derfor oplagt at undersøge deres indbyrdes sammenhæng. Sætning 1 nedenfor viser, at der altid gælder  $\mathcal{B}(S)^n \subseteq \mathcal{B}(S^n)$ , men hvis  $S$  er separabel, gælder der, som vi nu skal vise, lighedstegn.

**Proposition 1** *For ethvert separabelt metrisk rum  $(S, d)$  er  $\mathcal{B}(S)^n = \mathcal{B}(S^n)$  for  $n \geq 2$ . Specielt er  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R})^n$  for  $n \geq 2$ .*

Bevis. Af overskueligheds grunde betragtes kun tilfældet  $n = 2$ . Da Borel  $\sigma$ -algebraen er uafhængig af, hvilken produktmetrik der anvendes, udstyres  $S \times S$  med metrikken  $d_\infty$ , d.v.s.

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) := d(x_1, y_1) \vee d(x_2, y_2) \quad \underline{x} = (x_1, x_2), \underline{y} = (y_1, y_2) \in S \times S.$$

Kuglerne i denne metrik er produktmængder, idet

$$b(\underline{x}, r) = b(x_1, r) \times b(x_2, r) \quad \text{for } r > 0, \underline{x} = (x_1, x_2) \in S \times S.$$

Da  $S$  er separabel, er  $S \times S$ , som nævnt, separabel i  $d_\infty$ -metrikken. Enhver åben mængde  $U \subseteq S \times S$  er derfor en tællelig foreningsmængde af produktmængder og dermed element i  $\mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S) = \mathcal{B}(S)^2$ . D.v.s.

$$\mathcal{B}(S^2) = \sigma(\{U \mid U \subseteq S \times S \text{ åben}\}) \subseteq \mathcal{B}(S)^2.$$

For at vise den anden inklusion betragtes mængdesystemet

$$\mathcal{B}_1 := \{A \in \mathcal{B}(S) \mid A \times S \in \mathcal{B}(S^2)\}.$$

Formlerne

$$S \times S = S^2, \quad A^c \times S = (A \times S)^c \text{ og } \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \times S = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times S).$$

viser, at  $\mathcal{B}_1$  er en  $\sigma$ -algebra; og da  $U \times S$  er åben i  $S^2$  og dermed element i  $\mathcal{B}(S^2)$  for enhver åben mængde  $U$ , indeholder  $\mathcal{B}_1$  alle åbne mængder og udgør derfor hele  $\mathcal{B}(S)$ . Tilsvarende vises

$$S \times B \in \mathcal{B}(S^2) \text{ for alle } B \in \mathcal{B}(S),$$

og derfor

$$A \times B = (A \times S) \cap (S \times B) \in \mathcal{B}(S^2) \text{ for alle } A, B \in \mathcal{B}(S),$$

hvilket pr. definition af  $\mathcal{B}(\mathbf{R})^2$  viser inklusionen  $\mathcal{B}(\mathbf{R})^2 \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ .  $\diamond$

**Øvelse 4.** Lad  $(S, d)$  betegne et metrisk rum. Vis at enhver lukket mængde  $F$  er et tælleligt gennemsnit af åbne mængder. Vink: Vis og udnyt at

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \quad \text{hvor } G_n := \bigcup_{x \in F} b(x, 1/n).$$

Overgang til komplementet viser derfor, at enhver åben mængde er en tællelig foreningsmængde af lukkede mængder. Deducer herudfra, at  $\mathcal{B}(S) = \mathcal{M}o(\mathcal{G})$ , hvor  $\mathcal{G}$  enten er mængden af alle åbne mængder h.h.v. mængden af alle lukkede mængder. Vink: Kopier fremgangsmåden i Øvelse 2.  $\square$

Lad mig som afslutning bare nævne, at hvis  $A$  er en ikke-tom delmængde af et metrisk rum  $(S, d)$ , så er  $(A, d)$  igen et metrisk rum, og den tilhørende Borel  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(A)$  opfylder

$$\mathcal{B}(A) = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}(S)\},$$

d.v.s.  $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(S)$  hvis  $A \in \mathcal{B}(S)$ . Ligheden skyldes, at en delmængde  $U \subseteq A$  er åben i  $(A, d)$ , hvis og kun hvis

$$U = A \cap \tilde{U} \quad \text{hvor } \tilde{U} \text{ er åben i } (S, d).$$

Bemærk at  $(A, d)$  er separabel, hvis  $(S, d)$  er separabel. For hvis  $(x_n)_{n \geq 1}$  er tæt i  $(S, d)$ , så er, idet  $y$  betegner et fast punkt i  $A$ ,  $(y_{n,k})_{n,k \geq 1}$  tæt i  $(A, d)$ , hvor for givne  $n, k \geq 1$  punktet  $y_{n,k}$  er valgt i h.h.t.

$$y_{n,k} \in A \cap b(x_n, 1/k) \text{ hvis denne mængde er ikke-tom og } y_{n,k} = y \text{ ellers.}$$

### Målelige funktioner.

I det følgende betegner  $(E, \mathcal{E})$  og  $(F, \mathcal{F})$  målelige rum. Som det er naturligt i mange matematiske sammenhænge, betragtes afbildninger mellem  $E$  og  $F$ , som harmonerer med den givne målelige struktur. Disse såkaldte målelige afbildninger defineres som følger.

**Definition** En funktion  $f : E \rightarrow F$  er *målelig*, mere præcist  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ -målelig, hvis  $f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{E}$  d.v.s.

$$f^{-1}(B) := \{e \in E \mid f(e) \in B\} \in \mathcal{E} \text{ for alle } B \in \mathcal{F}.$$

En funktion er altså målelig, hvis og kun hvis Urbilledet af enhver målelig mængde i  $F$  er en målelig mængde i  $E$ . I stedet for  $f^{-1}(B)$  skrives ofte kort  $\{f \in B\}$ .

Vi skal i dette afsnit udlede forskellige egenskaber ved målelige funktioner samt i vigtige specialtilfælde undersøge, hvordan målelighed eftervises. Som bekendt bevares de gængse mængdeoperationer ved inversbilled-dannelse, specielt er

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i) \quad \text{og} \quad f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c.$$

For enhver funktion  $f : E \rightarrow F$  er mængdesystemerne

$$\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}\} \quad \text{og} \quad \{B \subseteq F \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\}$$

derfor  $\sigma$ -algebraer i h.h.v.  $E$  og  $F$  og dermed

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{G})).$$

for ethvert mængdesystem  $\mathcal{G}$  i  $F$ . For da venstresiden, som nævnt, er en  $\sigma$ -algebra i  $E$ , som omfatter  $f^{-1}(\mathcal{G})$ , er inklusionen  $\supseteq$  klar, og den anden følger, da

$$\{B \in \sigma(\mathcal{G}) \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{G}))\}$$

er en  $\sigma$ -algebra i  $F$  indeholdende  $\mathcal{G}$ . Som konsekvens heraf fås flg. vigtige regel.

**M1** Hvis  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$  for et mængdesystem  $\mathcal{G}$  i  $F$ , så gælder for  $f : E \rightarrow F$ , at

$$f \text{ er } (\mathcal{E}, \mathcal{F})\text{-målelig} \Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{E} \text{ for alle } G \in \mathcal{G}.$$

$\sigma$ -algebraen  $\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}\}$  betegnes  $\sigma(f)$  og omtales ofte som den af  $f$  frembragte  $\sigma$ -algebra. Bemærk at den afhænger af  $\mathcal{F}$ . En simpel overvejelse viser, at  $\sigma(f)$  er den mindste  $\sigma$ -algebra i  $E$ , som gør  $f$  målelig, som funktion ind i det målelige rum  $(F, \mathcal{F})$ , d.v.s.

$$\sigma(f) = \bigcap \mathcal{B}.$$

hvor  $\mathcal{B}$  varierer over alle  $\sigma$ -algebraer i  $E$ , hvor  $f$  er  $(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ -målelig.

Hvis  $\mathcal{F}$  er tællelig frembragt, gælder dette også  $\sigma(f)$ , thi ifølge det ovenstående er

$$\mathcal{F} = \sigma((A_n)_{n \geq 1}) \Rightarrow \sigma(f) = \sigma((f^{-1}(A_n))_{n \geq 1}).$$

Tilsvarende betegner  $\sigma((f_i)_{i \in I})$  den mindste  $\sigma$ -algebra i  $E$ , som gør en familie  $(f_i)_{i \in I}$  af funktioner målelige.  $f_i$  er her for ethvert  $i$  en funktion fra  $E$  ind i et måleligt rum  $(F_i, \mathcal{F}_i)$ . Her gælder derfor, at

$$\sigma((f_i)_{i \in I}) = \sigma(\{f_i^{-1}(A_i) \mid i \in I, A_i \in \mathcal{F}_i\}).$$

Hvis  $(F_1, \mathcal{F}_1)$  er endnu et måleligt rum og  $f : E \rightarrow F$  og  $g : F \rightarrow F_1$  er givne funktioner, følger af reglerne for dannelse af Urbillede, at

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \quad \text{for alle } B \subseteq F_1.$$

Dette viser alt i alt følgende vigtige resultater angående målelighed.

**M2** *Målelighed bevares ved sammensætning, d.v.s. hvis  $f$  er  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ -målelig, og  $g$  er  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_1)$ -målelig, så er  $g \circ f$   $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_1)$ -målelig.*

**M3**  *$f$  er  $(\mathcal{E}, \sigma(g))$ -målelig, hvis og kun hvis  $g \circ f$  er målelig m.h.t.  $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_1)$ .*

Den sidste regel generaliserer uændret til situationer med flere afbildninger.

Tilfældet  $(F, \mathcal{F}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  er særligt vigtigt, og giver derfor anledning til en speciel notation, idet mængden af målelige reelle funktioner defineret på  $(E, \mathcal{E})$  betegnes  $M(\mathcal{E})$ , d.v.s.

$$M(\mathcal{E}) := \{f : E \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ er } (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))\text{-målelig}\}.$$

Sammen med Lemma 3 viser M1, at der for  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  gælder

$$f \in M(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \{f \leq x\} \in \mathcal{E} \quad \text{for alle } x \in \mathbf{R}.$$

Ifølge gængs notation skrives kort  $\{f \leq x\}$  i stedet for  $f^{-1}((-\infty, x])$ . Benyttes andre frembringersystemer opnås ækvivalente beskrivelser af elementerne i  $M(\mathcal{E})$ . De begrænsede h.h.v. de ikke negative elementer i  $M(\mathcal{E})$ , bruges så ofte, at de får en selvstændig betegnelse

$$\text{bM}(\mathcal{E}) := \{f \in M(\mathcal{E}) \mid \exists r < \infty \mid f(e) \leq r \text{ for alle } e \in E\},$$

$$M(\mathcal{E})_+ := \{f \in M(\mathcal{E}) \mid f(e) \geq 0 \text{ for alle } e \in E\} \text{ og } \text{bM}(\mathcal{E})_+ := \text{bM}(\mathcal{E}) \cap M(\mathcal{E})_+.$$

I nedenstående Lemma 4 og 5 formuleres og vises forskellige egenskaber ved den vigtige funktionsklasse  $M(\mathcal{E})$ . Men for at forstå beviset for Lemma 4 må vi først studere to i sig selv interessante problemstillinger. Det drejer sig dels om målelighed i forbindelse med produktrum og dels om samspillet mellem målelighed og kontinuitet.

Vi starter med det sidste. I har i tidligere kurser studeret kontinuerte funktioner, så i sammenhængen her er det naturligt at undersøge disse ud fra et målelighedssynspunkt. Betragt derfor to målelige rum  $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$  og  $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$ , hvor  $(S_i, d_i)$ 'erne er metriske rum med tilhørende Borel  $\sigma$ -algebraer. De kontinuerte funktioner fra  $S_1$  ind i  $S_2$  er her en interessant klasse, og da kontinuitet af en funktion  $f : S_1 \rightarrow S_2$ , d.v.s.

$$\forall x \in S_1 \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_1(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

ækvivalent kan formuleres som

$$\forall x \in S_1 \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : b(x, \delta) \subseteq f^{-1}(b(f(x), \epsilon))$$

ses, at kontinuitet medfører, at  $f^{-1}(U)$  er åben i  $S_1$ , hvis  $U$  er åben i  $S_2$ . Som en konsekvens af M1 og definitionen på Borel  $\sigma$ -algebraen fås derfor.

**Sætning 1** Lad  $(S_i, d_i)$   $i = 1, 2$  betegne metriske rum. Da er enhver kontinuert funktion  $f : S_1 \rightarrow S_2$  Borel målelig, d.v.s.  $(\mathcal{B}(S_1), \mathcal{B}(S_2))$ -målelig.

**Øvelse 5.** Lad  $(S, d)$  betegne et metrisk rum. Vis at  $\mathcal{B}(S) = \sigma(C(S))$ , hvor

$$C(S) := \{f : S \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ kontinuert}\}.$$

D.v.s. en afbildning  $g$  fra et måleligt rum  $(E, \mathcal{E})$  ind i  $S$  er  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(S))$ -målelig, hvis og kun hvis  $f \circ g \in M(\mathcal{E})$  for  $f \in C(S)$ . Vink: For enhver lukket mængde  $F$  er funktionen  $x \mapsto d(x, F) := \inf_{y \in F} d(x, y)$  kontinuert og  $F = \{d(\cdot, F) = 0\}$ .  $\square$

Lad dernæst  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  og  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  være målelige rum og betragt produktrummet  $E_1 \times E_2$  udstyret med produkt  $\sigma$ -algebraen  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ . Definer *projektionsafbildningerne*  $p_{E_1}$  og  $p_{E_2}$  ved

$$p_{E_1}(e_1, e_2) := e_1 \quad \text{og} \quad p_{E_2}(e_1, e_2) := e_2 \quad \text{for alle } (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2.$$

Ligheden

$$A \times B = (A \times E_2) \cap (E_1 \times B) = p_{E_1}^{-1}(A) \cap p_{E_2}^{-1}(B) \quad \text{hvor } A \in \mathcal{E}_1 \text{ og } B \in \mathcal{E}_2,$$

viser, at  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma(p_{E_1}, p_{E_2})$ , d.v.s. projektionsafbildningerne frembringer produkt  $\sigma$ -algebraen. Resultatet generaliserer uændret til produktrum med mere end to faktorer. Kombineres dette med Sætning 1 fås for ethvert metrisk rum  $(S, d)$ , at hvis  $S^n$  udstyres med en produktmetrik, er

$$\mathcal{B}(S)^n \subseteq \mathcal{B}(S^n),$$

da de  $n$  projektionsafbildninger fra  $S^n$  ind i  $S$  er kontinuerte og dermed Borel målelige. Strukturen af produkt  $\sigma$ -algebraen giver endvidere anledning til flg. resultater vedrørende produktrum. For at lette overskueligheden formuleres påstandene kun for to faktorer.  $(E_i, \mathcal{E}_i)$  og  $(F_i, \mathcal{F}_i)$   $i = 1, 2$  betegner her målelige rum.

**M4**  $f = (f_1, f_2) : E \rightarrow F_1 \times F_2$  er  $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ -målelig, hvis og kun hvis koordinatfunktionerne  $f_i : E \rightarrow F_i$  er målelige m.h.t.  $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_i)$  for  $i = 1, 2$ .

**M5** Hvis  $g : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  er målelig m.h.t.  $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mathcal{F})$ , er

$$g(\cdot, e_2) : e \mapsto g(e, e_2) \quad \text{og} \quad g(e_1, \cdot) : e \mapsto g(e_1, e)$$

målelige fra  $E_1$  h.h.v.  $E_2$  ind i  $F$  for alle  $e_2 \in E_2$  og  $e_1 \in E_1$ . Specielt er for ethvert  $U \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$  sektionerne målelige, d.v.s. for alle  $e_1 \in E_1$  og  $e_2 \in E_2$  er

$$U(e_1) := \{e \in E_2 \mid (e_1, e) \in U\} \in \mathcal{E}_2 \quad \text{og} \quad U(e_2) := \{e \in E_1 \mid (e, e_2) \in U\} \in \mathcal{E}_1.$$

Bevis. M4 fås af M2 og M3, da  $f_i = p_{E_i} \circ f$  for  $i = 1, 2$ . Første halvdel af M5 følger også af M2, idet

$$g(e_1, \cdot) = g \circ \psi_{e_1} \quad \text{for } e_1 \in E_1 \quad \text{og} \quad g(\cdot, e_2) = g \circ \psi_{e_2} \quad \text{for } e_2 \in E_2,$$

hvor  $\psi_{e_i}$ 'erne er givet ved

$$\psi_{e_1}(e) = (e_1, e) \quad \text{for } e \in E_2 \quad \text{og} \quad \psi_{e_2}(e) = (e, e_2) \quad \text{for } e \in E_1,$$

og disse er ifølge M4 målelige m.h.t.  $(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$  h.h.v.  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ . Resten følger nu af lighederne

$$U(e_1) = \psi_{e_1}^{-1}(U) \quad \text{og} \quad U(e_2) = \psi_{e_2}^{-1}(U),$$

da  $\psi_{e_1}$  og  $\psi_{e_2}$ , som netop vist, er målelige fra  $E_2$  h.h.v.  $E_1$  ind i  $E_1 \times E_2$ .  $\diamond$

Da  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R})^n$  indeholder M4 flg. vigtige konsekvens.

**M6** Hvis  $f : E \rightarrow \mathbf{R}^n$  har koordinatfunktioner  $f_1, \dots, f_n$ , d.v.s.  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , gælder

$$f \text{ er } (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))\text{-målelig} \Leftrightarrow f_i \text{ er } (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))\text{-målelig for } i = 1, \dots, n.$$

Vi er nu i klar til at formulere og bevise Lemma 4.

**Lemma 4**  $M(\mathcal{E})$  er et reelt vektorrum, som yderligere er stabil under produkt og punktvis max og min dannelse. D.v.s. hvis  $f$  og  $g$  er elementer i  $M(\mathcal{E})$ , så gælder dette også  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $f \wedge g$ ,  $f \vee g$  og  $cf$  for alle  $c \in \mathbf{R}$ .

Bevis for Lemma 4. Da beviserne er identiske, nøjes vi med at vise måleligheden af  $f + g$ . Ifølge M4 er  $e \mapsto (f(e), g(e))$  målelig m.h.t.  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^2))$ , og da  $(x, y) \mapsto x + y$  er en kontinuert reel funktion på  $\mathbf{R}^2$  fås af Sætning 1, at sammensætningen, d.v.s.  $e \mapsto f(e) + g(e) = (f + g)(e)$ , ligger i  $M(\mathcal{E})$ .  $\diamond$

Stabiliteten under punktvis max og min betyder, at  $M(\mathcal{E}) = M(\mathcal{E})_+ - M(\mathcal{E})_+$ , thi for ethvert  $f \in M(\mathcal{E})$  definerer

$$f^+ := f \vee 0 \quad \text{og} \quad f^- := -(f \wedge 0)$$

to elementer i  $M(\mathcal{E})_+$ , som opfylder

$$f = f^+ - f^- \quad \text{og} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

$f^+$  og  $f^-$  kaldes h.h.v. den positive og negative del af  $f$ . Bemærk at  $f^+ = x^+(f)$  og  $f^- = x^-(f)$ , hvor  $x^+$  og  $x^-$  er de ikke-negative reelle kontinuerte funktioner

$$x^+ : x \mapsto x \vee 0 \quad \text{og} \quad x^- : x \mapsto -(x \wedge 0).$$

$C(S)$ -rum opfylder også Lemma 4, men som vi nu skal se, bevares målelighed i modsætning til kontinuitet under punktvis konvergens af følger.  $M(\mathcal{E})$  har nemlig yderligere flg. vigtige egenskaber.

**Lemma 5** *For enhver følge  $(f_n)_{n \geq 1}$  i  $M(\mathcal{E})$  er*

$$C((f_n)_{n \geq 1}) := \{e \in E \mid \lim_n f_n(e) \text{ eksisterer i } \mathbf{R}\} \in \sigma((f_n)_{n \geq 1}) \subseteq \mathcal{E};$$

og funktionen  $f_\infty : E \rightarrow \mathbf{R}$  defineret ved

$$f_\infty(e) := \begin{cases} \lim_n f_n(e) & \text{hvis } e \in C((f_n)_{n \geq 1}) \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

er  $\sigma((f_n)_{n \geq 1})$ -målelig, d.v.s. specielt er  $f_\infty \in M(\mathcal{E})$ .

Bemærkning. Anden del gælder uændret i ethvert metrisk rum  $(S, d)$  forudsat  $C((f_n)_{n \geq 1}) \in \mathcal{E}$ , hvorimod første del kræver, at  $(S, d)$  er fuldstændigt og separabelt. Nedenstående bevis gælder uændret i den mere generelle situation. Separabiliteten sikrer, at  $e \mapsto d(f(e), g(e)) \in M(\mathcal{E})$  for ethvert par af funktioner  $f$  og  $g$  fra  $E$  ind i  $S$ , som er målelige m.h.t.  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(S))$ . (Tænk over dette.)

Bevis. Lad  $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq M(\mathcal{E})$  være givet. Da  $\mathbf{R}$  er fuldstændigt, er

$$\begin{aligned} C((f_n)_{n \geq 1}) &= \{e \in E \mid (f_n(e))_{n \geq 1} \text{ er en Cauchy-følge i } \mathbf{R}\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{e \in E \mid |f_n(e) - f_m(e)| < 1/k\}, \end{aligned}$$

hvilket viser første del. Skrives kort  $C$  i stedet for  $C((f_n)_{n \geq 1})$ , er det, da

$$f_\infty^{-1}(B) = f_\infty^{-1}(B) \cap C \cup f_\infty^{-1}(B) \cap C^c \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}),$$

for at vise anden del nok at vise, at  $f_\infty^{-1}(F) \cap C \in \mathcal{E}$  for enhver lukket mængde  $F$  i  $\mathbf{R}$ , thi  $f_\infty^{-1}(F) \cap C^c$  er enten  $E$  eller  $\emptyset$ , da  $f_\infty$  er konstant lig 0 på  $C^c$ . Men betegner som ovenfor  $d(\cdot, F)$  den kontinuerte funktion

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} |x - y| \quad \text{for alle } x \in \mathbf{R}$$

og  $d(f_\infty, F)$  og  $d(f_n, F)$  sammensætningerne  $d(\cdot, F) \circ f_\infty$  og  $d(\cdot, F) \circ f_n$ , ses, da  $0 \leq d(f_n, F)(e) \rightarrow d(f_\infty, F)(e)$  for alle  $e \in C$ , at

$$f_\infty^{-1}(F) \cap C = \{d(f_\infty, F) = 0\} \cap C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{d(f_n, F) \leq 1/k\} \cap C.$$

Påstanden er derfor en konsekvens af, at  $d(f_n, F)$ 'erne alle er målelige.  $\diamond$

I forbindelse med integralteorien er det bekvemt at kunne betragte funktioner med værdier i de udvidede reelle tal, d.v.s. mængden  $\overline{\mathbf{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ . Udstyres  $\overline{\mathbf{R}}$  med  $\sigma$ -algebraen  $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$  frembragt af mængderne

$$\{\infty\}, \{-\infty\} \text{ og } (-\infty, x] \text{ for } x \in \mathbf{R}$$

betegner  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})$  mængden af  $\mathcal{E}$ -målelige funktioner med værdier i  $(\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$ .

