Analyse 1
Jørgen Vesterstrøm
Forår 2003

Supplerende opgaver

S1.3.1 Lad A, B og C være delmængder af X. Vis at

$$(A \cap \widetilde{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$$

og find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at der gælder lighedstegn ovenfor.

S1.3.2 Sæt for $t \in \mathbf{R}$

$$A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - t^2 \geq 2t(x - t)\}$$

Bestem mængden $\bigcap_{t \in \mathbf{R}} A_t$, og illustrer med en figur i planen.

S1.3.3 Sæt for ethvert positivt $r \in \mathbf{R}$

$$C_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - r)^2 + y^2 < r^2\}$$

Bestem mængden $\bigcup_{r>0} C_r$, og illustrer med en figur i planen.

S1.3.4 Lad f_n være en følge af reelle funktioner på $\mathbf{R}$. Antag at $f(x) := \sup_n f_n(x) < \infty$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$. For $a \in \mathbf{R}$ sættes $A_n = \{x \mid f_n(x) \leq a\}$. Vis at

$$\bigcap_n A_n = \{x \mid f(x) \leq a\}$$

Hvad kan siges om mængderne

$$\bigcap_n \{x \mid f_n(x) < a\} \text{ og } \{x \mid f(x) < a\}$$

S1.3.5 Lad $f : X \to Y$ være en afbildning, og lad $A \subseteq X$. Vis at $f(\widetilde{A}) \supseteq f(X) \sim f(A)$.

S1.4.1 Lad A, B og C være delmængder af $X (\neq \emptyset)$. Sæt $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$, og lad $\mathcal{A}$ være mængdealgbraen frembragt af $\mathcal{C}$. Vis at $\mathcal{A}$ består af højst 256 elementer. Giv et eksempel på at dette antal kan forekomme. Hvilke andre muligheder er der for antallet af mængder i $\mathcal{A}$?

S1.4.2 Lad $f : X \to Y$ være en funktion, og $\mathcal{B}$ en mængdealgebra på Y. Vis at $\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ er en mængdealgebra på X.

S2.1.1 Givet $A \subseteq \mathbf{R}$ sættes $B = -A = \{-x \mid x \in A\}$. Vis at $\sup B = -\inf A$, og formuler og bevis en tilsvarende formel for $\inf B$.

S2.1.2 Lad $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være en reel funktion af to variable. Vis at

$$\sup_x \inf_y f(x, y) \leq \inf_y \sup_x f(x, y)$$

og giv et eksempel på at skarp ulighed kan forekomme.

S2.4.1 Definerer en reel talfølge ved $x_1 = \frac{1}{2}$ og $x_{n+1} = 1 - x_n^2$ for $n \geq 1$. Find $\overline{\lim}_n x_n$ og $\underline{\lim}_n x_n$ (Vink).

S2.4.2 Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ være en kompleks potensrække. Sæt $r := \frac{1}{l}$ hvor $l = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$ (incl. tilfældene 0 og ∞). Vis at rækken er konvergent for $|z| < r$ og divergent for $|z| > r$. (Tekniske vink: 1° Hvis $|z| < r$ findes $\varepsilon > 0$ så $|z|(l + \varepsilon) < 1$. 2° Hvis $|z| > r$, findes $\varepsilon > 0$ så $|z|(l - \varepsilon) > 1$).

S2.4.3 Sætning 4.3.9 i Lindstrøm udsiger ikke alt det der fremgår af beviset. Check at følgende vises: *Hvis følgen* (a_n) *voksende og opad begrænset, eksisterer* $\lim_n a_n$ *og er lig med* $\sup_n a_n$. Overvej at dette også er rigtigt for voksende følger der ikke nødvendigvis er begrænsede opadtil ("$+\infty = +\infty$"). Formuler og bevis en tilsvarende sætning for aftagende følger. Indse herved at for en vilkårlig reel følge (b_n) gælder at

$$\inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} b_k = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} b_k \ ,$$

altså at definitionerne af $\limsup_n b_n$ i Mat11-noterne og HLR stemmer overens.

Vis til sidst det tilsvarende for $\liminf_n b_n$.

S2.5.1 Lad a være et reelt tal, og antag at $A \subseteq [a, \infty)$ er en mængde som opfylder

(i) $a \in A$
(ii) $[a, x) \subseteq A \Rightarrow x \in A$
(iii) $x \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : [x, x + \varepsilon) \subseteq A$

Vis at $A = [a, \infty)$.

S2.5.2 Lad f og g være kontinuerte reelle funktioner på $\mathbf{R}$. Antag at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \mathbf{Q}$ (de rationale tal). Vis at $f = g$.

S3.2.1 Antag at $A \subseteq B \subseteq \mathbf{R}$. Vis at $m^*A \leq m^*B$. Antag yderligere at $m^*A < \infty$. Vis at $m^*(B \cap \widetilde{A}) \geq m^*B - m^*A$

S3.3.1 Lad A og B være delmængder af $\mathbf{R}$ med $A \subseteq [0, \infty)$ og $B \subseteq (-\infty, 0)$. Vis at $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$

S3.3.2 Lad (E_n) være en følge af målelige delmængder af $\mathbf{R}$ med $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq \cdots$. Vis at (Vink)

$$m(\bigcup_n E_n) = \lim_n m(E_n) = \sup_n m(E_n)$$

S3.3.3 Betragt for hvert reelt tal $a \geq 1$ mængden

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N} : n < x < n + \frac{1}{a^n}\}$$

Vis at mængden er målelig (endda åben) og beregn dens mål.