Notationen  $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$  indikerer, at der findes en metrik  $\bar{d}$  på  $\overline{\mathbf{R}}$ , så at  $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$  er den tilhørende Borel  $\sigma$ -algebra.  $\bar{d}$  kan f.eks. vælges som

$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} |x - y| \wedge 1 & x, y \in \mathbf{R} \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Udnyttes M1 ses at en funktion  $f : E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  ligger i  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})$ , hvis og kun hvis

$$f = \infty \cdot \mathbf{1}_A + (-\infty) \cdot \mathbf{1}_B + h$$

hvor  $A, B \in \mathcal{E}$  er parvis disjunkte og  $h \in \mathbf{M}(\mathcal{E})$ .  $\mathbf{M}(\mathcal{E})$  kan derfor opfattes som en delmængde af  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})$ , og ved brug af de gængse udvidelser af regningsarterne  $+$  og  $\cdot$  samt  $\max$  og  $\min$  til  $\overline{\mathbf{R}}$  ses endvidere ved brug af Lemma 4, at

$$f, g \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E}) \Rightarrow f \cdot g, f \vee g \text{ og } f \wedge g \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E}).$$

$f + g$  ligger ligedes i  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})$ , hvis blot summen er punktvis veldefineret, d.v.s. hvis følgende gennemsnit er tomme

$$\{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\} \text{ og } \{f = -\infty\} \cap \{g = \infty\}.$$

Stabiliteten under  $\max$  og  $\min$  betyder, at dekompositionen i positiv og negativ del stadig er mulig, idet vi til ethvert  $f \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})$  tilordner to elementer

$$f^+ := f \vee 0 \text{ og } f^- := -(f \wedge 0)$$

i  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})_+$ , som igen opfylder  $f = f^+ - f^-$  og  $|f| = f^+ + f^-$ .

Det næste resultat kompletterer Lemma 5 og formuleres derfor som et korollar til dette.

**Korollar** Lad  $(f_n)_{n \geq 1}$  betegne en følge i  $\overline{M}(\mathcal{E})$ . Flg. funktioner er da elementer i  $\overline{M}(\mathcal{E})$ , d.v.s.  $\mathcal{E}$ -målelige med værdier i de udvidede reelle tal,

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n, \quad \liminf_n f_n,$$

hvor  $\limsup_n f_n := \inf_n(\sup_{k \geq n} f_k)$  og  $\liminf_n f_n := \sup_n(\inf_{k \geq n} f_k)$ .

Bevis. Det er nok at se på de to første, og disse følger af identiteterne

$$\{\sup_n f_n \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq x\} \quad \text{og} \quad \{\inf_n f_n < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n < x\} \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$$

samt lighederne

$$\{\sup_n f_n = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n = -\infty\} \quad \text{og} \quad \{\inf_n f_n = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n = \infty\}. \quad \diamond$$

**Øvelse 6.** Udnyt Korollaret til at give et bevis for Lemma 5 baseret på  $\liminf_n f_n$  og  $\limsup_n f_n$ .  $\square$

**Notation.** Til ethvert  $A \in \mathcal{E}$  tilordnes funktionen  $\mathbf{1}_A$ , kaldet *indikatorfunktionen* for mængden  $A$ , defineret ved

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in A \\ 0 & \text{hvis } x \in A^c. \end{cases}$$

Da  $\mathbf{1}_A$  kun antager værdierne 0 og 1 og  $A = \{\mathbf{1}_A = 1\}$  og  $A^c = \{\mathbf{1}_A = 0\}$ , er  $\mathbf{1}_A \in M(\mathcal{E})$ , og forbindelsen mellem en mængde og den tilhørende indikatorfunktion er enentydig. Her ud fra defineres de såkaldte *simple funktioner*, betegnet  $S(\mathcal{E})$ , som underrummet i  $M(\mathcal{E})$  frembragt af alle indikatorfunktioner, d.v.s.

$$f \in S(\mathcal{E}) \Leftrightarrow f = (\text{endelig}) \sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad A_i \in \mathcal{E}.$$

Opskrivningen er ikke entydig, og man kan altid finde en, hvor  $A_i$ 'erne udgør en endelig partition. Dette er en konsekvens af karakterisationen

$$S(\mathcal{E}) = \{f \in M(\mathcal{E}) \mid f(E) \text{ er en endelig mængde}\},$$

der tillige viser, at  $S(\mathcal{E})$  er stabil under produkt samt punktvis max og min, d.v.s. for alle  $f, g \in S(\mathcal{E})$  er

$$f \cdot g, \quad f \vee g \quad \text{og} \quad f \wedge g \in S(\mathcal{E}).$$

Skønt  $S(\mathcal{E})$  er en forholdsvis 'lille' mængde af funktioner, spiller den en væsentlig rolle. Dette skyldes ikke mindst følgende simple, men vigtige resultat. Korollaret følger umiddelbart af lemmaet ved opsplnitning i positiv og negativ del.

**Lemma 6** Lad  $f \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$  være givet. Definer for ethvert  $n \geq 1$

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n} (k-1)/2^n \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} < f \leq \frac{k}{2^n}\}} + n \cdot \mathbf{1}_{\{f > n\}}.$$

Da er  $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq S(\mathcal{E})_+$ , og  $f_n(e) \uparrow f(e)$  for alle  $e \in E$ . Hvis  $f$  er begrænset, d.v.s.  $0 \leq f \leq r < \infty$ , konvergerer  $f_n$ 'erne uniformt mod  $f$ , idet

$$\sup_{e \in E} |f(e) - f_n(e)| \leq 2^{-n} \quad \text{for } n \geq r,$$

**Korollar** For ethvert  $f \in \overline{M}(\mathcal{E})$  findes der en følge  $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq S(\mathcal{E})$ , så at  $f_n$ 'erne konvergerer punktvis mod  $f$ , og konvergensen sker uniformt, hvis  $f$  er begrænset, d.v.s. hvis  $0 \leq |f| \leq r < \infty$ .

Bevis for Lemma 6. Følger af at  $f_n = \phi_n(f)$  for  $n \geq 1$ , hvor  $\phi_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$  er givet ved

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} (k-1)/2^n \cdot \mathbf{1}_{](k-1)/2^n, k/2^n]}(x) + n \cdot \mathbf{1}_{]n, \infty[}(x) \quad x \in \mathbf{R} \quad n \geq 1. \quad \diamond$$

Til senere brug bemærkes, at

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{]k/2^n, \infty[}(x)$$

for alle  $x \in \mathbf{R}$  og  $n \geq 1$ . Dette beror på flg. simple omskrivning.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n2^n} (k-1) \cdot \mathbf{1}_{](k-1)/2^n, k/2^n]}(x) &= \sum_{k=2}^{n2^n} \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{](k-1)/2^n, k/2^n]}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n2^n-1} \sum_{k=j+1}^{n2^n} \mathbf{1}_{](k-1)/2^n, k/2^n]}(x) = \sum_{j=1}^{n2^n-1} \mathbf{1}_{]j/2^n, n]}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{]j/2^n, \infty[}(x) - n2^n \cdot \mathbf{1}_{]n, \infty[}(x). \end{aligned}$$

Følgende vigtige konsekvens af Lemma 6 formuleres i to udgaver.

- 1) En delmængde  $V \subseteq \overline{M}(\mathcal{E})_+$  udgør hele  $\overline{M}(\mathcal{E})_+$ , hvis
  - a<sub>1</sub>)  $V$  indeholder alle indikatorfunktioner.
  - b<sub>1</sub>)  $V$  er stabil under sum og multiplikation med positiv skalar.
  - c<sub>1</sub>)  $V$  er stabil under punktvis monoton konvergens, d.v.s.

$$(f_n)_{n \geq 1} \subseteq V \quad f_n \leq f_{n+1} \text{ for alle } n \Rightarrow \sup_n f_n \in V.$$

- 2) En delmængde  $V \subseteq M(\mathcal{E})$  udgør hele  $M(\mathcal{E})$ , hvis
- $a_2$ )  $V$  indeholder alle indikatorfunktioner.
  - $b_2$ )  $V$  er et vektorrum.
  - $c_2$ )  $V$  er stabil under punktvis monoton konvergens, forudsat grænsefunktionen er endelig, d.v.s.

$$\sup_n f_n \in V \text{ hvis } (f_n)_{n \geq 1} \subseteq V, f_n \leq f_{n+1} \text{ og } \{\sup_n f_n < \infty\} = E.$$

For at vise at alle elementer i  $M(\mathcal{E})$  har en given egenskab  $p$ , er det derfor nok at indse, at mængden

$$\{f \in M(\mathcal{E}) \mid f \text{ opfylder } p\}$$

opfylder punkterne  $a_2$ ),  $b_2$ ) og  $c_2$ ). Metoden, der er en funktionsudgave af Dynkin's Lemma og kendt under navnet "Standardbeviset", er yderst anvendelig. Den kan forfines på mange måder se f.eks. afsnit 1.49 i Hoffmann. En simplere men ofte anvendelig generalisation er indeholdt i flg. resultat.

**Monotone Klasse Lemma.**

Lad  $V$  betegne et reelt vektorrum bestående af begrænsede reelle funktioner defineret på  $E$ . Antag at  $V$  indeholder alle konstante funktioner samt er stabil under monoton voksende uniformt begrænset punktvis konvergens, d.v.s.

$$\sup_n f_n \in V \text{ hvis } (f_n)_{n \geq 1} \subseteq V \text{ og } f_n \leq f_{n+1} \leq M \text{ for et } M < \infty.$$

Da er  $bM(\sigma(\mathcal{H})) \subseteq V$  for enhver delmængde  $\mathcal{H} \subseteq V$ , som er stabil under multiplikation, d.v.s. opfylder at  $f \cdot g \in \mathcal{H}$  for alle  $f, g \in \mathcal{H}$ .

**Øvelse 7. Faktoriseringsætningen.**

Antag at  $\mathcal{E} = \sigma(g)$ , d.v.s.  $\mathcal{E} = g^{-1}(\mathcal{F})$ , hvor  $g$  er en funktion defineret på  $E$  med værdier i et måleligt rum  $(F, \mathcal{F})$ . Vis at

$$M(\mathcal{E}) = \{\varphi \circ g \mid \varphi \in M(\mathcal{F})\}.$$

Vink til  $\subseteq$ : Anvend Standardbeviset.  $\square$

**Øvelse 8.** Antag  $\mathcal{E} = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$  for en partition  $A_1, \dots, A_n$  af  $E$ . Vis ved brug af Faktoriseringsætningen, at

$$M(\mathcal{E}) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \mid a_i \in \mathbf{R} \ i = 1, \dots, n \right\}.$$

D.v.s. enhver  $\mathcal{E}$ -målelig funktion er konstant på  $A_i$ 'erne. Dette er et specialtilfælde af et generelt princip, som siger, at hvis  $\mathcal{F}$  er en  $\sigma$ -algebra og  $A \in \mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}$ -atom, d.v.s.

$$B \cap A = A \text{ eller } \emptyset \text{ for alle } B \in \mathcal{F},$$

da er enhver  $\mathcal{F}$ -målelig funktion konstant på  $A$ .  $\square$

### Mål.

I mange sammenhænge ønsker man at størrelsesangive mængder ved hjælp af ikke-negative reelle tal. Tænk f.eks. på arealet af plane figurer, rumfang af rumlige legemer eller sandsynligheder af hændelser. Det matematiske værktøj til en sådan måling er et såkaldt mål eller mere præcist et  $\sigma$ -additivt (synonymt tælleligt additivt) mål på en  $\sigma$ -algebra.

**Definition.** Lad  $(E, \mathcal{E})$  betegne et måleligt rum. En funktion  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  kaldes et *mål* på  $\mathcal{E}$ , hvis  $\mu(\emptyset) = 0$  og  $\mu$  er  $\sigma$ -additiv d.v.s.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{for parvis disjunkte } A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{E}.$$

Mængden af mål på  $\sigma$ -algebraen  $\mathcal{E}$  betegnes  $m(\mathcal{E})$ , og en simpel overvejelse viser, at  $m(\mathcal{E})$  er stabil under multiplikation med positiv skalar, endelig og tællelig sumdannelse samt under *restriktion*, d.v.s. for ethvert  $\mu \in m(\mathcal{E})$  og ethvert  $B \in \mathcal{E}$  er  $\mu_B \in m(\mathcal{E})$ , hvor

$$\mu_B(A) := \mu(A \cap B) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

Målene inddeles efter størrelse i h.h.t. flg. notation.

- $\mu$  er et *endeligt mål (sandsynlighedsmål)*, hvis  $\mu(E) < \infty$  ( $\mu(E) = 1$ ).
- $\mu$  er et  $\sigma$ -endeligt mål, hvis  $\exists (A_n) \subseteq \mathcal{E} : \bigcup_n A_n = E$  og  $\mu(A_n) < \infty$  for alle  $n$ .
- $\mu$  er et *sum-endeligt mål*, hvis  $\mu = \sum_i \mu_i$ , hvor  $\mu_i$ 'erne er endelige mål på  $\mathcal{E}$ .

Endelige mål er klart  $\sigma$ -endelige, og ethvert  $\sigma$ -endeligt mål er sum-endeligt, thi hvis  $\mu$  er  $\sigma$ -endeligt og  $(A_n)$  en tilhørende overdækning bestående af mængder med endeligt mål, så er  $\mu = \sum_{i \geq 1} \mu_{B_i}$  en beskrivelse af  $\mu$ , som en sum af endelige mål, hvor  $(B_n)$  er en disjunktgering af  $(A_n)$ , f.eks.

$$B_1 := A_1 \quad \text{og} \quad B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \quad n \geq 1.$$

Udover disse operationer indenfor  $m(\mathcal{E})$  kan mål flyttes fra et måleligt rum til et andet ved hjælp af en målelig afbildning. Lad hertil  $(F, \mathcal{F})$  betegne endnu et måleligt rum og  $f : E \rightarrow F$  en målelig afbildning. Da Urbilledet af en parvis disjunkt foreningsmængde er den parvise disjunkte foreningsmængde af de enkelte Urbilleder, definerer fastsættelsen

$$\mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)) \quad B \in \mathcal{F}$$

for ethvert  $\mu \in m(\mathcal{E})$  et mål på  $(F, \mathcal{F})$ .  $\mu_f$  (mange forfattere bruger betegnelsen  $\mu \circ f^{-1}$ ) kaldes *billedmålet* af  $\mu$  ved afbildningen  $f$ . D.v.s. en målelig afbildning

$f$  inducerer en afbildning fra  $m(\mathcal{E})$  ind i  $m(\mathcal{F})$ . Et endeligt mål afbildes herved klart i et endeligt mål og ligeledes for sum-endelige, hvorimod  $\sigma$ -endelighed ikke nødvendigvis bevares under dannelse af billedmål.

Spørgsmålet om eksistens af mål med givne egenskaber udsættes til et senere kapitel. Men vi vil dog straks indføre de såkaldte punktmål. I modsætning til de fleste mere interessante mål, kan disse defineres på hele  $2^E$ .

**Notation.** For alle  $e \in E$  betegner  $\delta_e$  afbildningen fra  $2^E$  ind i  $\mathbf{R}_+$  givet ved

$$\delta_e(A) := \mathbf{1}_A(e) \quad \text{for alle } A \in 2^E.$$

$\delta_e$  kaldes *punktmålet* (Dirac målet) i punktet  $e$ . Et mål af formen  $\sum_i a_i \cdot \delta_{e_i}$ , hvor  $a_i > 0$  og  $e_i \in E$  for  $i \geq 1$  kaldes et *diskret* mål. Er summen endelig, bruger man ofte betegnelsen *simpelt* mål. (Læseren bør eftervise, at der er tale om mål på  $2^E$ )

Det er vigtigt straks at afdække de generelle egenskaber ved mål, der ligger gemt i ovenstående definition. Resultaterne samles i flg. lemma.

**Lemma 7** *Lad  $(E, \mathcal{E})$  betegne et måleligt rum. Ethvert element  $\mu$  i  $m(\mathcal{E})$  har da flg. egenskaber.*

1)  $\mu$  er endelig additiv, d.v.s.  $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$  for ethvert endeligt sæt af parvis disjunkte  $A_1, \dots, A_n$  i  $\mathcal{E}$ .

2)  $\mu$  er voksende, d.v.s.  $\mu(A) \leq \mu(B)$  for ethvert par  $A \subseteq B$  af mængder i  $\mathcal{E}$ .

3)  $\mu$  er opad kontinuert, d.v.s.  $\mu(A_n) \uparrow \mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$  for enhver følge  $(A_n)_{n \geq 1}$  i  $\mathcal{E}$ , så at  $A_n \subseteq A_{n+1}$  for alle  $n$ .

4)  $\mu$  er nedad kontinuert på  $\mu$ -endelige mængder, d.v.s.  $\mu(A_n) \downarrow \mu(\bigcap_{n \geq 1} A_n)$  for enhver følge  $(A_n)_{n \geq 1}$  i  $\mathcal{E}$ , så at  $A_n \supseteq A_{n+1}$  for alle  $n$  og  $\inf_n \mu(A_n) < \infty$ .

5)  $\mu$  er endelig- og tællelig subadditiv, d.v.s.  $\mu(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$  for enhver endelig eller tællelig familie  $(A_i)$  i  $\mathcal{E}$ .

Bevis. 1) fås af den tællelige additivitet anvendt på  $A_1, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \dots$ , og 2) af ligheden  $B = A \cup (B \setminus A)$ , som gælder da  $A \subseteq B$ .

3) Definer  $B_1 := A_1$  og  $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$  for  $i \geq 2$ , d.v.s.  $B_i$ 'erne er parvis disjunkte, og

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{og} \quad \bigcup_{i=1}^n B_i = A_n \quad \text{for alle } n.$$

Ifølge den endelige og tællelige additivitet gælder derfor, at

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_n \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \lim_n \mu(A_n).$$

4) Antag uden tab af generalitet, at  $\mu(A_1) < \infty$ . Definer  $B_n := A_1 \setminus A_n$   $n \geq 1$ .  $B_n$ 'erne er da voksende, og  $B_n \uparrow A_1 \setminus \bigcap_{n \geq 1} A_n$ . Ifølge 3) og den endelige additivitet

gælder derfor, at

$$\mu(A_1) - \mu(A_n) = \mu(B_n) \uparrow \mu(A_1 \setminus \bigcap_{n \geq 1} A_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n \geq 1} A_n),$$

og dermed  $\mu(A_n) \downarrow \mu(\bigcap_{n \geq 1} A_n)$ . 5) Ifølge 3) er det nok at vise endelig subadditivitet, d.v.s. pr. induktion nok at vise at

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Men dette følger af 1) og 2) samt ligheden  $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ .  $\diamond$

**Lemma 8 Det første Borel-Cantelli Lemma.**

Lad  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$  og  $\mu \in \mathfrak{m}(\mathcal{E})$  være givet. Da gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup_n A_n) = 0 \quad \text{hvor} \quad \limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Bemærk at  $\limsup_n A_n = \{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \infty\} = \{e \mid e \in A_n \text{ for uendelig mange } n\}$ .

Bevis. Sæt  $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$  for alle  $n \geq 1$ . Da er  $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$  og  $B_{n+1} \subseteq B_n$  for alle  $n$ , og da

$$\mu(B_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

ifølge subadditiviteten, fås af den viste udgave af 'nedad kontinuitet', at

$$\mu(\limsup_n A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_n \mu(B_n) \leq \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) = 0.$$

**Øvelse 9.** Vis at  $\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n)$ , hvis  $\mu$  er et endeligt mål, eller mere generelt hvis  $\mu(\bigcup_n A_n) < \infty$ .  $\square$

Præcisering af et mål  $\mu$  kræver i princippet kendskab til dets værdi på ethvert element i  $\mathcal{E}$ . Men  $\sigma$ -additiviteten bevirker, at mindre kan gøre det, thi som konsekvens af Dynkin's Lemma gælder flg. vigtige entydighedsudsagn.

**Proposition 2** To endelige mål  $\mu$  og  $\nu$  på  $\mathcal{E}$  med samme totale masse, d.v.s.  $\mu(E) = \nu(E)$ , er identiske, hvis de stemmer overens på et mængdesystem  $\mathcal{G}$ , som er stabil under endelig gennemsnit og frembringer  $\mathcal{E}$ , d.v.s.  $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$  og  $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$ .

**Korollar** To mål  $\mu$  og  $\nu$  på  $\mathcal{E}$  er identiske, hvis de stemmer overens på et mængdesystem  $\mathcal{G}$ , som er stabil under endelig gennemsnit, frembringer  $\mathcal{E}$  og indeholder en følge  $(G_n)_{n \geq 1}$ , så at  $\mu(G_n) < \infty$  for alle  $n \geq 1$ , og  $G_n \uparrow E$ , d.v.s.  $G_n \subseteq G_{n+1}$  og  $E = \bigcup_n G_n$ .

Bevis. Ifølge antagelsen om samme totale masse og egenskaberne ved mål er

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{E} \mid \mu(B) = \nu(B)\}$$

et  $d$ -system, og da  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$  er  $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}$ , d.v.s.  $\mu = \nu$ . Vedrørende korollaret viser Proposition 2, at restriktionerne  $\mu_{G_n}$  og  $\nu_{G_n}$  er ens for alle  $n$ . Heraf fås identiteten  $\mu = \nu$  ved grænseovergang, thi da mål er opad kontinuerte, konvergerer  $\mu_{G_n}(A) = \mu(A \cap G_n) \uparrow \mu(A)$  og tilsvarende  $\nu_{G_n}(A) \uparrow \nu(A)$  for alle  $A \in \mathcal{E}$ .  $\diamond$

Ved at kombinere Proposition 2 og Lemma 3 ses, at et ethvert endeligt Borel mål  $\mu$  på  $\mathbf{R}$  h.h.v.  $\mathbf{R}^n$  er entydigt bestemt ved funktionen

$$x \mapsto \mu((-\infty, x]) \quad \text{h.h.v.} \quad \underline{x} \mapsto \mu\left(\prod_{i=1}^n (-\infty, x_i]\right).$$

Med baggrund i Proposition 2 har flg. definitioner god mening.

**Definition.** For ethvert  $n$  betegnes med  $\lambda_n$  det entydigt bestemte  $\sigma$ -endelige mål på  $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$ , som opfylder

$$\lambda_n\left(\prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[ \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad \text{for alle } a_i < b_i \quad i = 1, \dots, n.$$

$\lambda_n$  kaldes *Lebesgue målet* på  $\mathbf{R}^n$ , men i dimensionerne 1, 2 og 3 bruges ofte betegnelserne *længde-*, *areal-* eller *rumfangsmålet*. Bemærk at entydigheden sikrer, at  $\lambda_n$ 'erne er *translationsinvariante*, d.v.s.

$$\lambda_n(A) = \lambda_n(A + \underline{x}) \quad \text{for alle } \underline{x} \in \mathbf{R}^n \text{ og } A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n).$$

**Øvelse 10.** Vis at  $\lambda_n \circ m_r^{-1} = r^{-n} \cdot \lambda_n$ , hvor  $m_r$  for  $r > 0$  er afbildningen i  $\mathbf{R}^n$  svarende til koordinatvis multiplikation med  $r$ , d.v.s.  $m_r(\underline{x}) = r \underline{x}$  for  $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ .  $\square$

**Definition.** Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  og  $(F, \mathcal{F}, \nu)$  betegne  $\sigma$ -endelige målrum.  $\mu \otimes \nu$ , omtalt som *produktmålet* med *marginaler*  $\mu$  og  $\nu$ , betegner da det entydigt bestemte  $\sigma$ -endelige mål på  $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ , som opfylder

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}.$$

Tilsvarende betegner  $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$  det entydigt bestemte  $\sigma$ -endelige mål på produkttrummet  $(E_1 \times \dots \times E_n, \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n)$ , som opfylder

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_n)$$

for alle  $A_i \in \mathcal{E}_i \quad i = 1, \dots, n$ .  $(E_i, \mathcal{E}_i, \mu_i)_{1 \leq i \leq n}$  er her givne  $\sigma$ -endelige målrum.

**Øvelse 11.** Vis at  $\lambda_{n+1} = \lambda_n \otimes \lambda_1 = \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_1 (= \lambda_1^{(n+1)\otimes})$  for alle  $n$ .  $\square$

Entydigheden er som nævnt klar, hvorimod eksistensen er uafklaret. Vi skal dog senere se, at både Lebesgue målene og de indførte produktmål vitterligt eksisterer.

Som allerede antydtes udnyttedes et mål  $\mu$  til at angive størrelse af mængder, sådan at forstå at jo større  $\mu(A)$  er, des 'større' er  $A$ . Det er derfor naturligt, at mængder med mål 0 anses for at være små. Dette giver anledning til flg. notation.

**Notation.** Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et målrum. En delmængde  $N \subseteq E$  siges at være en  $\mu$ -nulmængde, hvis der findes et  $N_0 \in \mathcal{E}$ , så at  $N \subseteq N_0$  og  $\mu(N_0) = 0$ .

Mængden af alle  $\mu$ -nulmængder betegnes  $\mathcal{N}_\mu$ , d.v.s.

$$\mathcal{N}_\mu := \{N \subseteq E \mid N \text{ er en } \mu\text{-nulmængde}\}.$$

Læseren opfordres til at overveje, at

$$\emptyset \in \mathcal{N}_\mu, \quad \mathcal{N}_\mu \cap \mathcal{E} = \{N \in \mathcal{E} \mid \mu(N) = 0\} \quad \text{og} \quad \mathcal{N}_\mu \text{ er } \bigcup\text{-stabil}.$$

Endvidere er enhver delmængde af en  $\mu$ -nulmængde igen en  $\mu$ -nulmængde.

Med dette begreb på plads siges en egenskab  $p(e)$  afhængig af punkter  $e$  i  $E$  at holde  $\mu$ -næsten overalt ( $\mu$ -n.o.) eller synonymt for  $\mu$ -næsten alle ( $\mu$ -n.a.)  $e$ , hvis

$$\{e \in E \mid p(e) \text{ ikke sand}\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

F.eks. hvis  $f$  og  $g$  er funktioner defineret på  $E$ , betyder  $f = g$   $\mu$ -n.o. derfor, at  $\{e \in E \mid f(e) \neq g(e)\}$  er en  $\mu$ -nulmængde, og tilsvarende betyder  $f \leq g$   $\mu$ -n.o. for reelle funktioner  $f$  og  $g$ , at  $\{e \in E \mid f(e) > g(e)\}$  er en  $\mu$ -nulmængde. Endvidere betegnes for funktioner  $(f_n)_{n \geq 1}$  og  $f$  defineret på  $E$  med værdier i et metrisk rum  $(S, d)$  med  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -n.o., at

$$\{e \in E \mid f_n(e) \rightarrow f(e) \text{ i } d\text{-metrikken}\}^c \in \mathcal{N}_\mu.$$

Notation a'la  $f_n \uparrow f$   $\mu$ -n.o. for reelle funktioner betyder altså, at  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -n.o. samt at  $f_n \leq f_{n+1}$   $\mu$ -n.o. for alle  $n$ . Sidste del kan, da  $\mathcal{N}_\mu$  er  $\bigcup$ -stabil, ækvivalent udtrykkes som, at  $f_n \leq f_{n+1}$  for alle  $n$   $\mu$ -n.o. Det overlades trygt til læseren at tolke andre lignende udtryk.

Som vist i Lemma 5 bevares målelighed ved punktvis konvergens. Dette gælder generelt ikke for konvergens n.o. Men en simpel men vigtig konsekvens af Lemma 5 viser, at hvis

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o. for en følge } (f_n)_{n \geq 1} \subseteq M(\mathcal{E}) \text{ og en funktion } f : E \rightarrow \mathbf{R},$$

så gælder for det i Lemma 5 konstruerede  $f_\infty$ , at  $f = f_\infty$   $\mu$ -n.o. og

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ } \mu\text{-n.o.}$$

Skønt nulmængder i mange sammenhænge anses for at være små og betydningsløse, spiller de en ikke ringe rolle i målteorien. De giver blandt andet anledning til følgende relationer mellem forskellige elementer i  $m(\mathcal{E})$ .

**Notation.** Lad  $\mu$  og  $\nu$  betegne elementer i  $m(\mathcal{E})$ .  $\nu$  siges da at være  $\mu$ -satureret, hvis  $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ , hvilket ækvivalent kan formuleres som

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \text{ for } A \in \mathcal{E}.$$

Hvis  $\mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}_\mu$  siges  $\mu$  og  $\nu$  at være *ækvivalente* (skrives  $\mu \approx \nu$ ); og  $\mu$  og  $\nu$  siges at være *singulære* (skrives  $\mu \perp \nu$ ), hvis der findes et  $A \in \mathcal{E}$ , så at  $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$ , d.v.s. en målelig mængde  $A$ , så at

$$A \in \mathcal{N}_\mu \text{ og } A^c \in \mathcal{N}_\nu.$$

For  $\sigma$ -endelige mål er saturering identisk med det bedre kendte begreb *absolut kontinuitet*, som vi senere skal indføre.

$\nu$  er specielt  $\mu$ -satureret, hvis  $\nu$  er  $\mu$ -kontinuert, d.v.s. hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mu(A) \leq \delta \Rightarrow \nu(A) \leq \epsilon \text{ for } A \in \mathcal{E}$$

eller ækvivalent

$$\lim_n \mu(A_n) = 0 \Rightarrow \lim_n \nu(A_n) = 0 \text{ for enhver følge } (A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}.$$

$\mu$ -kontinuitet er generelt stærkere end inklusionen  $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ , men ensbetydende hermed, hvis  $\nu$  er et endeligt mål, idet der gælder

$$\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu \text{ og } \nu \text{ endeligt mål} \Rightarrow \nu \text{ er } \mu\text{-kontinuert.}$$

**Øvelse 12.** Vis dette. Vink: Argumenter modsætningsvis, d.v.s. antag der findes et  $\epsilon > 0$  og mængder  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ , så at

$$\mu(A_n) \leq 1/n^2 \text{ og } \nu(A_n) > \epsilon \text{ for alle } n.$$

Betragt nu  $\limsup_n A_n$  og udled en modstrid.  $\square$

I denne sammenhæng er flg. resultat af en vis interesse.

**Proposition 3** Lad  $\mu$  og  $\nu$  betegne elementer i  $m(\mathcal{E})$ , så at  $\nu$  er sum-endelig. Da findes der to mål  $\nu_a$  og  $\nu_s$  i  $m(\mathcal{E})$ , så at  $\nu = \nu_a + \nu_s$ , og  $\nu_a$  er  $\mu$ -satureret, og  $\nu_s$  og  $\mu$  er singulære.  $(\nu_a, \nu_s)$  kaldes Lebesgue dekompositionen af  $\nu$  m.h.t.  $\mu$ .

Bevis. Da både  $\{m \in m(\mathcal{E}) \mid \mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_m\}$  og  $\{m \in m(\mathcal{E}) \mid m \perp \mu\}$  er stabile under sum, kan vi uden tab af generalitet antage, at  $\nu$  er et endeligt mål. Definer

$$r := \sup\{\nu(A) \mid A \in \mathcal{E}, \mu(A) = 0\}$$

og vælg  $(A_n) \subseteq \mathcal{E}$ , så at  $\mu(A_n) = 0$  for alle  $n$  og  $\sup_n \nu(A_n) = r$ . Definer

$$\nu_a := \nu_{A^c} \text{ og } \nu_s := \nu_A.$$

hvor  $A := \bigcup_n A_n$ , d.v.s.  $\mu(A) = 0$  og  $\nu(A) = r$  samt  $\nu = \nu_a + \nu_s$ . Da  $\nu_s(A^c) = 0$ , er  $\nu_s$  og  $\mu$  singulære. For at vise, at  $\nu_a$  er  $\mu$ -satureret, betragtes et  $B \in \mathcal{E}$  med  $\mu(B) = 0$ . Vi skal vise, at  $\nu_a(B) = \nu(B \cap A^c) = 0$ . Men hvis  $\nu(B \cap A^c) > 0$  er

$$\nu(A \cup (B \cap A^c)) = \nu(A) + \nu(B \cap A^c) > \nu(A) = r,$$

hvilket strider mod definitionen på  $r$ , da  $\mu(A \cup (B \cap A^c)) = 0$ .  $\diamond$

Bemærkning. Dekompositionen  $\nu = \nu_a + \nu_s$  er entydig i den forstand, at hvis  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ , hvor  $\nu_1$  er  $\mu$ -satureret, og  $\nu_2$  og  $\mu$  er singulære, så er  $\nu_1 = \nu_a$  og  $\nu_2 = \nu_s$ . (eftersvis dette)

**Øvelse 13.** Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  være et målrum og  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$  en algebra, så at  $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$ . Vis at

$$\forall \epsilon > 0 \forall B \in \mathcal{E} \exists B_\epsilon \in \mathcal{A} : \mu(B \Delta B_\epsilon) < \epsilon.$$

Vink: Betragt

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{B \in \mathcal{E} \mid \forall \epsilon > 0 \exists B_\epsilon \in \mathcal{A} : \mu(B \Delta B_\epsilon) < \epsilon\}.$$

Overvej at  $\tilde{\mathcal{A}}$  er C-stabil samt  $\uparrow$ -stabil. Slut derefter ved hjælp af Øvelse 2. Vis endvidere at

$$\sigma(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{N}_\mu) = \{B \subseteq E \mid \exists B' \in \mathcal{E}_1 : \mu(B \Delta B') = 0\}$$

for enhver del- $\sigma$ -algebra  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$ .  $\square$

**Øvelse 14.** Lad  $\mu$  være et mål på  $(E, \mathcal{E})$ . Definer  $I : S(\mathcal{E})_+ \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  ved

$$I(f) := \sum_i a_i \cdot \mu(A_i),$$

hvis  $f = \sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$  hvor summen er endelig,  $a_i$ 'erne ikke-negative og  $A_i$ 'erne parvis disjunkte. Overvej at  $I$  er vel defineret.

Vis dernæst at  $I$  er positiv additiv, d.v.s.

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$$

for alle  $f, g \in S(\mathcal{E})_+$  og  $a, b \in \mathbf{R}_+$ .  $\square$

### Mål på metriske rum.

Lad  $(S, d)$  være et metrisk rum og  $\mathcal{B}(S)$  de tilhørende Borel mængder. Da  $\mathcal{B}(S)$  pr. definition er frembragt af mængden af åbne h.h.v. mængden af lukkede delmængder af  $S$ , er ethvert endeligt Borel mål ifølge Proposition 2 entydigt bestemt ved sine værdier på de åbne h.h.v. de lukkede mængder, da begge disse mængdesystemer er lukkede under endelig gennemsnit. Dette kan præciseres, idet der gælder.

**Proposition 4** *Lad  $\mu$  betegne et endeligt mål på  $(S, \mathcal{B}(S))$ . Da gælder for ethvert  $A \in \mathcal{B}(S)$  flg. ligheder*

$$\sup\{\mu(F) \mid F \subseteq A, F \text{ lukket}\} = \mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ åben}\}.$$

Bemærk at der trivielt gælder  $\underline{\mu}(A) \leq \mu(A) \leq \bar{\mu}(A)$ , hvor for alle  $A \in \mathcal{B}(S)$

$$\underline{\mu}(A) := \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq A, F \text{ lukket}\} \quad \text{og} \quad \bar{\mu}(A) := \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ åben}\}.$$

Resultatet bekrives ofte ved at sige, at  $\mu$  er *indre regulær* m.h.t. de lukkede mængder og *ydre regulær* m.h.t. de åbne mængder. Ved restriktion ses, at resultatet i tilfældet  $S = \mathbf{R}$  gælder uændret for ethvert mål, som er endelig på ethvert endeligt interval, d.v.s. specielt for Lebesgue målet.

Bevis. Vi skal vise, at  $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(S) \mid \underline{\mu}(A) = \mu(A) = \bar{\mu}(A)\}$  er en  $\sigma$ -algebra, der indeholder alle lukkede mængder. Bemærk at  $A$  ligger i  $\mathcal{A}$ , hvis og kun hvis der for alle  $\epsilon > 0$  findes en åben mængde  $U_\epsilon$  og en lukket mængde  $F_\epsilon$  så at

$$F_\epsilon \subseteq A \subseteq U_\epsilon \quad \text{og} \quad (\mu(U_\epsilon) - \mu(A)) \vee (\mu(A) - \mu(F_\epsilon)) < \epsilon.$$

$\mathcal{A}$  er stabil under komplementærmængde dannelse for hvis  $A \in \mathcal{A}$  og for et givent  $\epsilon > 0$   $F_\epsilon$  lukket og  $U_\epsilon$  åben er valgt, så at

$$F_\epsilon \subseteq A \subseteq U_\epsilon \quad \text{og} \quad (\mu(U_\epsilon) - \mu(A)) \vee (\mu(A) - \mu(F_\epsilon)) < \epsilon,$$

så er  $U_\epsilon^c$  lukket og  $F_\epsilon^c$  åben og  $U_\epsilon^c \subseteq A^c \subseteq F_\epsilon^c$  samt

$$(\mu(F_\epsilon^c) - \mu(A^c)) \vee (\mu(A^c) - \mu(U_\epsilon^c)) = (\mu(U_\epsilon) - \mu(A)) \vee (\mu(A) - \mu(F_\epsilon)) < \epsilon,$$

da  $\mu(B^c) = \mu(S) - \mu(B)$  for alle  $B \in \mathcal{B}(S)$ .  $\mathcal{A}$  indeholder enhver lukket mængde, for er  $F$  lukket, er  $F$  et aftagende tællelig gennemsnit af åbne mængder, f.eks.

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid d(x, F) < 1/n\},$$

og derfor element i  $\mathcal{A}$ , da  $\mu$  er nedad kontinuert. Vi mangler dermed kun stabiliteten under tællelig foreningsmængde dannelse. Lad  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$  samt  $\epsilon > 0$  være givet. Vælg for ethvert  $n \geq 1$   $F_{n,\epsilon}$  lukket og  $U_{n,\epsilon}$  åben, så at

$$F_{n,\epsilon} \subseteq A_n \subseteq U_{n,\epsilon} \quad \text{og} \quad (\mu(U_{n,\epsilon}) - \mu(A_n)) \vee (\mu(A_n) - \mu(F_{n,\epsilon})) \leq \epsilon \cdot 2^{-(n+1)}.$$

Sæt

$$U_\epsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{n,\epsilon} \text{ og } F_\epsilon := \bigcup_{n=1}^{n_0} F_{n,\epsilon}, \text{ hvor } n_0 \geq 1 : \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) < \epsilon/2.$$

$U_\epsilon$  er da åben,  $F_\epsilon$  lukket og  $F_\epsilon \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq U_\epsilon$ , d.v.s. resultatet da

$$U_\epsilon \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_{n,\epsilon} \setminus A_n) \text{ og } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus F_\epsilon \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{n_0} (A_n \setminus F_{n,\epsilon})$$

og dermed

$$\begin{aligned} & (\mu(U_\epsilon) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) \vee (\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \mu(F_\epsilon)) \leq \\ & \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu(U_{n,\epsilon}) - \mu(A_n))\right) \vee \left(\mu(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n) + \sum_{n=1}^{n_0} (\mu(A_n) - \mu(F_{n,\epsilon}))\right) < \epsilon. \quad \diamond \end{aligned}$$

Som det er bekendt fra  $\mathbf{R}^n$ , siges en delmængde  $K$  af et metrisk rum  $(S, d)$  at være *kompakt*, hvis enhver punktfølge  $(x_n)_{n \geq 1}$  i  $K$  indeholder en delfølge  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ , som konvergerer mod et punkt i  $K$ . I  $\mathbf{R}^n$  er de kompakte mængder netop de lukkede og begrænsede mængder. Da kompaktheden defineres ved hjælp af konvergens af følger bevarer det under skift til en ækvivalent metrik, og en simpel overvejelse viser, at kompakte mængder generelt er lukkede, samt opfylder

$$K \text{ kompakt og } F \text{ lukket} \Rightarrow K \cap F \text{ kompakt}$$

og

$$K_1 \text{ og } K_2 \text{ kompakte} \Rightarrow K_1 \cup K_2 \text{ kompakt.}$$

Hvis  $(S, d)$  er et fuldstændigt metrisk rum, gælder flg. alternative kompaktheds karakterisation.

$$K \subseteq S \text{ er kompakt} \Leftrightarrow K \text{ er lukket og } d\text{-total begrænset,}$$

hvor en delmængde  $A \subseteq S$  siges at være *d-total begrænset*, hvis  $A$  kan overdækkes med endelig mange kugler med vilkårlig lille radius, d.v.s.

$$\forall \epsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_n \in A : A \subseteq \bigcup_{k=1}^n b(x_k, \epsilon).$$

Kompakthedsbegrebet giver anledning til en skærpelse af ovenstående resultat.

**Korollar** Lad  $(S, d)$  være et polsk rum, d.v.s. et metrisk rum, hvor der findes en ækvivalent separabel fuldstændig metrik. Da er ethvert endeligt Borel mål  $\mu$  indre regulær m.h.t. de kompakte mængder, d.v.s. for alle  $A \in \mathcal{B}(S)$  er

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}.$$

Bevis. Da kompakthed, separabilitet og Borel  $\sigma$ -algebra bevares ved overgang til en ækvivalent metrik, kan og vil vi antage, at  $d$  er fuldstændig. Set i lyset af den ovenfor viste regularitet m.h.t. lukkede mængder er det nok at vise, at

$$\mu(F) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq F \text{ kompakt}\}$$

for enhver lukket delmængde  $F \subseteq S$ . Men hertil er det nok at betragte tilfældet  $F = S$ , d.v.s. vise

$$\mu(S) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq S \text{ kompakt}\},$$

thi for enhver kompakt mængde  $K$  og enhver lukket mængde  $F$  er

$$K \cap F \text{ kompakt og } F \setminus (K \cap F) \subseteq S \setminus K.$$

Lad  $\epsilon > 0$  være givet og lad  $(x_i)_{i \geq 1}$  betegne en følge af punkter, som er tæt i  $S$ . Tætheden betyder, at

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{b(x_i, 1/n)}$$

for ethvert  $n$ , hvor  $\overline{b(x_i, 1/n)}$  betegner den lukkede kugle med centrum  $x_i$  og radius  $1/n$ , og da  $\mu$  er opad kontinuert, findes der for ethvert  $n \geq 1$  et  $k_n \geq 1$ , så at

$$\mu \left( \left( \bigcup_{i=1}^{k_n} \overline{b(x_i, 1/n)} \right)^c \right) \leq \epsilon \cdot 2^{-n}.$$

Betragt nu mængden

$$K_\epsilon := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \overline{b(x_i, 1/n)}.$$

$K_\epsilon$  er pr. definition lukket og total begrænset og derfor, da rummet er polsk, kompakt ifølge ovenstående karakterisation; og da

$$\mu(S) - \mu(K_\epsilon) = \mu(K_\epsilon^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left( \left( \bigcup_{i=1}^{k_n} \overline{b(x_i, 1/n)} \right)^c \right) \leq \epsilon$$

er påstanden vist. ◇

Borel  $\sigma$ -algebraen i et separabelt metrisk rum er, som tidligere vist, frembragt af mængden af kugler. Det er derfor naturligt at spørge om, hvorvidt et mål er entydigt bestemt ved sine værdier på kugler. Spørgsmålet er generelt vanskeligt at besvare, da mængden af kugler er ikke stabil under endelig gennemsnit. Men vi skal senere vise, at ethvert endeligt Borel mål i  $\mathbf{R}^n$  er entydigt bestemt ved sine værdier på Euklidiske kugler.

### Integralet, konstruktion og egenskaber.

Lad i det følgende  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et vilkårligt *målrum*, d.v.s.  $(E, \mathcal{E})$  er et måleligt rum og  $\mu$  et mål på  $\mathcal{E}$ . Vi skal i dette afsnit konstruere det såkaldte integral m.h.t.  $\mu$ . Integralafbildningen vil senere blive betegnet

$$f \mapsto \int f d\mu,$$

men på de næste par sider skrives kort  $I$ . Da integralet er stærkt målafhængig, ville en notation som  $I_\mu$  være mere korrekt. Det er godt at tænke på et integral som et redskab til at måle størrelsen af funktioner, på samme måde som et mål angiver størrelsen af mængder.

**Definition.** Et *integral* m.h.t.  $\mu$  er en afbildning  $I$  fra  $\overline{M}(\mathcal{E})_+ \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  med flg. egenskaber.  $g, f$  og  $(f_n)_{n \geq 1}$  betegner her elementer i  $\overline{M}(\mathcal{E})_+$ .

- a)  $I$  er *positiv additiv*, d.v.s.  $I(af + bg) = a \cdot I(f) + b \cdot I(g)$  for  $a, b \in \mathbf{R}_+$ .
- b)  $I$  *udvider*  $\mu$ , d.v.s.  $I(\mathbf{1}_A) = \mu(A)$  for alle  $A \in \mathcal{E}$ .
- c)  $I$  er *voksende kontinuert*, d.v.s.  $I(f) = \sup_n I(f_n)$  hvis  $f_n \uparrow f$   $\mu$ -n.o.

Som det fremgår af det nedenstående konvergerer  $I(f_n) \uparrow I(f)$  i c), d.v.s.  $\sup_n$  kan erstattes af  $\lim_n$ .

Før vi viser, at der er et og kun et integral m.h.t.  $\mu$ , vises, at  $I$  udover a), b) og c) tillige opfylder følgende egenskaber.  $g, h, f$  og  $(f_n)_{n \geq 1}$  betegner her elementer i  $\overline{M}(\mathcal{E})_+$ .

d)  $I(f) = I(g)$  hvis  $f = g$   $\mu$ -n.o., og derfor ifølge b)  $I(f) = I(\mathbf{1}_\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$  hvis  $f = 0$   $\mu$ -n.o.

e)  $I$  er voksende, d.v.s.  $I(f) \leq I(g)$  hvis  $f \leq g$   $\mu$ -n.o., og lighedstegn forekommer kun, hvis enten  $I(f) = \infty$  eller  $f = g$   $\mu$ -n.o.

f)  $I(f) < \infty \Rightarrow \mu(f = \infty) = 0$ , d.v.s.  $f < \infty$   $\mu$ -n.o.

g)  $f_n \downarrow f$   $\mu$ -n.o. og  $I(f_1) < \infty \Rightarrow I(f_n) \downarrow I(f)$ .

h)  $I(\liminf_n f_n) \leq \liminf_n I(f_n)$ .

i)  $\lim_n I(f_n) = I(f)$  og  $\lim_n I(|f_n - f|) = 0$ , hvis  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -n.o., og der findes et  $h$ , så at  $I(h) < \infty$  og  $f_n \leq h$   $\mu$ -n.o. for alle  $n$ .

Bevis. d) Definer for alle  $n \geq 1$   $g_n := f$ , d.v.s.  $g_n \uparrow g$   $\mu$ -n.o., hvorefter påstanden følger af c).

e) Da  $I(f) = \sup_n I(f \wedge n)$  og tilsvarende for  $g$  ifølge c), er det nok at vise uligheden for begrænsede  $f$  og  $g$ . Men for sådanne er  $g - f \wedge g$  et vel defineret element i  $M(\mathcal{E})_+$ , og da  $g \vee f = f + (g - f \wedge g)$  og  $I$  er additiv med ikke-negative værdier, er sagen klar, da  $g = g \vee f$   $\mu$ -n.o. Sidste del i e) vises nedenfor.

f) er en konsekvens af e) og b), idet  $a \cdot \mathbf{1}_{\{f=\infty\}} \leq f$  for alle  $a \in \mathbf{R}_+$ . I beviset for g) kan vi derfor antage, at  $f_1 \in M(\mathcal{E})_+$ , d.v.s.  $g_n := f_1 - f_n \wedge f_1$  og  $g := f_1 - f \wedge f_1$  definerer elementer i  $M(\mathcal{E})_+$ , og da  $g_n \uparrow g$   $\mu$ -n.o. giver a), c) og lighederne

$$f_1 = g_n + f_n \wedge f_1 \quad \mu\text{-n.o.} \quad \text{og} \quad f_1 = g + f \wedge f_1 \quad \mu\text{-n.o.},$$

at  $I(f_n \wedge f_1) \downarrow I(f \wedge f_1)$  d.v.s. resultatet, da  $f = f \wedge f_1$  og  $f_n = f_n \wedge f_1$   $\mu$ -n.o.  
h) Pr. definition af  $\liminf$  har vi, at

$$\inf_{k \geq n} f_k \uparrow \liminf_n f_n.$$

Punkterne c) og e) viser derfor, at

$$I(\liminf_n f_n) = \sup_n I(\inf_{k \geq n} f_k) \leq \sup_n \inf_{k \geq n} I(f_k) = \liminf_n I(f_n).$$

i) Da  $|f_n - f| \leq 2h$   $\mu$ -n.o. er det nok at vise første del. Definer hertil for ethvert  $n \geq 1$   $g_n = \sup_{k \geq n} f_k$ . Da  $g_1 \leq h$  og  $g_n \downarrow f$   $\mu$ -n.o., fås af g), at

$$\limsup_n I(f_n) \leq \limsup_n I(g_n) = \lim_n I(g_n) = I(f).$$

Men ifølge h) gælder også  $I(f) \leq \liminf_n I(f_n)$ , og i) er derfor vist.

Vi mangler nu kun at vise sidste del af e). Hvis  $I(f) = \infty$  er der ingenting at vise. Antag derfor at  $I(f) = I(g) < \infty$ . Ifølge f) kan vi antage, at både  $f$  og  $g$  kun antager endelige værdier, hvorfor som før  $h := g - f \wedge g$  er et vel defineret element i  $M(\mathcal{E})_+$ , og da  $g = f + h$   $\mu$ -n.o. er

$$I(g) = I(f) + I(h).$$

Påstanden er derfor en konsekvens af, at der for et givet  $h$  i  $\overline{M}(\mathcal{E})_+$  gælder

$$I(h) = 0 \Rightarrow h = 0 \quad \mu\text{-n.o.},$$

hvilket da  $n \cdot h \uparrow \infty \cdot \mathbf{1}_{\{h>0\}} \geq \mathbf{1}_{\{h>0\}}$   $\mu$ -n.o. følger af uligheden i e), idet

$$\mu(h > 0) = I(\mathbf{1}_{\{h>0\}}) \leq \sup_n I(n \cdot h) = \sup_n n I(h) = 0. \quad \diamond$$

Punkterne a) og b) viser, at  $I$  er entydigt bestemt på  $S(\mathcal{E})_+$ , for hvis  $f \in S(\mathcal{E})_+$  er på formen  $\sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ , er

$$I(f) = \sum_i a_i \cdot \mu(A_i).$$

Specielt er

$$I(f) = \sum_i^n x_i \cdot \mu(f = x_i), \quad \text{hvis} \quad f(E) = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbf{R}_+,$$

d.v.s.  $I(f)$  er en vægtet sum, hvor hver funktionsværdi indgår med en vægt, der svarer til  $\mu$ -målet af den mængde, hvorpå den pågældende værdi antages.

$I$  er derfor entydigt bestemt på  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})_+$ , thi som vist i Lemma 6, findes der for ethvert  $f \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})_+$  en følge  $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{E})_+$ , så at  $f_n \uparrow f$   $\mu$ -n.o. og dermed ifølge punkt c)  $I(f) = \sup_n I(f_n)$ .

Vi mangler alt i alt kun at vise eksistensdelen i flg. udsagn.

På ethvert målrum  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  findes der et og kun et integral m.h.t.  $\mu$ , d.v.s. præcis en afbildning  $I$  fra  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})_+$  ind i  $\overline{\mathbf{R}}_+$  opfyldende de definerende krav a), b) og c) og dermed også punkterne d), ..., i) formuleret på næstforegående side. Specielt gælder derfor for ethvert  $f$  i  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})_+$ , at

$$I(f) = \sup\{I(h) \mid h \leq f, h \in \mathbf{S}(\mathcal{E})_+\}.$$

Bevis. Da formlen er en umiddelbar konsekvens af c), e) og Lemma 6, udestår kun eksistensen. Men som bemærket i Lemma 6 konvergerer  $\phi_n(f) \uparrow f$  for ethvert  $f$  i  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})_+$ , hvor  $\phi_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$  er givet ved

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} (k-1)/2^n \cdot \mathbf{1}_{(k-1)/2^n, k/2^n]}(x) + n \cdot \mathbf{1}_{]n, \infty[}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{]j/2^n, \infty[}(x)$$

for alle  $x \in \mathbf{R}$  og  $n \geq 1$ . D.v.s.

$$\phi_n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{\{f > j/2^n\}} \in \mathbf{S}(\mathcal{E})_+,$$

og ifølge a), b) og c) er den eneste kandidat til et eventuelt integral derfor afbildningen  $I : \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})_+ \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  defineret ved

$$I(f) := \sup_n s_n(f) \quad \text{hvor} \quad s_n(f) := \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n2^n} \mu(f > j/2^n) \quad n \geq 1.$$

Bemærk at da

$$2\mu(f > j/2^n) \leq \mu(f > 2j/2^{n+1}) + \mu(f > (2j-1)/2^{n+1}) \quad \text{for } j = 1, \dots, n2^n$$

er

$$n \mapsto s_n(f) \quad \text{voksende, d.v.s. } s_n(f) \uparrow I(f).$$

Det er nu let vise, at  $I$  opfylder c). For hvis  $f_k \uparrow f$   $\mu$ -n.o. og dermed  $\mu(f_k > t) \uparrow \mu(f > t)$  for alle  $t$ , ses at

$$s_n(f_k) \leq s_n(f_{k+1}) \uparrow_{k \rightarrow \infty} s_n(f),$$

hvoraf c) følger, idet

$$I(f_k) = \sup_n s_n(f_k) \leq \sup_n s_n(f_{k+1}) = I(f_{k+1}) \quad k \geq 1$$

og

$$I(f) = \sup_n s_n(f) = \sup_n \sup_k s_n(f_k) = \sup_k \sup_n s_n(f_k) = \sup_k I(f_k).$$

$I$  opfylder også b), idet  $I(a\mathbf{1}_A) = aI(\mathbf{1}_A)$  for ethvert  $A \in \mathcal{E}$  og  $a \geq 0$ . Thi for alle  $j, n \geq 1$  er

$$\mu(a\mathbf{1}_A > j/2^n) = \mu(A) \text{ hvis } j/2^n < a \text{ og } 0 \text{ ellers,}$$

og derfor, idet  $a(n)$  er det hele tal bestemt ved, at  $a(n)/2^n < a \leq (a(n) + 1)/2^n$ ,

$$I(a\mathbf{1}_A) = \mu(A) \cdot \sup_n \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n2^n} \mathbf{1}_{|j/2^n, \infty[}(a) = \mu(A) \cdot \sup_n a(n)^+ = a \cdot \mu(A).$$

Tilbage står kun at vise, at  $I$  er positiv additiv, d.v.s. opfylder a). Men da  $I$  opfylder c), er det ifølge Lemma 6 nok at vise positiv additivitet på  $S(\mathcal{E})_+$ . For hvis  $f, g \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$  og  $(f_n), (g_n)$  er elementer i  $S(\mathcal{E})_+$ , så at  $f_n \uparrow f$  og  $g_n \uparrow g$ , så gælder for alle  $a, b \in \mathbf{R}_+$ , at  $af_n + bg_n \uparrow af + bg$  og dermed, hvis  $I$  er positiv additiv på  $S(\mathcal{E})_+$ , at

$$I(af + bg) = \sup_n I(af_n + bg_n) = \sup_n (aI(f_n) + bI(g_n)) = aI(f) + bI(g).$$

Før vi går videre bemærkes, at for enhver  $\mathcal{E}$ -målelig partition  $A_1, \dots, A_k$  af  $E$  er

$$I(f) = \sum_{i=1}^k I(f \cdot \mathbf{1}_{A_i})$$

for ethvert  $f \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$ , da  $s_n(f) = \sum_{i=1}^k s_n(f \cdot \mathbf{1}_{A_i})$  for alle  $n$ , fordi

$$\mu(f > j/2^n) = \sum_{i=1}^k \mu(\{f > j/2^n\} \cap A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(f \cdot \mathbf{1}_{A_i} > j/2^n) \text{ for alle } j, n \geq 1.$$

D.v.s. hvis  $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \in S(\mathcal{E})_+$  og  $g = \sum_{j=1}^l b_j \cdot \mathbf{1}_{B_j} \in S(\mathcal{E})_+$ , hvor  $A_i$ 'erne og  $B_j$ 'erne hver især udgør en endelig partition, så gælder for  $a, b \geq 0$

$$\begin{aligned} I(af + bg) &= \sum_{i=1}^k I((af + bg) \cdot \mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l I((af + bg) \cdot \mathbf{1}_{A_i} \cdot \mathbf{1}_{B_j}) = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l I((a \cdot a_i + b \cdot b_j) \cdot \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (a \cdot I(a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}) + b \cdot I(b_j \cdot \mathbf{1}_{A_i \cap B_j})) \\ &= a \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l I(f \cdot \mathbf{1}_{A_i} \cdot \mathbf{1}_{B_j}) + b \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l I(g \cdot \mathbf{1}_{A_i} \cdot \mathbf{1}_{B_j}) = aI(f) + bI(g). \end{aligned}$$

D.v.s.  $I$  er positiv additiv på  $S(\mathcal{E})_+$ , og eksistens og entydighed af integralet m.h.t.  $\mu$  er hermed vist.  $\diamond$

Bemærkning. En mere traditionel bevismetode går som følger: Definer  $I$  på  $S(\mathcal{E})_+$  som i Øvelse 14. Udvid dernæst  $I$  til hele  $\overline{M}(\mathcal{E})_+$  via formlen

$$I(f) = \sup\{I(h) \mid h \leq f, h \in S(\mathcal{E})_+\}$$

og vis nu, at dette  $I$  er et integral m.h.t.  $\mu$ .

Indtil nu er integralet kun defineret på ikke-negative funktioner, men som vi nu skal se kan det udvides til en stor klasse af funktioner, som antager både positive og negative værdier. Det vil dog normalt ikke kunne udvides til hele  $\overline{M}(\mathcal{E})$ .

Definer hertil

$$L(\mu) := \{f \in \overline{M}(\mathcal{E}) \mid I(f^+) \wedge I(f^-) < \infty\}$$

og

$$L^1(\mu) := \{f \in M(\mathcal{E}) \mid I(f^+) \vee I(f^-) < \infty\} = \{f \in M(\mathcal{E}) \mid I(|f|) < \infty\}.$$

$L(\mu)$  består altså af funktioner, hvor enten den 'positive' eller den 'negative' del ikke er 'for stor', og  $L^1(\mu)$  af funktioner, hvor ingen af delene er 'for store'. Endvidere antager funktionerne i  $L^1(\mu)$  pr. definition kun reelle værdier.

$I$ 's positive linearitet viser sammen med identiteterne

$$x^\pm(a \cdot) = a x^\pm(\cdot) \text{ hvis } a \geq 0 \text{ og } x^\pm(a \cdot) = |a| x^\mp(\cdot) \text{ hvis } a < 0,$$

at  $L(\mu)$  og  $L^1(\mu)$  er stabile under multiplikation med vilkårlige skalarer, og da  $|f + g| \leq |f| + |g|$  ses, at  $L^1(\mu)$  er et vektorrum, idet

$$f, g \in L^1(\mu) \Rightarrow af + bg \in L^1(\mu) \text{ for alle reelle tal } a, b.$$

$L(\mu)$  er derimod ikke stabil under sum, men subadditiviteten af  $x^+$  og  $x^-$  sikrer dog, at  $af + bg \in L(\mu)$  for alle  $a, b \in \mathbf{R}$ , hvis blot  $f$  eller  $g$  ligger i  $L^1(\mu)$ .

Definer en afbildning fra  $L(\mu)$  ind i  $\overline{\mathbf{R}}$  ved fastsættelsen

$$\int f d\mu := I(f^+) - I(f^-) \text{ for } f \in L(\mu).$$

Da  $f^+ = f$  og  $f^- \equiv 0$  hvis  $f \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$ , ses at der er tale om en udvidelse af  $I$ , d.v.s.

$$\overline{M}(\mathcal{E})_+ \subseteq L(\mu) \text{ og } \int f d\mu = I(f) \text{ for } f \in \overline{M}(\mathcal{E})_+.$$

Ønsker man at fremhæve, at  $f$  er en funktion af en underliggende variabel skrives f.eks.

$$\int f(e) \mu(de) \text{ i stedet for } \int f d\mu.$$

Vi er nu i klar til at formulere og bevise flg. hovedsætning om integraler.

**Sætning 2** Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et givent målrum. Afbildningen

$$f \mapsto \int f d\mu$$

fra  $L(\mu)$  ind i  $\overline{\mathbf{R}}$ , der kaldes integralet m.h.t.  $\mu$ , har flg. egenskaber.  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f, g, h$  og  $k$  betegner her elementer i  $L(\mu)$  og  $a, b$  reelle tal.

1) Integralet er homogen, positiv og voksende, d.v.s.

$$\int af d\mu = a \int f d\mu, \quad 0 \leq \int g d\mu, \quad \int h d\mu \leq \int k d\mu$$

hvis  $g \geq 0$  og  $h \leq k$   $\mu$ -n.o., og der kan, hvis en af integralerne er endelig, kun gælde lighedstegn i sidste ulighedstegn, hvis  $h = k$   $\mu$ -n.o. Specielt gælder

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

2) Integralet er positiv additiv på  $\overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})_+$  og et lineært funktional på  $L^1(\mu)$  d.v.s.

$$\int f d\mu \in \mathbf{R} \quad \text{og} \quad \int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu \quad \text{hvis } f, g \in L^1(\mu).$$

Sumformlen holder, blot en af funktionerne ligger i  $L^1(\mu)$ .

3) **Monoton konvergens**, d.v.s.

$$\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu \quad \text{hvis } f_n \uparrow f \text{ } \mu\text{-n.o. og } \int f_1 d\mu > -\infty.$$

4) **Fatou's Lemma**, d.v.s.

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \quad \text{hvis } f_n \geq g \text{ } \mu\text{-n.o. og } \int g d\mu > -\infty,$$

eller ækvivalent

$$\int \limsup_n f_n d\mu \geq \limsup_n \int f_n d\mu \quad \text{hvis } f_n \leq g \text{ } \mu\text{-n.o. og } \int g d\mu < \infty.$$

5) **Lebesgue's Sætning om domineret konvergens**, d.v.s.

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu \quad \text{og} \quad \lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0,$$

hvis  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -n.o. og  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -n.o., hvor  $\int g d\mu < \infty$ .

Bemærkning. Da  $I$  er voksende gælder for  $g \in L(\mu)$  og  $f \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})$

$$g \leq f \text{ } \mu\text{-n.o. og } \int g d\mu > -\infty \Rightarrow f \in L(\mu)$$

og

$$|f| \leq g \text{ } \mu\text{-n.o. og } \int g d\mu < \infty \Rightarrow f \in L(\mu),$$

I punkterne 3) og 5) behøver man derfor ikke at forudsætte, at  $f \in L(\mu)$ , da dette følger af antagelserne.

Bevis. Udnyttes at  $x^+$  er voksende og  $x^-$  aftagende samt formlerne vedrørende  $x^\pm(a \cdot)$  omtalt ovenfor, oversættes 1) umiddelbart til tilsvarende og allerede viste egenskaber ved integralafbildningen  $I$ . Uligheden følger af homogeniteten og den voksende egenskab, da  $f \leq |f|$  og  $-f \leq |f|$ .

Hvad angår 2), er integralværdierne klart endelige tal, hvorimod lineariteten er ny. Set i lyset af den viste homogenitet er det nok at vise, at

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \text{ for } f, g \in L^1(\mu).$$

Ved opsplitning i positiv og negativ del har vi for givne  $f$  og  $g$

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-),$$

og dermed

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Da  $I$  er additiv, fås derfor at

$$I((f + g)^+) + I(f^-) + I(g^-) = I((f + g)^-) + I(f^+) + I(g^+),$$

hvilket, da tallene er endelige, ved omordning giver det ønskede. Læseren bør overveje, at ligheden kun kræver, at en af  $f$  eller  $g$  ligger i  $L^1(\mu)$ .

Punkterne 3) og 5) vises ved at oversætte udsagnene til de tilsvarende påstande c), g) og i) omhandlende  $I$ . 4) følger af 1) og 3).

3) Antagelserne samt kontinuiteten og monotoniteten af  $x^+$  og  $x^-$  bevirker, at

$$f_n^+ \uparrow f^+, f_n^- \downarrow f^- \text{ og } f_n^- \leq f_1^- \text{ } \mu\text{-n.o. samt } I(f_1^-) < \infty.$$

Heraf fås 3), da punkterne c) og g) sikrer, at

$$I(f_n^+) \uparrow I(f^+) \text{ og } I(f_n^-) \downarrow I(f^-).$$

4) Da de to udsagn ifølge homogeniteten er ækvivalente, vises kun den første. Da  $g \leq \inf_{k \geq n} f_k \leq \liminf_n f_n$   $\mu$ -n.o. og  $\int g d\mu > -\infty$  er

$$\liminf_n f_n \text{ og } (\inf_{k \geq n} f_k)_{n \geq 1} \text{ alle elementer i } L(\mu).$$

Punkt 4) følger derfor af 1) og 3), idet

$$\inf_{k \geq n} f_k \uparrow \liminf_n f_n \text{ og } g \leq \inf_{k \geq n} f_k \leq f_n \text{ } \mu\text{-n.o. for alle } n.$$

5) Det er nok at vise den første påstand, da den anden er et specialtilfælde heraf. Antagelsen og kontinuiteten af  $x^+$  og  $x^-$  sikrer, at  $f_n^+ \rightarrow f^+$  og  $f_n^- \rightarrow f^-$   $\mu$ -n.o. samt

$$f_n^+ \vee f_n^- \leq |f_n| \leq g^+ \quad \mu\text{-n.o. og } I(g^+) < \infty,$$

og dermed  $\lim_n I(f_n^+) = I(f^+)$  og  $\lim_n I(f_n^-) = I(f^-)$  ifølge punkt i). 5) er nu umiddelbar, da begge grænseværdier er endelige.  $\diamond$

Bemærkning. Hvis  $f \in L(\mu)$  har endeligt integral, er  $f$  endelig  $\mu$ -n.o., og  $f = \tilde{f}$   $\mu$ -n.o., hvor

$$\tilde{f} := f \cdot \mathbf{1}_{\{|f| < \infty\}} \in L^1(\mu).$$

For ethvert  $f \in L(\mu)$  og  $A \in \mathcal{E}$  er  $f \cdot \mathbf{1}_A \in L(\mu)$  (overvej) og

$$\int_A f d\mu := \int f \cdot \mathbf{1}_A d\mu.$$

Man taler her om 'integralet af  $f$  over  $A$ '. Hvis  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  og  $A = ]a, b]$  indføres yderligere

$$\int_a^b f d\mu := \int_{]a, b]} f d\mu.$$

### Korollar Beppo Levi's Sætning.

Lad  $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L^1(\mu)$  være givet, så at  $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$ . Da er  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(e)$  konvergent i  $\mathbf{R}$  for  $\mu$ -n.a.  $e$ , og

$$s_{\infty} \in L^1(\mu) \quad \text{samt} \quad \int s_{\infty} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu,$$

hvor  $s_{\infty}$  er dannet som i Lemma 5 ud fra  $(s_n)_{n \geq 1}$ , hvor  $s_n := \sum_{k=1}^n f_k$   $n \geq 1$ .

Bevis. Definer for ethvert  $n$

$$g_n = \sum_{k=1}^n |f_k|,$$

d.v.s.  $(g_n)_{n \geq 1} \subseteq L^1(\mu)$  og  $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$  for alle  $n$ . Ifølge Monoton konvergens og lineariteten gælder

$$\int \sup_n g_n d\mu = \sup_n \int g_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k| d\mu < \infty,$$

og dermed  $\sup_n g_n = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| < \infty$   $\mu$ -n.o. Fuldstændigheden af  $\mathbf{R}$  medfører derfor at  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(e)$ , d.v.s.  $\lim_n s_n(e)$ , eksisterer i  $\mathbf{R}$  for  $\mu$ -n.a.  $e$ , og udnyttes at

$$|s_n| = \left| \sum_{k=1}^n f_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f_k| \leq \sup_n g_n \quad \text{for alle } n$$

følger resultatet af Lebesgue's Sætning.  $\diamond$

Ud fra  $\mu$  kan man, som tidligere vist, danne nye mål ved f.eks. restriktion og billedmål dannelse, og det næste resultat beskriver sammenhængen mellem integralerne for sådanne nært beslægtede mål. Punkt B), som omhandler integration med billedmål, er særligt vigtigt og omtales ofte som *Den lille transformationsætning*.

**Sætning 3** Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et givent målrum.

A) For ethvert  $A \in \mathcal{E}$  er  $L(\mu_A) = \{f \in \overline{M}(\mathcal{E}) \mid f \cdot \mathbf{1}_A \in L(\mu)\}$  og

$$\int f d\mu_A = \int f \cdot \mathbf{1}_A d\mu \quad \text{for } f \in L(\mu_A).$$

B) Lad  $(F, \mathcal{F})$  være et måleligt rum og  $\varphi : E \rightarrow F$  en målelig afbildning. Da er

$$L(\mu_\varphi) = \{f \in \overline{M}(\mathcal{F}) \mid f \circ \varphi \in L(\mu)\} \quad \text{og} \quad \int f d\mu_\varphi = \int f \circ \varphi d\mu \quad \text{for } f \in L(\mu_\varphi).$$

C) Antag  $\mu = \sum_i a_i \cdot \mu_i$  for elementer  $a_i \geq 0$  og  $\mu_i \in m(\mathcal{E})$ . Da er

$$L(\mu) = \left\{ f \in \overline{M}(\mathcal{E}) \mid \sum_i a_i \int f^+ d\mu_i < \infty \quad \text{eller} \quad \sum_i a_i \int f^- d\mu_i < \infty \right\}$$

og

$$\int f d\mu = \sum_i a_i \int f d\mu_i \quad \text{for } f \in L(\mu).$$

Bevis. Vi viser kun B), idet de to andre beviser er analoge. Da

$$(f(\varphi))^+ = f^+(\varphi) \quad \text{og} \quad (f(\varphi))^- = f^-(\varphi)$$

for  $f \in \overline{M}(\mathcal{F})$  følger pr. konstruktion af integralet, at det er nok at vise, at

$$\int f d\mu_\varphi = \int f(\varphi) d\mu \quad \text{for alle } f \in \overline{M}(\mathcal{F})_+.$$

Men dette følger umiddelbart ved brug af Standardbeviset, da Sætning 2 sammen med definitionen på billedmål viser, at

$$V := \left\{ f \in \overline{M}(\mathcal{F})_+ \mid \int f d\mu_\varphi = \int f \circ \varphi d\mu \right\}$$

opfylder betingelserne  $a_1)$ ,  $b_1)$  og  $c_1)$  på side 20. ◇

Vi får brug for endnu et resultat af denne type. Thi lad stadig  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et målrum og betragt for givet  $g \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$  mængdefunktionen  $\nu$  defineret ved

$$\nu(A) := \int_A g d\mu = \int g \cdot \mathbf{1}_A d\mu \quad \text{for } A \in \mathcal{E}.$$

Da  $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$  for disjunkte mængder  $A$  og  $B$ , sikrer integralets additivitet på  $\overline{M}(\mathcal{E})_+$  sammen med sætningen om Monoton konvergens, at  $\nu$  er et mål på  $\mathcal{E}$ , d.v.s.

$$\nu(\emptyset) = 0 \quad \text{og} \quad \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \quad \text{for parvis disjunkte } A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{E}.$$

$\nu$  betegnes ofte  $g d\mu$ . I denne sammenhæng gælder åbenbart

- 1)  $\nu$  er  $\mu$ -satureret, d.v.s.  $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$  for  $A \in \mathcal{E}$ .
- 2)  $\nu$  er et endeligt mål hvis  $\int g d\mu < \infty$ .

Endvidere gælder

- 3)  $\nu$  er et  $\sigma$ -endeligt mål, hvis  $\mu$  er  $\sigma$ -endeligt og  $g < \infty$   $\mu$ -n.o.

Bevis. Lad  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$  være givet, så at  $\mu(A_n) < \infty$  for alle  $n$  og  $\bigcup_{n \geq 1} A_n = E$ . Definer for  $n, k \geq 1$

$$B_{n,k} := A_n \cap \{g \leq k\}.$$

Integralets positivitet sikrer, at  $\nu(B_{n,k}) \leq k \cdot \mu(A_n) < \infty$  for alle  $n$  og  $k$ , og da  $E = \bigcup_{n,k} B_{n,k} \cup \{g = \infty\}$  er påstanden vist, thi da  $\nu$  ifølge 1) er  $\mu$ -satureret, er  $\nu(g = \infty) = 0$  da  $\mu(g = \infty) = 0$ .  $\diamond$

Bemærkning.  $\nu$  er altid sum-endeligt, hvis  $\mu$  er  $\sigma$ -endeligt.

Med baggrund heri siges et mål  $\nu$  på  $(E, \mathcal{E})$  at være *absolut kontinuert* m.h.t.  $\mu$ , skrives  $\nu \ll \mu$ , hvis der findes et  $g \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$  så at

$$\nu(A) = \int_A g d\mu \quad \text{for } A \in \mathcal{E}.$$

$g$  kaldes den *Radon-Nikodym afledede* af  $\nu$  m.h.t.  $\mu$ , eller kort den afledede eller *tæthed* af  $\nu$  m.h.t.  $\mu$ , og betegnes ofte  $d\nu/d\mu$ .

Det er oplagt af interesse at vide, i hvor høj grad  $g$  er entydigt bestemt ud fra  $\nu$  og  $\mu$ . Et brugbart svar er indeholdt i følgende overvejelser.

**Proposition 5** *Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et målrum og lad  $f, g \in L^1(\mu)$  være givet, så at*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{E}.$$

*Da er  $f \leq g$   $\mu$ -n.o. hvis  $f, g \in L^1(\mu)$ , eller hvis  $\mu$  er  $\sigma$ -endeligt.*

**Korollar 1** *For ethvert mål  $\nu$  på  $(E, \mathcal{E})$ , som er absolut kontinuert m.h.t.  $\mu$ , er den Radon-Nikodym afledede  $d\nu/d\mu$ , entydigt bestemt op til  $\mu$ -nulmængder, hvis enten  $\nu$  er et endeligt mål, eller  $\mu$  er  $\sigma$ -endeligt.*

**Korollar 2** *To funktioner  $f, g \in L^1(\mu)$  er  $\mu$ -identiske, d.v.s.  $f = g$   $\mu$ -n.o., hvis*

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{G},$$

*hvor  $\mathcal{G}$  er  $\cap f$ -stabil, indeholder  $E$  samt frembringer  $\mathcal{E}$ , d.v.s.  $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$ .*

Korollar 1 er klar, og nr. 2 følger af Proposition 2, idet man først ved linearitet og opsplnitning i positiv og negativ del reducerer til ikke-negative  $f$  og  $g$ .

Bevis for Proposition 5. Antag at  $f, g \in L^1(\mu)$  og dermed  $f \cdot \mathbf{1}_A, g \cdot \mathbf{1}_A$  samt  $f \wedge g = f \cdot \mathbf{1}_{\{f \leq g\}} + g \cdot \mathbf{1}_{\{g < f\}}$  indeholdt i  $L^1(\mu)$  for alle  $A \in \mathcal{E}$ . D.v.s.

$$\int f \wedge g d\mu = \int_{\{f \leq g\}} f d\mu + \int_{\{g < f\}} g d\mu \geq \int_{\{f \leq g\}} f d\mu + \int_{\{g < f\}} f d\mu = \int f d\mu.$$

Men da  $f \geq f \wedge g$  og integralet er voksende, må der gælde

$$\int f \wedge g d\mu = \int f d\mu$$

og dermed ifølge Sætning 2 punkt 1  $f = f \wedge g \leq g$   $\mu$ -n.o.

Antag dernæst at  $\mu$  er  $\sigma$ -endeligt, og lad  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$  være givet, så at

$$\mu(A_n) < \infty \text{ for alle } n \geq 1 \text{ og } A_n \subseteq A_{n+1} \uparrow E.$$

Vi skal vise  $\mu(g < f) = 0$ . Hertil er det, da

$$\{g < f\} = \bigcup_{r_1, r_2 \in \mathbf{Q}} \{g < r_1 < r_2 < f\} = \bigcup_{r_1, r_2 \in \mathbf{Q}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n$$

nok at vise, at  $\mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n) = 0$  for alle  $n \geq 1$  og alle rationale tal  $r_1 < r_2$ . Men da integralet er voksende, er

$$\int_{\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n} f d\mu \geq r_2 \cdot \mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n)$$

og

$$\int_{\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n} g d\mu \leq r_1 \cdot \mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n)$$

og derfor ifølge antagelsen

$$r_2 \cdot \mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n) \leq r_1 \cdot \mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n).$$

Men da

$$\mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n) \leq \mu(A_n) < \infty,$$

er dette kun muligt, hvis  $\mu(\{g < r_1 < r_2 < f\} \cap A_n) = 0$ . D.v.s.  $\mu(g < f) = 0$  og dermed  $f \leq g$   $\mu$ -n.o.  $\diamond$

Det næste resultat omhandler integration m.h.t. til et absolut kontinuert mål.

**Sætning 4** Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et givent målrum, og lad  $\nu \in m(\mathcal{E})$  være absolut kontinuert m.h.t.  $\mu$  med Radon-Nikodym afledet  $g \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$ . Da er

$$L(\nu) = \{f \in \overline{M}(\mathcal{E}) \mid f \cdot g \in L(\mu)\} \quad \text{og} \quad \int f d\nu = \int f \cdot g d\mu \quad \text{for } f \in L(\nu).$$

Bevis. Da  $g$  er ikke-negativ, er

$$(f \cdot g)^+ = f^+ \cdot g \quad \text{og} \quad (f \cdot g)^- = f^- \cdot g \quad \text{for alle } f.$$

Pr. konstruktion af integralet er det derfor nok at se på ikke-negative funktioner, d.v.s. vise

$$\int f d\nu = \int f \cdot g d\mu \quad \text{for } f \in \overline{M}(\mathcal{E})_+.$$

Men dette følger af Standardbeviset ved først at betragte indikatorfunktioner, dernæst simple funktioner o.s.v. Detaljerne overlades til læseren.  $\diamond$

**Øvelse 15.** Lad situationen være som i Sætning 4. Vis at  $g > 0$   $\nu$ -n.o., samt at  $\nu$  og  $\mu$  er ækvivalente, hvis også  $g > 0$   $\mu$ -n.o.  $\square$

Vi afslutter kapitlet med at se lidt nærmere på målrummet  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$ . Mere præcist er vi interesseret i sammenhængen mellem det netop definerede Lebesgue integral, og det fra tidligere kurser kendte Riemann integral. Som bekendt er en funktion  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  Riemann integrabel over et endeligt interval  $[a, b]$ , hvis

$$-\infty < \sup_{\pi} \sum_{i \geq 1} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \inf_{\pi} \sum_{i \geq 1} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \infty,$$

hvor sup og inf tages over alle endelige inddelinger  $\pi : a = t_0 < \dots < t_n = b$  af intervallet  $[a, b]$ , og

$$m_i := \inf_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} f(t) \quad \text{og} \quad M_i := \sup_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} f(t) \quad i = 1, \dots, n$$

for enhver inddeling  $\pi : a = t_0 < \dots < t_n = b$ . Den fælles værdi betegnes i givet fald  $R \int_a^b f(x) dx$  og kaldes Riemann integralet af  $f$  over intervallet  $[a, b]$ .

Den tætte forbindelse mellem Riemann integralet og stamfunktionsbegrebet betyder, at mange Riemann integraler kan beregnes eksplicit. Set ud fra et beregnings-synspunkt er det derfor af åbenbar interesse at vide, at Lebesgue integralet er en udvidelse af Riemann integralet. Der gælder nemlig følgende resultat.

### Riemann versus Lebesgue integral.

Lad  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  være Borel målelig. Hvis  $f$  er Riemann integrabel over et endeligt interval  $[a, b]$ , så er  $f \cdot \mathbf{1}_{[a,b]} \in L^1(\lambda_1)$  og

$$\int f \cdot \mathbf{1}_{[a,b]} d\lambda_1 = R \int_a^b f(x) dx.$$

Bevis. Pr. definition af Riemann integralet er  $f \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}$  en begrænset Borel funktion, d.v.s. element i  $L^1(\lambda_1)$ , og for enhver endelig inddeling  $\pi : a = t_0 < \dots < t_n = b$  af intervallet  $[a, b]$  med  $m_i$  og  $M_i$  som ovenfor definerer

$$\underline{f}^\pi := \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i[} \quad \text{og} \quad \bar{f}^\pi := \sum_{i=1}^n M_i \cdot \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i]}$$

to simple Borel funktioner, så at  $\underline{f}^\pi \leq f \cdot \mathbf{1}_{[a,b]} \leq \bar{f}^\pi$ . Egenskaber ved Lebesgue integralet sikrer derfor

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \int \underline{f}^\pi d\lambda_1 \leq \int f \cdot \mathbf{1}_{[a,b]} d\lambda_1 \leq \int \bar{f}^\pi d\lambda_1 = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (t_i - t_{i-1}),$$

hvoraf den ønskede lighed let udledes.  $\diamond$

Det netop viste resultat er med til at begrunde, at man i forbindelse med integration med  $\lambda_1$  ofte skriver  $dx$  i stedet for  $d\lambda_1$ .

### Uligheder.

Lad fortsat  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et målrum. Vi skal i dette afsnit beskæftige os med integraluligheder. Vi har allerede mødt en sådan ulighed nemlig

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \quad \text{for } f \in L(\mu).$$

Denne vil vi nu generalisere, og vi starter med én set ikke blot med nationale øjne meget interessant ulighed.

### Proposition 6 Jensen's ulighed.

Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et sandsynlighedsfelt, og lad  $f \in L^1(\mu)$  være givet, så at  $\mu(f \in J) = 1$ , hvor  $J$  er et interval i  $\mathbf{R}$ . Da er  $\varphi(f) \in L(\mu)$  for enhver Borel funktion  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , som er konveks på  $J$ , og

$$\int f d\mu \in J \quad \text{og} \quad \varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi(f) d\mu.$$

Bevis. Betegnes  $J$ 's venstre og højre endepunkt  $a$  og  $b$ , er  $a \leq f \leq b$   $\mu$ -n.o. og derfor ved integration ( $\mu$  er et sandsynligheds mål)

$$a \leq m \leq b \quad \text{hvor } m := \int f d\mu.$$

Da  $f \in L^1(\mu)$  er  $m \in \mathbf{R}$ , d.v.s.  $m = a$  betyder  $a \in \mathbf{R}$  og  $\mu(f = a) = 1$ .  $a$  og dermed  $m$  ligger derfor i  $J$  og  $\varphi(f) = \varphi(a)$   $\mu$ -n.o., d.v.s.  $\varphi(f) \in L(\mu)$  samt

$$\varphi(m) = \varphi(a) = \int \varphi(f) d\mu.$$

$m = b$  klares analogt. Vi kan derfor antage, at  $m \in ]a, b[ \subseteq J$ , og da  $\varphi$  er konveks, findes der som vist i appendikset en reel konstant  $c_m$ , så at

$$\varphi(x) \geq c_m(x - m) + \varphi(m) \quad \text{for } x \in J \quad \text{d.v.s. } \varphi(f) \geq \varphi(m) + c_m(f - m) \quad \mu\text{-n.o.}$$

Da  $\varphi(m) + c_m(f - m) \in L^1(\mu)$  viser dette, at  $\varphi(f) \in L(\mu)$  samt

$$\int \varphi(f) d\mu \geq \int (\varphi(m) + c_m(f - m)) d\mu = \varphi(m) + c_m \int f d\mu - c_m \cdot m = \varphi(m),$$

da integralet er voksende og lineær på  $L^1(\mu)$ . ◇

Bemærkning. Resultatet gælder uændret for  $\varphi$  med værdier i  $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ .

**Korollar** Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et sandsynlighedsfelt. Afbildningen

$$p \mapsto \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

fra  $\mathbf{R}_+$  ind i  $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$  er voksende for alle  $f \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E})$ .

Bevis. Det er nok at se på  $f \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$ . Lad derfor et sådant  $f$  samt  $0 < p_1 < p_2$  være givet. Da funktionen  $x \mapsto x^{p_2/p_1}$  er konveks på intervallet  $[0, \infty)$ , gælder ifølge Jensen's ulighed for ethvert  $n \geq 1$ , at

$$\left( \int (f \wedge n)^{p_1} d\mu \right)^{p_2/p_1} \leq \int ((f \wedge n)^{p_1})^{p_2/p_1} d\mu = \int (f \wedge n)^{p_2} d\mu$$

d.v.s.

$$\left( \int (f \wedge n)^{p_1} d\mu \right)^{1/p_1} \leq \left( \int (f \wedge n)^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} \leq \left( \int f^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2}.$$

Hvorafter påstanden følger ved brug af sætningen om Monoton konvergens.  $\diamond$

Bemærkning. Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et sandsynlighedsfelt og  $f$  et element i  $\overline{M}(\mathcal{E})$ . I forlængelse af korollaret er det oplagt at spørge om værdien af grænseværdierne

$$\lim_{p \uparrow \infty} \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{og} \quad \lim_{p \downarrow 0} \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Simple uligheder viser, at

$$\lim_{p \uparrow \infty} \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \sup \{ M > 0 \mid \mu(|f| > M) > 0 \},$$

og brug af logaritmefunktionen samt Lebesgue's Sætning viser, at

$$\lim_{p \downarrow 0} \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \exp \left( \int \log |f| d\mu \right) \quad \text{hvis} \quad f \in \bigcup_{p>0} L^p(\mu).$$

Jensen's ulighed holder kun for sandsynlighedsmål, dog kan der ved passende normering udledes et 'lignende' resultat for endelige mål. Men en udvidelse til uendelige målrum er ikke mulig. Derimod holder de vigtige Hölder's og Minkowski's uligheder i alle målrum. Formuleringerne kræver lidt ny notation. Bemærk at der for  $p = 1$  er overensstemmelse med tidligere indført notation.

**Notation.** For ethvert  $p > 0$  defineres

$$L^p(\mu) := \{ f \in M(\mathcal{E}) \mid \int |f|^p d\mu < \infty \}.$$

Ulighederne

$$|ax|^p = |a|^p |x|^p, \quad |x + y|^p \leq 2^p (|x|^p + |y|^p) \quad \text{for } x, y, a \in \mathbf{R}$$

viser, at  $L^p(\mu)$ -rummene er vektorrum, d.v.s. stabile under addition og multiplikation med skalar, og da

$$|x|^{p_1} \leq |x|^{p_2} + 1 \quad \text{for } x \in \mathbf{R} \text{ og } p_1 \leq p_2$$

er  $L^{p_2}(\mu) \subseteq L^{p_1}(\mu)$ , hvis  $\mu$  er et endeligt mål og  $p_1 \leq p_2$ . D.v.s. i endelige målrum bliver  $L^p$  mindre, når  $p$  bliver større. For uendelige målrum, d.v.s.  $\mu(E) = \infty$ , er der ingen tilsvarende alment gyldige inklusioner mellem  $L^p(\mu)$ -rummene.

**Proposition 7 Hölder's ulighed.**

Lad positive reelle tal  $p$  og  $q$  være givet, så at  $1/p + 1/q = 1$ . For alle  $f, g \in M(\mathcal{E})$  er

$$\int |f| \cdot |g| d\mu \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Specielt er  $f \cdot g \in L^1(\mu)$ , hvis  $f \in L^p(\mu)$  og  $g \in L^q(\mu)$ .

Bevis. Det er klart nok at se på ikke-negative funktioner, og da uligheden er oplagt, hvis højresiden er uendelig eller  $f = 0$   $\mu$ -n.o., kan vi uden tab af generalitet antage  $g \in L^q(\mu)$  og  $f \in L^p(\mu)$  samt  $\mu(\{f > 0\}) > 0$  og dermed  $m := \int f^p d\mu > 0$ . Definer

$$\nu(A) := \frac{1}{m} \int_A f^p d\mu \quad \text{for } A \in \mathcal{E}.$$

Som tidligere vist er  $\nu$  et mål og på grund af normeringen derfor et sandsynlighedsmål. Bruges nu Korollaret til Jensen's ulighed på den ikke-negative funktion  $u = g \cdot f^{1-p} \cdot \mathbf{1}_{\{f>0\}}$  fås ifølge Sætning 4, da  $1 < q$ ,

$$\frac{1}{m} \int g \cdot f d\mu = \int u d\nu \leq \left( \int u^q d\nu \right)^{1/q} = \frac{1}{m^{1/q}} \left( \int_{\{f>0\}} g^q \cdot f^{q(1-p)} \cdot f^p d\mu \right)^{1/q},$$

og dermed den ønskede ulighed da  $q(1-p) = -p$  og  $1 - 1/q = 1/p$ .  $\diamond$

Positive tal  $p$  og  $q$ , som opfylder  $1/p + 1/q = 1$ , siges at være *konjugerede*. Specielt er 2 konjugeret med sig selv, og tilfældet  $p = 2$ , d.v.s. uligheden

$$\int |f| \cdot |g| d\mu \leq \left( \int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \cdot \left( \int |g|^2 d\mu \right)^{1/2},$$

er også kendt under navnet **Cauchy-Schwarz's** ulighed.

**Proposition 8 Minkowski's ulighed.**

Lad  $1 \leq p < \infty$  være givet. For alle  $f, g \in M(\mathcal{E})$  er

$$\left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Bevis. Tilfældet  $p = 1$  overlades til læseren. Lad derfor  $p > 1$  og  $f$  og  $g$  være givet. Ligesom ovenfor kan vi uden tab af generalitet antage, at  $f$  og  $g$  og dermed også  $f + g$  ligger i  $L^p(\mu)$ . Da  $q(p-1) = p$  er  $|f + g|^{p-1}$  derfor indeholdt i  $L^q(\mu)$ , hvor  $q$  er det til  $p$  konjugerede tal. Ved brug af trekantsuligheden fås, at

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \int |f + g|^{p-1} \cdot |f| d\mu + \int |f + g|^{p-1} \cdot |g| d\mu.$$

Men ifølge Hölder's ulighed er

$$\int |f + g|^{p-1} \cdot |f| d\mu \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{1/q}$$

og

$$\int |f + g|^{p-1} \cdot |g| d\mu \leq \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{1/q},$$

hvilket sammen med ligheden  $p = q(p - 1)$  ved addition giver

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \left( \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right) \cdot \left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1/q}.$$

Hvorafter resultatet fås ved forkortning, da tallene er endelige og  $1/p = 1 - 1/q$ .  $\diamond$

Bemærkning: Vi har kun formuleret Hölder's og Minkowski's uligheder for funktioner i  $M(\mathcal{E})$ , men de kan selvfølgelig uden videre formuleres for elementer i  $\overline{M}(\mathcal{E})$ . Dog skal  $f + g$  omgås med en vis omhyggelighed.

I modsætning til Hölder's og Minkowski's uligheder gælder den sidste ulighed, vi skal betragte, for alle  $p > 0$ .

**Proposition 9 Markov's ulighed.**

For alle  $p > 0$  og alle  $f \in \overline{M}(\mathcal{E})$  er

$$\mu(|f| \geq t) \leq \frac{1}{t^p} \int |f|^p d\mu \quad \text{for } t > 0.$$

Bevis. Lad  $p > 0$  og  $t > 0$  være givet. Igen behøver vi kun se på ikke-negative funktioner. For et sådant  $f \in \overline{M}(\mathcal{E})_+$  fås, da integralet er voksende og

$$t \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq t\}} \leq f \quad \text{og dermed} \quad t^p \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq t\}} \leq f^p,$$

at

$$t^p \cdot \mu(f \geq t) = \int t^p \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq t\}} d\mu \leq \int f^p d\mu,$$

hvoraf resultatet følger.  $\diamond$

Da argumentet kun udnytter, at  $t \mapsto t^p$  er voksende på  $\mathbf{R}_+$  har man en 'Markov ulighed' for enhver voksende funktion  $\psi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ .

Ifølge Markov's ulighed er  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(|f| \geq t) = 0$  for ethvert  $f \in \bigcup_{p>0} L^p(\mu)$ , og som en udvidelse af de indførte  $L^p$ -rum defineres

$$L^0(\mu) := \{f \in M(\mathcal{E}) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(|f| \geq t) = 0\}.$$

$L^0(\mu)$ , der som nævnt, omfatter  $L^p(\mu)$  for ethvert  $p > 0$ , er tydeligvis stabil under addition og multiplikation med skalar, d.v.s.  $L^0(\mu)$  er et funktionsvektorrum. Hvis  $\mu$  er et sandsynligheds mål eller mere generelt et endeligt mål, er  $L^0(\mu) = M(\mathcal{E})$ , hvorimod  $L^0(\mu)$  er en ægte delmængde af  $M(\mathcal{E})$ , hvis f.eks.  $\mu$  er  $\sigma$ -endelig men  $\mu(E) = \infty$ .

**Produktmål, eksistens og egenskaber.**

Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  og  $(F, \mathcal{F}, \nu)$  betegne to  $\sigma$ -endelige målrum. Som tidligere indført, betegner  $\mu \otimes \nu$  det entydigt bestemte mål på  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ , hvis værdi på en produktmængde  $A \times B$  er  $\mu(A) \cdot \nu(B)$ . I dette afsnit vises, at produktmålet vitterligt eksisterer, samt hvordan integraler m.h.t. dette mål kan beregnes. Hertil får vi brug for flg. lemma.

**Lemma 9** For ethvert  $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$  er  $x \mapsto \nu(U(x))$   $\mathcal{E}$ -målelig og tilsvarende er  $y \mapsto \mu(U(y))$   $\mathcal{F}$ -målelig.  $U(x)$  og  $U(y)$  betegner her h.h.v.  $x$  og  $y$  sektionen af  $U$ . Mere generelt gælder for ethvert  $f \in \overline{M}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_+$ , at

$$x \mapsto \int_F f(x, y) \nu(dy) \in \overline{M}(\mathcal{E})_+ \text{ og } y \mapsto \int_E f(x, y) \mu(dx) \in \overline{M}(\mathcal{F})_+.$$

Bevis. Ifølge M5 er

$$y \mapsto f(x, y) \in \overline{M}(\mathcal{F})_+ \text{ for } x \in E \text{ og } x \mapsto f(x, y) \in \overline{M}(\mathcal{E})_+ \text{ for } y \in F,$$

for alle  $f \in \overline{M}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_+$ , og da

$$\nu(U(x)) = \int_F \mathbf{1}_U(x, y) \nu(dy) \quad x \in E \quad \text{og} \quad \mu(U(y)) = \int_E \mathbf{1}_U(x, y) \mu(dx) \quad y \in F$$

for alle  $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ , viser Standardbeviset ved brug af stabiliteten af  $\overline{M}(\mathcal{E})_+$  og  $\overline{M}(\mathcal{F})_+$  under endelig sum og tællelig sup-dannelse, at det er nok at vise, at

$$x \mapsto \nu(U(x)) \text{ } \mathcal{E}\text{-målelig og } y \mapsto \mu(U(y)) \text{ } \mathcal{F}\text{-målelig for alle } U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}.$$

Vi viser det første. Da  $\nu$  er  $\sigma$ -endelig, findes der  $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ , så at  $B_n \uparrow F$  og  $\nu(B_n) < \infty$  for alle  $n$ . D.v.s.  $\nu(U(x) \cap B_n) \uparrow \nu(U(x))$  for alle  $x \in E$  og  $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ , og det er derfor nok at vise, at for givent  $n \geq 1$  er  $\mathcal{D}_n = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ , hvor

$$\mathcal{D}_n := \{U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \mid x \mapsto \nu(U(x) \cap B_n) \in M(\mathcal{E})\}.$$

Men da  $M(\mathcal{E})$  er stabil under grænseovergang samt et vektorrum, er  $\mathcal{D}_n$  et  $d$ -system og derfor hele  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ , da den indeholder enhver produktmængde, idet

$$\nu((A \times B)(x) \cap B_n) = \nu(B \cap B_n) \cdot \mathbf{1}_A(x) \quad x \in E, A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}. \quad \diamond$$

Da positive målelige funktioner er integrable, er der ved fastsættelsen

$$m(U) := \int_E \nu(U(x)) \mu(dx) \quad \text{og} \quad \tilde{m}(U) := \int_F \mu(U(y)) \nu(dy)$$

for  $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ , derfor defineret to ikke-negative mængdefunktioner på  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ . Formlerne for sektiondannelse, integralets linearitet samt Monoton konvergens viser, at både  $m$  og  $\tilde{m}$  er mål på  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ , og da det ovenstående sikrer, at

$$m(A \times B) = \tilde{m}(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

for enhver produktmængde  $A \times B$ , har vi dermed påvist eksistensen af produktmålet  $\mu \otimes \nu$  samt ligheden  $\mu \otimes \nu = m = \tilde{m}$ . D.v.s. for alle  $U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$  er

$$\mu \otimes \nu(U) = \int_E \nu(U(x)) \mu(dx) = \int_F \mu(U(y)) \nu(dy)$$

eller ækvivalent

$$\int_{E \times F} \mathbf{1}_U d\mu \otimes \nu = \int_E \left\{ \int_F \mathbf{1}_U(x, y) \nu(dy) \right\} \mu(dx) = \int_F \left\{ \int_E \mathbf{1}_U(x, y) \mu(dx) \right\} \nu(dy).$$

Udnyttes igen integralets linearitet samt Monoton konvergens ses ved brug af Standardbeviset, at denne integrallighed udvider til alle ikke-negative målelige funktioner, og vi har hermed vist flg. sætning, hvor første del normalt tilskrives Tonelli og anden Fubini. Det er vigtigt, at målene i det mindste er sum-endelige.

### Sætning 5 Tonelli-Fubini.

Produktmålet  $\mu \otimes \nu$  eksisterer, og for ethvert  $f \in \overline{M}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_+$  er

$$\int_{E \times F} f d\mu \otimes \nu = \int_F \left\{ \int_E f(x, y) \mu(dx) \right\} \nu(dy) = \int_E \left\{ \int_F f(x, y) \nu(dy) \right\} \mu(dx),$$

specielt er

$$\mu \otimes \nu(U) = \int_F \mu(U(y)) \nu(dy) = \int_E \mu(U(x)) \mu(dx) \quad U \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}.$$

Endvidere er  $f \in M(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$  element i  $L^1(\mu \otimes \nu)$ , hvis og kun hvis

$$\int_E \left\{ \int_F |f(x, y)| \nu(dy) \right\} \mu(dx) \text{ og dermed } \int_F \left\{ \int_E |f(x, y)| \mu(dx) \right\} \nu(dy)$$

er endelig. I givet fald er  $\mu(E \setminus A_1^f) = \nu(F \setminus A_2^f) = 0$ , hvor

$$A_1^f := \{x \in E \mid \int |f(x, y)| \nu(dy) < \infty\} = \{x \in E \mid y \mapsto f(x, y) \in L^1(\nu)\}$$

$$A_2^f := \{y \in F \mid \int |f(x, y)| \mu(dx) < \infty\} = \{y \in F \mid x \mapsto f(x, y) \in L^1(\mu)\},$$

og der gælder  $I_1^f \in L^1(\mu)$  og  $I_2^f \in L^1(\nu)$  samt beregningsformlen

$$\int_{E \times F} f d\mu \otimes \nu = \int_E I_1^f(x) \mu(dx) = \int_F I_2^f(y) \nu(dy),$$

hvor

$$I_1^f(x) := \int_F f(x, y) \nu(dy) \cdot \mathbf{1}_{A_1^f}(x) \quad x \in E$$

og

$$I_2^f(y) := \int_E f(x, y) \mu(dx) \cdot \mathbf{1}_{A_2^f}(y) \quad y \in F.$$

Bemærk at Fubini's Sætning er særlig simpel for  $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$  hvor  $A_1^f = E$  og  $A_2^f = F$ , idet vi her har formelen

$$\int_{E \times F} f d\mu \otimes \nu = \int_F \left\{ \int_E f(x, y) \mu(dx) \right\} \nu(dy) = \int_E \left\{ \int_F f(x, y) \nu(dy) \right\} \mu(dx).$$

Dette er specielt opfyldt, hvis  $\mu$  og  $\nu$  er endelige mål, og  $f$  er begrænset.

Da  $\lambda_{n+1} = \lambda_n \otimes \lambda_1$  for  $n \geq 1$  følger ved induktion og brug af Tonelli's sætning, at eksistensen af Lebesgue målet på  $\mathbf{R}^n$  er et spørgsmål om eksistens af Lebesgue målet på  $\mathbf{R}$ .

Bemærkning. Tonelli-Fubini's sætning og Lemma 9 er her kun formuleret for produktmål med to marginaler, men der gælder tilsvarende udsagn for produktmål med endelig mange marginaler. Dette betyder f.eks., at for alle  $n \geq 2$  kan

$$\int f d\lambda_n$$

for ethvert  $f \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{B}(\mathbf{R}^n))_+$  evalueres som et  $n$ -foldigt itereret integral m.h.t.  $\lambda_1$ , og rækkefølgen hvori de enkelte variable integreres er uden betydning.

### Integrationsformel.

Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegne et  $\sigma$ -endeligt målrum. For ethvert  $f \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{E})_+$  er

$$\int_E f d\mu = \int_0^\infty \mu(f > t) \lambda_1(dt).$$

D.v.s. da  $t \mapsto \mu(f > t)$  er aftagende, at

$$\sum_{k=1}^\infty \mu(f > k) \leq \int_E f d\mu \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(f > k) + \mu(f > 0).$$

Bevis. Lad  $f \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{E})_+$  være givet. Da den sidste påstand følger ved brug af simple uligheder, ser vi kun på den første. Definer

$$H := \{(e, t) \in E \times \mathbf{R} \mid 0 < t < f(e)\},$$

d.v.s.  $H$  er 'området under grafen'.  $H$  er en produktmålelig mængde, idet

$$H = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}_+} \{f > q\} \times ]0, q[ \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}),$$

hvor  $\mathbf{Q}$  er de rationale tal, og  $H(t) = \emptyset$  for  $t \leq 0$  samt

$$H(t) = \{f > t\} \quad t > 0 \quad \text{og} \quad H(e) = ]0, f(e)[ \quad e \in E.$$

D.v.s.

$$\mu \otimes \lambda_1(H) = \int_{\mathbf{R}} \mu(H(t)) \lambda_1(dt) = \int_0^\infty \mu(f > t) \lambda_1(dt)$$

og

$$\mu \otimes \lambda_1(H) = \int_E \lambda_1(H(e)) \mu(de) = \int_E f(e) \mu(de) = \int_E f d\mu,$$

hvilket er den søgte lighed. ◇

I tilfældet  $E = \mathbf{R}$  og  $\mu = \lambda_1$  og dermed  $\mu \otimes \lambda_1 = \lambda_2$  har vi undervejs vist det vel kendte udsagn om, at integralet af en ikke-negativ funktion er lig arealet af området under grafen.

Da  $t \mapsto \mu(f > t)$  er aftagende og ikke-negativ og dermed Riemann integrabel over ethvert endeligt interval, viser sammenhængen mellem Lebesgue og Riemann integralet, at ligheden også kan formuleres som

$$\int_E f d\mu = \text{UR} \int_0^\infty \mu(f > t) dt = \lim_n 2^{-n} \sum_{k=1}^\infty \mu(f > k2^{-n}).$$

Integranden  $t \mapsto \mu(f > t)$  kan erstattes af  $t \mapsto \mu(f \geq t)$ , da  $\mu(f \geq t) \neq \mu(f > t)$  for højst tællelig mange  $t$ , d.v.s. en  $\lambda_1$ -nulmængde (tænk over dette).

## Appendiks A. Metriske rum.

Som det er velkendt definerer

$$(x, y) \mapsto |x - y| \quad x, y \in \mathbf{R}$$

og

$$(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{R}^n$$

et afstandsbegreb i  $\mathbf{R}$  h.h.v.  $\mathbf{R}^n$ , som er ikke-negativ, symmetrisk og opfylder trekantsuligheden. Disse såkaldte *Euklidiske metrikker* danner baggrund for flg. notation.

Lad  $S$  betegne en ikke-tom mængde. En funktion  $d : S \times S \rightarrow \mathbf{R}_+$  kaldes en *metrik* på  $S$ , hvis

- 1)  $d(x, y) = d(y, x) \quad x, y \in S$
- 2)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad x, y, z \in S$
- 3)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad x, y \in S.$

Hvis 3) erstattes af det svagere krav

$$d(x, x) = 0 \quad x \in S,$$

taler man om en *pseudometrik*.

$(S, d)$  kaldes i givet fald et metrisk h.h.v. et pseudometrisk rum, og værdien  $d(x, y)$  omtales som  $d$ -afstanden mellem punkterne  $x$  og  $y$ .

Tilstedeværelsen af en metrik  $d$  på  $S$  gør det muligt direkte at oversætte en række velkendte afstandsrelaterede begreber fra  $\mathbf{R}^n$  så som punktkonvergens, åbne kugler, åbne og lukkede mængder samt kontinuitet. Generalisationerne foregår i h.h.t. flg. definitioner. Læg mærke til at begreberne afhænger eksplicit af den valgte metrik  $d$ .

### Punktkonvergens

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0.$$

hvor  $(x_n)_{n \geq 1}$  og  $x$  er punkter i  $S$ .

### Åbne kugler

$$b(x, r) := \{y \in S \mid d(x, y) < r\}$$

hvor  $x \in S$  og  $r > 0$  kaldes den *åbne kugle* med centrum  $x$  og radius  $r$ .

### Åbne mængder

$$U \subseteq S \text{ er åben} \Leftrightarrow \forall x \in S \exists r > 0 : b(x, r) \subseteq U.$$

## Lukkede mængder

$F \subseteq S$  er lukket  $\Leftrightarrow F^c$  er åben.

## Kontinuitet

$f : S \rightarrow \mathbf{R}$  er kontinuert  $\Leftrightarrow x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$  for alle  $(x_n)_{n \geq 1}$  og  $x$  i  $S$

(overvej)  $\Leftrightarrow \forall x \in S \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

Med udgangspunkt i velkendte egenskaber ved Euklidiske metrikker indføres yderligere to begreber.

## Separabilitet

Et metrisk rum  $(S, d)$  siges at være *separabelt*, hvis der findes en følge  $(x_n)_{n \geq 1}$  af punkter i  $S$ , så at

$$\forall x \in S \forall r > 0 \exists n \geq 1 : x_n \in b(x, r).$$

Man udtrykker dette ved at sige, at  $(x_n)_{n \geq 1}$  er *tæt* i  $S$ .

## Fuldstændighed

Et metrisk rum  $(S, d)$  siges at være *fuldstændigt*, hvis enhver *Cauchyfølge* er konvergent. En følge  $(x_n)_{n \geq 1}$  af punkter i  $S$ , siges her at være en Cauchyfølge, hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \geq 1 : m, k \geq n \Rightarrow d(x_m, x_k) < \epsilon.$$

Det er ofte vigtigt at arbejde med forskellige metrikker på en mængde  $S$ . I denne forbindelse er flg. begreb åbenlyst vigtigt.

## Ækvivalens

To metrikker  $d_1$  og  $d_2$  på  $S$  siges at være *ækvivalente* hvis

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d_2(x_n, x) \rightarrow 0$$

for vilkårlige punkter  $(x_n)_{n \geq 1}$  og  $x$  i  $S$ . D.v.s. ækvivalente metrikker har samme konvergente følger.

Da man forholdsvis let kan vise, at ækvivalensbetingelsen kan omformuleres til

$$\forall x \in S \forall r > 0 \exists r_1, r_2 > 0 : b_{d_1}(x, r_1) \subseteq b_{d_2}(x, r) \text{ og } b_{d_2}(x, r_2) \subseteq b_{d_1}(x, r),$$

ses, at egenskaberne åbenhed, lukkethed, kontinuitet samt separabilitet bevares ved overgang mellem ækvivalente metrikker. Dette gælder derimod ikke nødvendigvis for fuldstændighed, som flg. eksempel viser. (tænk over dette)

$$S := (0, 1] \text{ samt } d_1(x, y) := |x - y| \text{ og } d_2(x, y) := |1/x - 1/y| \text{ } x, y \in S.$$

$d_1$  og  $d_2$  er da ækvivalente metrikker på  $S$ , og det metriske rum  $(S, d_2)$  er fuldstændigt, men ikke  $(S, d_1)$ . F.eks. er  $(1/n)_{n \geq 1}$  en  $d_1$ -Cauchyfølge i  $S$ , som ikke konvergerer i  $(S, d_1)$ .

## Appendiks B. Konvekse funktioner.

I det følgende betegner  $J \subseteq \mathbf{R}$  et interval med endepunkter  $v_J$  og  $h_J$ , hvor  $-\infty \leq v_J < h_J \leq \infty$ .  $J^\circ := ]v_J, h_J[$ .

**Notation.**  $l : J \rightarrow \mathbf{R}$  siges at være *affin*, hvis

$$l(x) = ax + b \quad x \in J \quad \text{hvor } a, b \in \mathbf{R}.$$

$\varphi : J \rightarrow \mathbf{R}$  siges at være *konveks*, hvis

$$\varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y) \quad x, y \in J, \alpha \in [0, 1].$$

Affine funktioner er konvekse, og Middelværdisætningen viser, at hvis  $J$  er åben og  $\varphi$  differentiabel i  $J$ , er  $\varphi$  konveks, hvis  $x \mapsto \varphi'(x)$  er voksende, f.eks. hvis  $\varphi''$  eksisterer og er ikke-negativ. Desuden er ethvert overalt endeligt punktvis supremum af konvekse funktioner igen konvekst.

Lad i det følgende  $\varphi$  betegne en given konveks funktion. Konveksitetsligningen viser, at  $\{\varphi \leq a\}$  for ethvert  $a \in \mathbf{R}$  er en konveks mængde, d.v.s. et delinterval, i  $J$ .

$$\{\varphi > a\} = J \setminus \{\varphi \leq a\}$$

er derfor enten et delinterval i  $J$  eller en foreningsmængde af to sådanne. Heraf følger at

$$\varphi(x+) := \lim_{y \downarrow x} \varphi(y) \quad \text{og} \quad \varphi(x-) := \lim_{y \uparrow x} \varphi(y) \quad \text{eksisterer i } \overline{\mathbf{R}} \quad \text{for } x \in J. \quad (1)$$

Endvidere eksisterer  $\varphi(v_J+)$  og  $\varphi(h_J-)$ .

Bevis. Vi ser kun på  $\varphi(\cdot-)$ , da den anden går analogt. Lad  $x \in J \cup \{h_J\}$  være givet. For ethvert  $a \in \mathbf{R}$  har vi

$$\limsup_{y \uparrow x} \varphi(y) > a \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \ ]x - \epsilon, x[ \subseteq \{\varphi > a\} \Rightarrow \liminf_{y \uparrow x} \varphi(y) \geq a.$$

Dette viser, at

$$\limsup_{y \uparrow x} \varphi(y) = \liminf_{y \uparrow x} \varphi(y)$$

og dermed, at  $\varphi(x-)$  eksisterer i  $\overline{\mathbf{R}}$ . ◇

$$\varphi(x) \geq \varphi(x+) \vee \varphi(x-) \quad x \in J. \quad (2)$$

Bevis. Vi viser kun  $\varphi(\cdot) \geq \varphi(\cdot+)$ . Lad  $x < y$  være punkter i  $J$ .

$$\begin{aligned} \varphi(x+) &= \limsup_{z \downarrow x} \varphi(z) = \limsup_{\alpha \uparrow 1} \varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \\ &\leq \limsup_{\alpha \uparrow 1} \alpha\varphi(x) + \limsup_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha)\varphi(y) = \varphi(x). \quad \diamond \end{aligned}$$

**Kontinuitet.**  $\varphi$  er kontinuert i  $J^\circ$ .

Bevis. Lad  $x \in J^\circ$  være givet. Da  $J^\circ$  er åben og  $\varphi$  konveks, er

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2}(\varphi(x-h) + \varphi(x+h)) \quad \text{for } h \text{ lille,}$$

d.v.s.

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2} \limsup_{h \downarrow 0} (\varphi(x-h) + \varphi(x+h)) = \frac{1}{2}(\varphi(x-) + \varphi(x+)).$$

Hvilket sammen med (2) viser, at  $\varphi(x) = \varphi(x-) = \varphi(x+)$ . ◇

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x_0)}{y - x_0} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \quad y < x_0 < x \text{ i } J.$$

Bevis. Lad  $y < x_0 < x$  i  $J$  være givet.

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_0)}{y - x_0} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} &\Leftrightarrow (x - x_0)(\varphi(y) - \varphi(x_0)) \geq (x_0 - y)(\varphi(x_0) - \varphi(x)) \\ &\Leftrightarrow \varphi(x_0) \leq \frac{x - x_0}{x - y} \varphi(y) + \left(1 - \frac{x - x_0}{x - y}\right) \varphi(x) \end{aligned}$$

hvilket er opfyldt ifølge konveksiteten, da

$$x_0 = \frac{x - x_0}{x - y} \cdot y + \left(1 - \frac{x - x_0}{x - y}\right) \cdot x. \quad \diamond$$

Heraf ses at for ethvert  $x_0 \in J^\circ$  er tallene

$$d^+ := \inf_{x > x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \quad \text{og} \quad d^- := \sup_{x < x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

begge endelige og  $d^- \leq d^+$ . Pr. definition af  $d^-$  og  $d^+$  har vi

$$\varphi(x) \geq d^+ \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0) \quad x > x_0 \quad \text{og} \quad \varphi(x) \geq d^- \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0) \quad x < x_0$$

og derfor

$$\varphi(x) \geq d^-(x - x_0) + \varphi(x_0) \quad x \in J.$$

Herudfra kan vi nu uddrage to vigtige konsekvenser.

For ethvert  $x_0 \in J^\circ$  eksisterer der en affin 'støttefunktion', d.v.s. en affin funktion  $l_{x_0}$ , så at

$$l_{x_0} \leq \varphi \quad \text{og} \quad l_{x_0}(x_0) = \varphi(x_0). \quad (3)$$

Lad  $(q_i)_{i \geq 1}$  betegne en nummerering af  $\mathbf{Q} \cap J^\circ$  og lad for  $i \geq 1$   $l_i$  betegne en affin støttefunktion hørende til  $q_i$ . Funktionen

$$x \mapsto \sup_i l_i(x) \quad x \in J$$

er derfor konveks, da den er domineret af  $\varphi$  og derfor overalt endelig. Men da den pr. definition stemmer overens med  $\varphi$  på mængden  $\mathbf{Q} \cap J^\circ$  følger, da konvekse funktioner er kontinuerte i  $J^\circ$ , at

$$\varphi \geq \sup_i l_i \quad \text{og} \quad \varphi(x) = \sup_i l_i(x) \quad x \in J^\circ. \quad (4)$$

Punkt (3) benyttes i beviset for Jensen's ulighed og punkt (4) i beviset for Jensen's ulighed for betingede middelværdier.

### Appendiks C. Integration af funktioner med komplekse værdier.

I gennemgangen af integralteorien har vi udelukkende fokuseret på reelle integranter. Men i forbindelse med emnet karakteristiske funktioner får vi brug for at kunne tale om integralet af en kompleks funktion. Udvidelsen, som naturligvis sker via integration af h.h.v. realdel og imaginærdel, kræver lidt ny notation.  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  betegner her et vilkårligt målrum.

Definer

$$M(\mathcal{E}, \mathbf{C}) := \{f : E \rightarrow \mathbf{C} \mid \Re f, \Im f \in M(\mathcal{E})\}$$

$$L^1(\mu, \mathbf{C}) := \{f \in M(\mathcal{E}, \mathbf{C}) \mid \Re f, \Im f \in L^1(\mu)\} = \{f \in M(\mathcal{E}, \mathbf{C}) \mid |f| \in L^1(\mu)\}.$$

Det sidste lighedstegn beror på uligheden  $|\Re f| \vee |\Im f| \leq |f| \leq |\Re f| + |\Im f|$ .

Egenskaber ved  $M(\mathcal{E})$  og  $L^1(\mu)$  sikrer, at funktionsrummene  $M(\mathcal{E}, \mathbf{C})$  og  $L^1(\mu, \mathbf{C})$  er komplekse vektorrum, samt at  $M(\mathcal{E}, \mathbf{C})$  er stabil under punktvis konvergens. Bemærk at  $M(\mathcal{E})$  og  $L^1(\mu)$  udgør underrum i h.h.v.  $M(\mathcal{E}, \mathbf{C})$  og  $L^1(\mu, \mathbf{C})$ .

Afbildningen

$$L^1(\mu, \mathbf{C}) \ni f \rightarrow \int f d\mu := \int \Re f d\mu + i \int \Im f d\mu \in \mathbf{C}.$$

kaldes stadig integralet m.h.t.  $\mu$ , og udnyttes at integralet er lineært på  $L^1(\mu)$  ses, at denne afbildning, der udvider integralet på  $L^1(\mu)$ , er kompleks lineær samt opfylder for alle  $f \in L^1(\mu, \mathbf{C})$

$$\Re\left(\int f d\mu\right) = \int \Re f d\mu \quad \text{og} \quad \Im\left(\int f d\mu\right) = \int \Im f d\mu$$

og derfor

$$\overline{\int f d\mu} = \int \bar{f} d\mu.$$

Endvidere er

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu,$$

da der for ethvert  $f \in L^1(\mu, \mathbf{C})$  findes et  $\lambda \in \mathbf{C}$  med længde 1, så at

$$\left| \int f d\mu \right| = \lambda \int f d\mu$$

og dermed, da  $|\Re(\lambda f)| \leq |\lambda f| = |f|$ ,

$$\left| \int f d\mu \right| = \int \lambda f d\mu = \Re\left(\int \lambda f d\mu\right) = \int \Re(\lambda f) d\mu \leq \int |f| d\mu.$$

Sammen med Lebesgue's Sætning viser dette flg. konvergensresultat, hvor  $f$  og  $(f_n)_{n \geq 1}$  er elementer i  $L^1(\mu, \mathbf{C})$ .

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o. og } |f_n| \leq g \text{ } \mu\text{-n.o., hvor } g \in M(\mathcal{E})_+ \text{ og } \int g d\mu < \infty \Rightarrow$$

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0 \text{ og dermed } \lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Ikke overraskende gælder der også versioner af Fubini's Sætning for funktioner med komplekse værdier. Men i stedet for at søge efter den mest generelle nøjes vi her med flg. udgave, som vi gang på gang skal benytte i forbindelse med gennemgangen af karakteristiske funktioner. Beviset overlades til læseren.

Lad  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  og  $(F, \mathcal{F}, \nu)$  betegne endelige målrum og lad  $f \in \text{bM}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mathbf{C})$  være givet (b'et indikerer, at  $|f| \leq M < \infty$  for en positiv konstant  $M$ ).

Da er  $f \in L^1(\mu \otimes \nu, \mathbf{C})$  og

$$x \mapsto \int_F f(x, y) \nu(dy) \in L^1(\mu, \mathbf{C}) \text{ og } y \mapsto \int_E f(x, y) \mu(dx) \in L^1(\nu, \mathbf{C})$$

samt

$$\int_{E \times F} f d\mu \otimes \nu = \int_E \left\{ \int_F f(x, y) \nu(dy) \right\} \mu(dx) = \int_E \left\{ \int_F f(x, y) \mu(dx) \right\} \nu(dy).$$

# Supplerende Opgaver.

**Metriske rum.**

**Opgave 1** Lad  $(S, d)$  betegne et metrisk rum. Definer

$$d_1(x, y) := d(x, y) \wedge 1 \quad \text{og} \quad d_2(x, y) := d(x, y)/(1 + d(x, y)) \quad x, y \in S.$$

Vis at  $d_1$  og  $d_2$  er metrikker på  $S$ , som er ækvivalente med  $d$ .

Vink: Udnyt at  $x \mapsto x \wedge 1$  og  $x \mapsto x/(1 + x)$  er voksende og subadditiv på  $\mathbf{R}_+$ , hvor en funktion  $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  siges at være subadditiv, hvis

$$\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad x, y \in \mathbf{R}_+.$$

**Opgave 2** Lad  $S$  betegne en ikke-tom mængde og  $d_1$  og  $d_2$  metrikker på  $S$ . Vis at  $d_1$  og  $d_2$  er ækvivalente, hvis og kun hvis

$$\forall x \in S \forall r > 0 \exists r_1, r_2 > 0 : b_{d_1}(x, r_1) \subseteq b_{d_2}(x, r) \quad \text{og} \quad b_{d_2}(x, r_2) \subseteq b_{d_1}(x, r).$$

Vink til 'kun hvis': Antag det ikke gælder og få en modstrid.

Slut heraf at en mængde  $A \subseteq S$  er  $d_1$ -åben/ $d_1$ -lukket, hvis og kun hvis den er  $d_2$ -åben/ $d_2$ -lukket,  $S$  er  $d_1$ -separabel, hvis og kun hvis  $S$  er  $d_2$ -separabel, samt at  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  er  $d_1$ -kontinuert, hvis og kun hvis  $f$  er  $d_2$ -kontinuert.

**Opgave 3** Lad  $(S, d)$  betegne et metrisk rum.

1) Vis at en funktion  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  er kontinuert, hvis og kun hvis  $f^{-1}(U)$  er åben i  $S$  for enhver åben delmængde  $U$  af  $\mathbf{R}$ .

2) Vis at  $x \mapsto d(x, x_0)$  er kontinuert for ethvert  $x_0 \in S$  og mere generelt  $x \mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$  for enhver delmængde  $A \subseteq S$ .

Vink. Vis og udnyt at trekantsuligheden ækvivalent kan skrives som

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \quad \text{for alle } x, y, z \in S.$$

3) Vis at  $(x, y) \mapsto d(x, y)$  er kontinuert fra  $S^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , hvis  $S^2$  udstyres med en produktmetrik, d.v.s. en metrik hvori konvergens svarer til konvergens af koordinaterne.

**Opgave 4** Lad  $S$  betegne intervallet  $]0, 1]$  og definer  $d_1$  og  $d_2$  som

$$d_1(x, y) := |x - y| \quad \text{og} \quad d_2(x, y) := |1/x - 1/y| \quad x, y \in S.$$

Vis at  $d_1$  og  $d_2$  er ækvivalente metrikker, og at  $d_2$ , men ikke  $d_1$ , er fuldstændig. D.v.s. fuldstændighed bevares ikke ved overgang til en ækvivalent metrik.

**Opgave 5** Lad  $(S, d)$  betegne et separabelt metrisk rum og lad  $f$  og  $g$  betegne målelige funktioner med værdier i  $S$  defineret på et måleligt rum  $(E, \mathcal{E})$ . Vis at

$$E \ni e \mapsto d(f(e), g(e)) \in M\mathcal{E}.$$

Vink. Udnyt Opgave 3 punkt 3).

**Opgave 6** Lad  $(S, d)$  betegne et metrisk rum og lad  $(x_n)_{n \geq 1}$  være en følge af punkter i  $S$ . Definer

$$L((x_n)_{n \geq 1}) := \{y \in S \mid \forall \epsilon > 0 : x_n \in b(y, \epsilon) \text{ for uendelig mange } n\}.$$

$L((x_n)_{n \geq 1})$  kaldes mængden af *limespunkter* eller synonymt mængden af *fortætningspunkter* for følgen  $(x_n)_{n \geq 1}$ . Vis nu at

a)  $L((x_n)_{n \geq 1})$  er lukket.

b)

$$L((x_n)_{n \geq 1}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \quad \text{hvor} \quad A_n := \{x_k \mid k \geq n\} \quad n \geq 1.$$

c)

$$L((x_n)_{n \geq 1}) = \{y \in S \mid \exists (n_k)_{k \geq 1} \text{ delfølge} : x_{n_k} \rightarrow y\}.$$

d)  $L((x_n)_{n \geq 1})$  består af netop et punkt, hvis  $(x_n)_{n \geq 1}$  er konvergent.

### Målelige rum.

I det følgende betegner  $(E, \mathcal{E})$  overalt et måleligt rum.

**Opgave 7** Øvelse 1, samt at  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$ , hvor  $\mathcal{G} := \{\{x\} \mid x \in \mathbf{R}\}$ .

**Opgave 8** Vis, f.eks. ved hjælp af identiteterne øverst side 5, at  $\sigma(\mathcal{G}_1)$  og  $\sigma(\mathcal{G}_2)$  er identiske  $\sigma$ -algebraer på  $\mathbf{R}$ , hvor

$$\mathcal{G}_1 = \{]a, b[ \mid -\infty < a < b < \infty\} \quad \text{og} \quad \mathcal{G}_2 = \{[a, b[ \mid -\infty < a < b < \infty\}.$$

**Opgave 9** Lad  $(A_i)_{i \geq 1} \subseteq 2^E$  være givet. Definer

$$\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, \dots, A_n) \quad n \geq 1 \quad \text{og} \quad \mathcal{A} := \bigcup_n \mathcal{F}_n.$$

Vis at  $\mathcal{A}$  er en algebra indeholdende højst tællelig mange elementer.

Bemærkning. Flg. eksempel viser, at  $\sigma((A_i)_{i \geq 1})$  og  $\mathcal{A}$  kan være forskellige.

Sæt  $E = \mathbf{N}$  og  $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$  for  $n \geq 1$ . Da  $A_1 = \{1\}$  og  $A_n \setminus A_{n-1} = \{n\}$  for  $n \geq 2$ , er  $\sigma((A_i)_{i \geq 1}) = 2^{\mathbf{N}}$ , d.v.s. alle delmængder af  $\mathbf{N}$ .

Ethvert  $B$  i  $\mathcal{A}$  er derimod af formen  $B_n$  eller  $B_n \cup [n+1, \infty[$  for et  $n \geq 1$  og et  $B_n \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , d.v.s. mængden af alle lige tal ligger ikke i  $\mathcal{A}$ .

**Opgave 10** Sæt  $E = \mathbf{N}$ . Betragt mængderne

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{3, 4\} \quad \text{og} \quad A_3 = \{2, 3, 4\}.$$

Bestem den tilhørende partition (se side 6 øverst) og beregn antallet af elementer i  $\sigma(A_1, A_2, A_3)$ .

**Opgave 11** Lad  $(E_i, \mathcal{E}_i)$  for  $i = 1, 2$  betegne målelige rum. Vis at for alle  $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$  og  $e_1 \in E_1$  er

$$A(e_1) := \{e_2 \in E_2 \mid (e_1, e_2) \in A\} \in \mathcal{E}_2.$$

$A(e_1)$  kaldes  $e_1$ -sektionen af  $A$  (tegn).

Vink. Definer  $\mathcal{D}(e_1) := \{A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \mid A(e_1) \in \mathcal{E}_2\}$ . Vis at  $\mathcal{D}(e_1)$  er en  $\sigma$ -algebra, som indeholder alle 'målelige kasser'.

**Opgave 12** Betragt  $\sigma$ -algebraen  $\mathcal{B}$  i Øvelse 1. Vis at  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R})$ , men at  $\mathcal{B}$  ikke er tællelig frembragt.

Vink: Antag at  $\mathcal{B} = \sigma((A_i)_{i \geq 1})$ . Overvej at det kan antages, at  $A_i$  er tællelig for alle  $i$ . Vis dernæst ved hjælp af den vigtige regel på side 7, at for ethvert  $A \in \sigma((A_i)_{i \geq 1})$  gælder enten

$$B \subseteq A \text{ eller } B \cap A = \emptyset \text{ hvor } B = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Overvej at dette indebærer en modstrid, da  $\mathbf{R}$  er overtællelig.

### Målelige funktioner.

**Opgave 13** Lad  $f$  og  $g$  betegne elementer i  $M(\mathcal{E})$ , d.v.s.  $f$  og  $g$  er målelige reelle funktioner defineret på  $E$ . Vis at  $\{f \neq g\}$  og  $\{f \leq g\} \in \mathcal{E}$ . Vink: Opskriv de to mængder ved hjælp af vektorfunktionen  $(f, g)$ .

**Opgave 14** Antag at  $\mathcal{E} = \{\emptyset, E\}$ . Vis at  $M(\mathcal{E})$  kun indeholder konstante funktioner.

**Opgave 15** Vis at  $S(\mathcal{E}) = \{f \in M(\mathcal{E}) \mid f(E) \text{ endelig mængde}\}$ . Slut herudfra at ethvert  $f \in S(\mathcal{E})$  er på formen  $\sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ , hvor summen er endelig,  $a_i$ 'erne reelle tal og  $A_i$ 'erne en partition af  $E$  bestående af elementer i  $\mathcal{E}$ .

**Opgave 16** Vis at  $\mathcal{E}$  er tællelig frembragt, hvis og kun hvis  $\mathcal{E} = \sigma(f)$  for et  $f \in M(\mathcal{E})$ . Vink til 'kun hvis'-delen. Antag  $\mathcal{E} = \sigma((A_n)_{n \geq 1})$  og sæt

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} \cdot \mathbf{1}_{A_n}.$$

Studer for  $n \geq 1$  mængderne  $\{[10^n \cdot f] \text{ er et ulige tal}\}$ , hvor  $[x]$  er heltalsdelen af et reelt tal  $x$ , d.v.s. det hele tal, som opfylder uligheden  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

**Opgave 17** Lad  $\mathcal{B}$  være den i Øvelse 1 definerede  $\sigma$ -algebra på  $\mathbf{R}$ . Vis at  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  er målelig m.h.t. til  $(\mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathcal{B})$  hvis og kun hvis

$$\{f = x\} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \text{ for alle } x \in \mathbf{R}.$$

Vis omvendt (ikke helt let) at  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  er målelig m.h.t. til  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ , hvis og kun hvis  $f$  er på formen

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$$

hvor  $a_i$ 'erne er forskellige reelle tal,  $A_i$ 'erne parvis disjunkte elementer i  $\mathcal{B}$ , hvor  $(A_i)_{i \geq 1}$  alle er tællelige og  $A_0^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

**Opgave 18** Vis at en funktion  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  er Borel målelig, d.v.s.  $(\mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ -målelig, hvis  $f$  er enten monoton, konveks eller højrekontinuert.

**Mål.**

**Opgave 19** Betragt målrummet  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$ . Vis at  $A \in \mathcal{N}_{\lambda_1}$ , hvis  $A \subseteq \mathbf{R}$  er tællelig. Vis at kontinuerte funktioner  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  er identiske, hvis  $f = g$   $\lambda_1$ -n.o.

**Opgave 20** Vis at  $m(\mathcal{E})$  er stabil under tællelig sum. Slut heraf at hvis  $(\omega_i)_{i \geq 1}$  er en følge af forskellige punkter i  $E$  og  $(p_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathbf{R}_+$ , så definerer

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \mathbf{1}_A(\omega_i) \quad A \subseteq E$$

et mål på  $(E, 2^E)$  med total masse  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ . Bestem  $E \ni e \mapsto \mu(\{e\})$ .

**Opgave 21** Betragt målrummet  $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ , hvor  $\mathcal{B}$  er  $\sigma$ -algebraen i Øvelse 1. Vis at flg. mængdefunktion  $\mu$  er et ikke  $\sigma$ -endeligt mål på  $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ .

$$\mu(A) := 0 \text{ hvis } A \text{ tællelig og } \mu(A) := \infty \text{ hvis } A^c \text{ tællelig.}$$

**Opgave 22** Lad  $\mu$  og  $\nu$  betegne to endelige mål på  $(E, \mathcal{E})$ . Vis at

$$\{A \in \mathcal{E} \mid \mu(A) \leq \nu(A)\}$$

er  $\uparrow$ -stabil (voksende foreningsmængde),  $\downarrow$ -stabil (aftagende fællesmængde) samt  $\sum$   $c$ -stabil (tællelig disjunkt forening.) Slut herudfra at hvis  $\mu_1$  og  $\mu_2$  er to endelige mål på  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ , så at

$$\mu_1(U) \leq \mu_2(U) \text{ for alle } U \subseteq \mathbf{R} \text{ åben,}$$

så er  $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$  for alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ . Vink: Udnyt Øvelse 4.

**Opgave 23** Vis at ethvert mål  $\nu$  på  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  højst har én kontinuert tæthed m.h.t.  $\lambda_1$ .

**Opgave 24** Lad  $\nu$  betegne et mål på  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ , så at  $\nu(I) < \infty$  for ethvert endeligt interval  $I$ , og lad  $g \in \overline{M}(\mathcal{B}(\mathbf{R}))_+$  være givet. Udnyt Korollaret til Proposition 2 til at vise, at  $\nu$  er absolut kontinuert m.h.t.  $\lambda_1$  med tæthed  $g$  hvis og kun hvis

$$\nu([a, b]) = \int_a^b g d\lambda_1 \quad \text{for alle } a < b.$$

**Opgave 25** Antag at  $\mu$  og  $\nu$  er endelige ækvivalente mål på  $(E, \mathcal{E})$ . Vis for givne elementer  $(f_n)_{n \geq 1}$  og  $f$  i  $M(\mathcal{E})$  at

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.} \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ } \nu\text{-n.o.} \text{ og } f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-mål} \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ } \nu\text{-mål.}$$

### Integralteori.

**Opgave 26** Betragt målrummet  $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \mu)$ , hvor  $\mu$  er *tællermålet*, d.v.s.

$$\mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(j) \quad A \subseteq \mathbf{N}.$$

$\mu(A)$  er altså antallet af elementer i mængden  $A$ , hvilket forklarer navnet.

a) Definer  $A_n := \{n, n+1, \dots\}$   $n \geq 1$ . Vis at  $A_n \downarrow \emptyset$ , men at  $\mu(A_n) \equiv \infty$ .

b) Vis at enhver reel funktion er målelig, samt at  $\emptyset$  er den eneste  $\mu$ -nulmængde. Slut heraf at i dette målrum er punktvis og  $\mu$ -n.o. konvergens det samme, d.v.s. for reelle funktioner  $(f_k)_{k \geq 1}$  og  $f$  gælder

$$f_k \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(n) = f(n) \text{ for alle } n \geq 1.$$

c) Vis at

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

hvis  $f \geq 0$  eller mere generelt  $f \in L(\mu)$  og deducer herudfra, at

$$L^1(\mu) = \{f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty\}.$$

d) Reformuler Lebesgue's Sætning som et udsagn om summer af reelle tal, idet en reel talfølge  $(a_n)_{n \geq 1}$  opfattes som en funktion  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$  givet ved  $f(n) = a_n$  for alle  $n \geq 1$ .

**Opgave 27** Betragt målrummet  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$ . Vis at  $(f_n)_{n \geq 1}$  konvergerer punktvis og angiv  $\lim_n f_n(x)$  for alle  $x$  samt beregn  $\lim_n \int f_n d\lambda_1$  hvis

a)  $f_n(x) = n \cdot \mathbf{1}_{]0, 1/n]}(x)$ , b)  $f_n(x) = f(x^n) \cdot \mathbf{1}_{[0, 1]}(x)$ , hvor  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \in C(\mathbf{R})$ .

**Opgave 28** Lad  $\mu$  være et mål på  $(E, \mathcal{E})$  og lad  $f \in L(\mu)$  være givet. Vis at

$$\int f d\mu \in \mathbf{R} \Rightarrow \tilde{f} \in L^1(\mu) \text{ og } f = \tilde{f} \text{ } \mu\text{-n.o.,}$$

hvor  $\tilde{f} := f \cdot \mathbf{1}_{\{|f| < \infty\}}$ . Vis endvidere at  $f \cdot \mathbf{1}_A \in L(\mu)$  for alle  $A \in \mathcal{E}$ .

**Opgave 29** Betragt målrummet  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$ . Lad  $f$  betegne funktionen  $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ , hvor  $\mathbf{Q}$  er mængden af rationale tal. Vis at  $f \in L^1(\lambda_1)$ , men at  $f$  ikke er Riemann integrabel over noget interval.

**Opgave 30** Lad  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  være en kontinuert funktion. Vis at hvis  $g \in L^1(\lambda_1)$ , så eksisterer det uegentlige Riemann integral  $UR \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$  og er lig  $\int g d\lambda_1$ .

**Opgave 31** Lad  $\mu$  være et mål på  $(E, \mathcal{E})$  og lad  $g \in L(\mu)$  være  $\mu$ -integrabel d.v.s.  $\int g d\mu \in \mathbf{R}$ . Vis at

$$\lim_{\mu(A) \downarrow 0} \int_A g d\mu = 0, \text{ d.v.s. } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \int_A g d\mu \right| < \epsilon \text{ hvis } \mu(A) \leq \delta.$$

Vink. Reducer til tilfældet  $g \geq 0$  og approksimer med  $g \wedge n$ .

**Opgave 32** Lad  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  være kontinuert, og definer for  $n \geq 1$

$$f_n(x) := n(f(x + 1/n) - f(x)) \quad x \in \mathbf{R}.$$

a) Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \lambda_1(dx) = f(b) - f(a)$$

for alle reelle tal  $a < b$ .

b) Antag at  $f$  er overalt differentiabel, samt at  $t \mapsto |f'(t)|$  er begrænset på ethvert begrænset interval. Vis nu at

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) d\lambda_1(dt) \quad \text{for alle reelle tal } a < b.$$

Vink. Udnyt del a) samt Middelværdisætningen og Lebesgue's Sætning.

**Opgave 33** Vis ved hjælp af "den lille transformationsætning", at

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(|\underline{x}|) \lambda_2(d\underline{x}) = 2\pi \int_0^{\infty} r \cdot f(r) \lambda_1(dr)$$

for alle ikke-negative Borel funktioner  $f$  defineret på  $\mathbf{R}$ .  $|\underline{x}|$  betegner her den sædvanlige længde i  $\mathbf{R}^2$ , d.v.s.  $|\underline{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Vink.  $\lambda_2(b\mathbf{0}, 1) = \pi$ .

**Opgave 34** Lad  $\mu$  betegne et mål på  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  og lad  $f \in L^1(\mu)$  være givet. Definer  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ved

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) d\mu \quad x \in \mathbf{R}.$$

Vis ved brug af Lebesgue's Sætning, at  $F$  er højrekontinuert med venstregrænseværdier. Hvornår er  $F$  kontinuert?

**Opgave 35** Lad  $\mu$  være et mål på  $(E, \mathcal{E})$ . Vis at

$$\mu \text{ er } \sigma\text{-endeligt} \Leftrightarrow \exists f \in L^1(\mu) \text{ så at } f(e) > 0 \text{ for alle } e \in E,$$

og slut herudfra, at hvis  $\mu$  er  $\sigma$ -endeligt, så findes der et sandsynlighedsmål  $\nu$  på  $(E, \mathcal{E})$ , så at  $\mu$  og  $\nu$  er ækvivalente.

Vink til  $\Rightarrow$ . Betragt funktioner af typen  $\sum_n a_n \cdot \mathbf{1}_{A_n}$ , hvor  $A_n$ 'erne alle har endeligt  $\mu$ -mål og udgør en overdækning af  $E$ , og  $a_n$ 'erne er positive tal.

**Opgave 36** Studer størrelsesforholdet mellem de forskellige  $L^p$ -rum for målrummene  $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \text{tællermålet})$  og  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$ . (svar: voksende i  $p$ , ingen inklusioner).

**Opgave 37** Lad  $a, b \in \mathbf{R}$  være givet og antag  $a > 0$ . Bestem billedmålet  $\lambda_1 \circ \varphi^{-1}$ , hvor  $\varphi : x \mapsto ax + b$ , og udled herudfra ved hjælp af Sætning 3 ligheden

$$a \int g(ax + b) \lambda_1(dx) = \int g(x) \lambda_1(dx) \quad \text{for } g \in L(\lambda_1).$$

Hvis  $a < 0$  skal faktoren foran integraltegnet være  $|a|$  i stedet for  $a$ . Betragt afbildningen  $\psi : x \mapsto x^2$ . Vis at  $\lambda_1 \circ \psi^{-1}$  er absolut kontinuert m.h.t.  $\lambda_1$  med tæthed  $x \mapsto 1/\sqrt{x} \cdot \mathbf{1}_{]0, \infty)}$  og udled herudfra, at

$$\int g(x^2) \lambda_1(dx) = \int_0^\infty g(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \lambda_1(dx) \quad \text{for } g \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{B}(\mathbf{R}))_+.$$

**Opgave 38** Lad  $\mu$  være et mål på  $(E, \mathcal{E})$  og lad  $r, s$  og  $t$  betegne ikke-negative reelle tal, så at  $1/r = 1/s + 1/t$ . Vis at for alle  $f, g \in \mathbf{M}(\mathcal{E})$  er

$$\left( \int |f \cdot g|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left( \int |f|^s d\mu \right)^{1/s} \cdot \left( \int |g|^t d\mu \right)^{1/t}$$

Vink: Udnyt Hölder's ulighed. Bemærk at  $1 = r/s + r/t$ .

**Opgave 39** Betragt målrummet  $(\mathbf{N}^2, 2^{\mathbf{N}^2}, \mu_2)$ , hvor  $\mu_2$  betegner tællermålet på  $(\mathbf{N}^2, 2^{\mathbf{N}^2})$ . Vis at  $\mu_2 = \mu_1 \otimes \mu_1$ , hvor  $\mu_1$  er tællermålet på  $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}})$ .

Oversæt Tonelli's og Fubini's sætninger til udsagn om ombytning af summationsordenen vedrørende summer af dobbeltindicerede rækker af reelle tal.

**Opgave 40** Betragt målrummet  $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \mu)$ , hvor  $\mu$  er tællermålet. Vis at i dette specielle målrum, er konvergens  $\mu$ -n.o. det samme som punktvis konvergens, hvorimod konvergens i  $\mu$ -mål svarer til uniform konvergens. Sammenlign dette med Proposition 10.

**Opgave 41** Lad  $\mu := \delta_e$  for et givet  $e \in E$ , d.v.s.  $\mu$  er punktmålet hørende til punktet  $e$ . Vis at

$$L(\mu) = \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E}) \text{ og } L^1(\mu) = \mathbf{M}(\mathcal{E}) \text{ samt } \int f d\mu = f(e) \quad \text{for alle } f \in \overline{\mathbf{M}}(\mathcal{E}).$$

**Opgave 42** Vis at  $\lambda_2(b(0, 1)) = \pi$  og slut heraf ved brug af Tonelli's sætning samt Opgave 33, at

$$\int e^{-x^2} \lambda_1(dx) = \sqrt{\pi}.$$

Vink: Anvend Opgave 33 på  $f : x \mapsto e^{-x^2}$ . Udnyt resultatet til at vise  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  samt at

$$\int \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \lambda_n(d\underline{x}) = \pi^{n/2} \quad \text{for } n \geq 2.$$

Beregn ligeledes dette integral ved brug af integrationsformlen side 50 samt Øvelse 10 og deducer herved, at

$$\lambda_n(b(\mathbb{Q}, 1)) = \pi^{n/2} / \Gamma(1 + n/2) \quad n \geq 1.$$

**Opgave 43** Lad  $\mu$  være et mål på  $(E, \mathcal{E})$  og lad  $(f_n)_{n \geq 1}$  og  $f$  betegne elementer i  $L^2(\mu)$ . Vis f.eks. ved brug af Cauchy-Schwarz's ulighed at

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-2-middel} \Rightarrow f_n^2 \rightarrow f^2 \text{ i } \mu\text{-middel.}$$

**Opgave 44** Lad  $\mu$  betegne et mål på  $(E, \mathcal{E})$  og  $(f_n)_{n \geq 1}$  og  $f$  elementer i  $L^1(\mu)$ , så at  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -n.o. Vis ved brug af Fatou's Lemma, at

$$\int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu \Leftrightarrow \int f_n^\pm d\mu \rightarrow \int f^\pm d\mu,$$

og slut ved brug af ligheden  $|x| = 2x^+ - x$  for  $x \in \mathbf{R}$ , at  $f_n \rightarrow f$  i  $\mu$ -middel, d.v.s.

$$\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

**Opgave 45** Lad  $\mu$  betegne et mål på  $(E, \mathcal{E})$  og lad  $f \in M(\mathcal{E})$  være givet. Vis ved hjælp af Hölder's ulighed, at for alle  $0 < s < t$  og  $0 < \alpha < 1$  er

$$\int |f|^{\alpha s + (1-\alpha)t} d\mu \leq \left( \int |f|^s d\mu \right)^\alpha \cdot \left( \int |f|^t d\mu \right)^{1-\alpha}.$$

Slut herudfra at  $I := \{s > 0 \mid f \in L^s(\mu)\}$  er et interval, samt at

$$I \ni s \mapsto \log \int |f|^s d\mu \text{ er konveks.}$$

Vis endvidere at hvis  $f_n \rightarrow f$  i  $L^{p_1}(\mu)$  og  $L^{p_2}(\mu)$ , så  $f_n \rightarrow f$  i  $L^p(\mu)$  for alle  $p \in (p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_2)$ .

**Opgave 46** Lad  $\mu$  betegne et  $\sigma$ -endeligt mål på  $(E, \mathcal{E})$ . Lad  $g \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{E})$  være givet så at  $g(x, \cdot) \in L^1(\mu)$  for alle  $x \in \mathbf{R}$ . Definer

$$G(x) := \int g(x, e) \mu(de).$$

a) Vis at  $x \mapsto G(x)$  er kontinuert, hvis  $x \mapsto g(x, e)$  er kontinuert for alle  $e$ , og der for alle  $x \in \mathbf{R}$  findes et  $\epsilon > 0$  og et  $h \in L^1(\mu)$  så at

$$|g(u, e)| \leq |h(e)| \text{ for alle } e \in E \text{ og } u \in (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

b) Vis at  $x \mapsto G(x)$  er differentiabel, hvis  $x \mapsto g(x, e)$  er differentiabel for alle  $e$ , og der for alle  $x \in \mathbf{R}$  findes et  $\epsilon > 0$  og et  $h \in L^1(\mu)$  så at

$$|g_1(u, e)| \leq |h(e)| \text{ for alle } e \in E \text{ og } u \in (x - \epsilon, x + \epsilon),$$

hvor  $g_1(x, e) := d/dx g(x, e)$  for alle  $x$  og  $e$ . Vis endvidere at

$$G'(x) = \int g_1(u, e) \mu(de) \quad x \in \mathbf{R}.$$

I både a) og b) kan antagelsen 'alle  $t$ ' erstattes af ' $\mu$ -n.a.  $t$ '.

Hvis  $\mu(E) < \infty$  gælder a) og b) stadig, hvis man i stedet for eksistensen af et dominerende  $h$  antager, at

$$\{g(u, \cdot) \mid |u - x| < \epsilon\} \text{ h.h.v. } \{(g(u, \cdot) - g(x, \cdot))/(u - x) \mid |u - x| < \epsilon\}$$

er  $\mu$ -uniformt integrable for et  $\epsilon > 0$ .

**Opgave 47** Lad  $\mu$  være et sandsynligheds mål på målrummet  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  og

$$g(x, t) := \cos(x \cdot t) \text{ for alle } x, t \in \mathbf{R}.$$

Vis at

$$x \mapsto G(x) := \int g(x, t) \mu(dt) \text{ er kontinuert.}$$

Antag yderligere at  $t \mapsto |t| \in L^2(\mu)$ . Vis at  $x \mapsto G(x)$  er to gange kontinuert differentiablel og find  $G'(0)$  og  $G''(0)$ .

**Opgave 48** Vis ved hjælp af Fubini's Sætning og ligheden  $\sin xt = x \int_0^t \cos xu \, du$ , at

$$\int_0^\infty \sin xt \cdot t e^{-t^2/2} dt = x \int_0^\infty \cos xt \cdot e^{-t^2/2} dt.$$

for ethvert  $x \in \mathbf{R}$ . Benyt dette til at vise at

$$p : x \mapsto \int_{\mathbf{R}} \cos xt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

opfylder differentiaalligningen  $p'(x) = -x \cdot p(x)$  tillige med begyndelsesbetingelsen  $p(0) = 1$ , d.v.s.  $p(x) = e^{-x^2/2}$  for  $x \in \mathbf{R}$ .

**Opgave 49** Vis at ethvert endeligt mål  $\mu$  på  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  er et Lebesgue-Stieltjes mål. Vink: Betragt  $F(x) := \mu((-\infty, x])$ . Overvej at det er nok at  $\mu(I) < \infty$  for ethvert endeligt interval.

**Opgave 50** Lad  $F$  betegne en voksende, højrekontinuert funktion og  $\lambda_F$  det tilhørende Lebesgue-Stieltjes mål. Vis ved approksimation med trappefunktioner, at hvis  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  er kontinuert, så gælder

$$\begin{aligned} \int_0^1 g d\lambda_F &= \int_{[0,1]} g d\lambda_F = \lim_n \sum_{i=1}^n g(i/n) \cdot (F(i/n) - F((i-1)/n)) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^n g((i-1)/n) \cdot (F(i/n) - F((i-1)/n)). \end{aligned}$$

Der gælder naturligvis et lignende resultat for et vilkårligt interval  $]a, b]$ , hvor  $-\infty < a < b < \infty$ . Blandt andet dette resultat begrundes, at man i forbindelse med Lebesgue-Stieltjes mål ofte skriver  $\int f dF$  i stedet for  $\int f d\lambda_F$  og tilsvarende  $\int f(x) dx$  i stedet for  $\int f(x) \lambda_1(dx)$ .

**Opgave 51** Lad  $F$  betegne en voksende, kontinuert funktion. Vis at

$$F(b)^2 - F(a)^2 = 2 \int_a^b F dF \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Vink: Anvend Opgave 50 på  $g = F$ . Opskrives identiteten for  $H, G$  og  $H + G$ , hvor  $H$  og  $G$  er voksende, kontinuerte funktioner, fremkommer ved subtraktion formelen for delvis integration, d.v.s.

$$H(b) \cdot G(b) - H(a) \cdot G(a) = \int_a^b H dG + \int_a^b G dH.$$

**Opgave 52** Lad  $F$  betegne en fordelingsfunktion. Definer  $\hat{F} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ved

$$\hat{F}(t) := \sup\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) < t\} \quad 0 < t < 1 \quad \text{og} \quad \hat{F}(t) := 0 \quad t \notin (0, 1).$$

Vis at

$$\{\hat{F} > x\} = \begin{cases} (0, 1)^c \cup (F(x), 1) & x < 0 \\ (F(x), 1) & x \geq 0. \end{cases}$$

Slut heraf at  $\hat{F}$  er Borel målelig, og at  $\hat{F}(U)$  har fordelingsfunktion  $F$ , hvis  $U \sim U(0, 1)$ . Benyt dette til at vise

$$\int h dF = \int_0^1 h(\hat{F}(u)) du \quad h \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}))_+.$$

Bemærk at  $F(\hat{F}(t)) \equiv t$ , hvis  $F$  er kontinuert, og at  $\hat{F}(F(t)) \equiv t$ , hvis  $F$  er strengt voksende. D.v.s. hvis  $F$  er kontinuert og strengt voksende, er  $\hat{F}$  den tilhørende inverse funktion.

**Opgave 53** Lad  $F$  være en voksende, kontinuert funktion. Vis at hvis  $\lambda_F(\mathbf{R})$  er endelig, så er

$$\lambda_F \text{ er absolut kontinuert} \Leftrightarrow \lim_n \int f_n \text{ eksisterer i } L^1(\lambda_1),$$

hvor  $f_n(x) := n(F(x + 1/n) - F(x))$   $x \in \mathbf{R}$  for alle  $n \geq 1$ .

**Opgave 54** For ethvert  $\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  findes præcist et  $\theta(\underline{x}) \in ]-\pi, \pi]$ , så at

$$\underline{x} = (|\underline{x}| \cos \theta(\underline{x}), |\underline{x}| \sin \theta(\underline{x})).$$

$\theta(\underline{x})$  er altså radiantallet i intervallet  $]-\pi, \pi]$  til vinklen mellem  $x$ -aksen og stedvektoren for  $\underline{x}$  målt i positiv omløbsretning. Definer med baggrund heri flg. afbildninger på  $\mathbf{R}^2$

$$R : \underline{x} \mapsto |\underline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{og idet} \quad \Theta : \underline{x} \mapsto \theta(\underline{x}).$$

1) Overvej at  $\Phi := (R, \Theta)$  er en Borel målelig funktion fra  $\mathbf{R}^2$  ind i  $\mathbf{R}^2$ . Vink: Se på

$$\Phi^{-1}((-\infty, r] \times (-\infty, \theta]) \quad \text{for } (r, \theta) \in \mathbf{R}^2.$$

Definer endvidere

$$\Psi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

2) Overvej at  $\Psi$  ligeledes er en Borel målelig funktion fra  $\mathbf{R}^2$  ind i  $\mathbf{R}^2$ , samt at  $\Psi \circ \Phi$  er identiteten på  $\mathbf{R}^2$ .

3) Vis at

$$\lambda_2 \circ \Phi^{-1} \ll \lambda_2 \quad \text{med tæthed } (r, \theta) \mapsto r \cdot \mathbf{1}_{]_{-\pi, \pi]}(\theta).$$

Vink: Beregn

$$\lambda_2 \circ \Phi^{-1}((-\infty, r] \times (-\infty, \theta]) \quad \text{for } (r, \theta) \in \mathbf{R}^2.$$

Det kan uden bevis benyttes, at  $\lambda_2$  er invariant under rotationer omkring  $\mathbf{0}$ , hvilket sikrer den velkendte formel for arealet af et cirkeludsnit.

4) Udnyt det ovenstående til at eftervise formelen for integration i polære koordinater, d.v.s. ligheden

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(\underline{x}) d\lambda_2(d\underline{x}) = \int_0^\infty \left\{ \int_{-\pi}^\pi r \cdot f(r \cos \theta, r \sin \theta) \lambda_1(d\theta) \right\} \lambda_1(dr)$$

for enhver funktion  $f \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}^2))_+$ .

**Opgave 55** Lad  $\mu$  være et endeligt mål på  $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}(\mathbf{R}^2))$ , som er absolut kontinuert m.h.t.  $\lambda_2$ . Vis at  $\mu$  er et produktmål, hvis og kun hvis  $\mu$  har en tæthed m.h.t.  $\lambda_2$  på formen

$$(x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y) \quad f, g \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}))_+.$$

**Opgave 56** Lad for  $p \geq 1$   $T : L^p(\mu) \rightarrow \mathbf{R}$  være lineær. Vis at  $T$  er kontinuert, d.v.s.

$$f_n \rightarrow f \text{ i } L^p(\mu) \Rightarrow T(f_n) \rightarrow T(f),$$

hvis og kun hvis  $T$  er begrænset, d.v.s.

$$\exists c_T \in [0, \infty) : T(f) \leq c_T \cdot \|f\|_p \quad \text{for alle } f \in L^p(\mu).$$

Lad  $q$  betegne det til  $p$  konjugerede tal. Vis at for ethvert  $g \in L^q(\mu)$  (hvis  $p = 1$  antages  $g \in \text{b}M(\mathcal{E})$ ) er afbildningen

$$T_g : f \mapsto \int fg d\mu$$

linær og kontinuert på  $L^p(\mu)$ . Man kan vise, at enhver kontinuert og lineær afbildning  $T : L^p(\mu) \rightarrow \mathbf{R}$  er på denne form, d.v.s.  $T = T_g$  for et  $g \in L^q(\mu)$ . Tilfældet  $p = 2$  er vist i Opgave 57. Det generelle tilfælde er noget sværere.

**Opgave 57** Lad i denne opgave (\*) betegne betingelsen i Projektionssætningen, d.v.s. et underrum i  $L^2(\mu)$  opfylder (\*), hvis og kun hvis det opfylder betingelsen i Projektionssætningen.

Lad  $V \subseteq L^2(\mu)$  være et underrum. Definer

$$V^\perp := \{f \in L^2(\mu) \mid \langle f, g \rangle = 0 \text{ for alle } g \in V\}.$$

- a) Angiv  $V \cap V^\perp$  og vis at  $V^\perp$  er et underrum, der opfylder (\*).
- b) Antag  $V$  opfylder (\*). Vis at ethvert element i  $L^2(\mu)$  op til  $\mu$ -n.o. entydigt kan skrives som et element i  $V$  plus et element i  $V^\perp$ .
- c) Lad  $T : L^2(\mu) \rightarrow \mathbf{R}$  være lineær og kontinuert. Vis at  $N_T$  er et underrum i  $L^2(\mu)$ , der opfylder (\*), hvor  $N_T := \{f \in L^2(\mu) \mid T(f) = 0\}$ .
- d) Vis at  $\dim N_T \leq 1$  og slut heraf, at der findes et  $g \in L^2(\mu)$ , så at

$$T(f) = \int fg \, d\mu \quad \text{for alle } f \in L^2(\mu).$$

## INDHOLDSFORTEGNELSE

Indledning	1
Målelige rum	3
Borel $\sigma$ -algebraer	9
Målelige funktioner	13
Mål	22
Mål på metriske rum	29
Integralet, konstruktion og egenskaber	32
Uligheder	44
Produktmål, eksistens og egenskaber	48
Appendiks A. Metriske rum.	52
Appendiks B. Konvekse funktioner.	54
Appendiks C. Integration af funktioner med komplekse værdier.	57
Supplerende Opgaver, 1-57.	59