S3.3.4 Antag at $E \subseteq \mathbf{R}$ opfylder (ii) i Prop 3.15, altså at $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, O$ åben : $O \supseteq E$ og $m^*(O \sim E) < \varepsilon$. Udnyt dette for hvert $\varepsilon = \frac{1}{n}$ til at finde O_n, og sæt $G = \cap O_n$. Vis herved (iv) i samme prop. Vis til sidst at (iv) medfører (i): E er målelig, ved at omskrive E passende vha. G.

S3.3.4 Antag at $E \subseteq \mathbf{R}$ opfylder (ii) i Prop 3.15, altså at $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, O$ åben : $O \supseteq E$ og $m^*(O \sim E) < \varepsilon$. Udnyt dette for hvert $\varepsilon = \frac{1}{n}$ til at finde O_n, og sæt $G = \cap O_n$. Vis herved (iv) i samme prop. Vis til sidst at (iv) medfører (i): E er målelig, ved at omskrive E passende vha. G.

S3.3.5 Antag at (E_n) er en følge af målelige mængder der alle er indeholdt i $[0,1]$. Antag at $\limsup m(E_n) > 0$. Opgaven går (bl.a.) ud på at vise der findes x så $x \in E_n$ for uendelig mange E_n. Sæt først $E = \{x \mid x \in E_n$ for uendelig mange $n\}$. (a) Vis at $E = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k \geq n}^{\infty} E_k$, specielt at E er målelig. (b) Vis dernæst $m(\cup_{k\geq n}^{\infty} E_k) \geq \sup_{k\geq n} m(E_k)$. (c) Slut heraf at $m(E) \geq \limsup_{n\to\infty} m(E_n)$. (d) Vis det ønskede. (e) Hvor bruges at mængderne er indeholdt i *samme* begrænsede mængde (her $[0,1]$).

S3.3.6 (*Cantormængden*). Fjern fra $[0,1]$ den "midterste" åbne tredjedel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Restmængden $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ er en disjunkt forening af to lukkede intervaller. Fjern igen den midterste tredjedel fra hvert af disse intervaller. Hver fremkommer C_2 som disjunkt forening af fire lukkede intervaller. Mængden C_3 konstrueres tilsvarende. Beskriv og tegn C_3, herunder beregn $m(C_3)$. Således fortsættes. Undersøg C_n. Fællesmængden $C = \cap C_n$ (altså alle de punkter der ikke bliver fjernet) kaldes for Cantormængden. Vis at $m(C) = 0$

Det følgende går ud på at vise at C alligevel er "stor": Den er utællelig. Først beskrives C i tretalssystemet. Ethvert $x \in [0,1]$ har en trialbrøksfremstilling $x = 0_{(3)}, a_1 a_2 a_3 \ldots$, hvormed menes $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ hvor a_n er et af cifrene 0, 1 eller 2. Det at at visse tal har flere trialbrøksfremstillinger, fx $\frac{1}{3} = 0_3, 1000\cdots = 0_3, 0222\ldots$, er grunden til de forsigtige formuleringer i det følgende. Overvej at $x \in C_1$ netop når x har en trialbrøksfremstilling med $a_1 = 0$ eller 2. Hvordan kan C_2 beskrives? Og C_n? Indse herved at $x \in C$ netop når x har en trialbrøksfremstilling med lutter 0 og 2 (altså ingen 1-taller).

Til sidst defineres $F : C \to [0,1]$ ved $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n/2}{2^n}$ for $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. Vis at F er surjektiv og dermed at C ikke er tællelig.

Bemærkning. C er vistnok den først kendte fraktal. Den kan skrives som en disjunkt forening $C = E_1 \cup E_2$, hvor de to E'er fremgår af C ved en multiplikation (ligedannethedstransformation) af C med faktor $\frac{1}{3}$. Hvis det på nogen måde er muligt at tillægge mængden en dimension d, må den opfylde $(\frac{1}{3})^d + (\frac{1}{3})^d = 1$, hvoraf $d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63$

S3.3.7 Antag at E er en begrænset delmængde af $\mathbf{R}$, fx $E \subseteq [a,b] =: I$. Antag at

$$m^*(E) + m^*(I \cap \widetilde{E}) = m^*(I)$$

Opgaven går ud på at vise at det sikrer måleligheden af E. Da størrelsen $m^*(I) - m^*(I \cap \widetilde{E})$ kan fortolkes som det indre mål af E, ser vi at målelighed i dette tilfælde hænger på at "indre mål = ydre mål".

(1) Gør rede for at der findes målelige mængder G_1 og G_2 så $G_1 \supseteq E$, $G_2 \supseteq I \cap \widetilde{E}$ og

$$m^*(G_1) + m^*(G_2) = m^*(I)$$

(2) Vis at $m(G_1 \cap G_2) = 0$
(3) Vis at $G_1 \sim E$ er en nulmængde
(4) Vis at E er målelig.

S3.5.1 Vis følgende "n.o.-regler"

(a) $f = f_1$ n.o. og $g = g_1$ n.o $\Rightarrow f + g = f_1 + g_1$ n.o.
(b) $f_n \geq 0$ n.o. $\Rightarrow \sum_n f_n \geq 0$ n.o. (mere præcist: Rækken er konvergent n.o. og ...)

Find andre sådanne regler, og bevis dem.

S3.5.2 Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være kontinuert . Vis at f er målelig.

S3.5.3 Lad $f : D \to \mathbf{R}$ være målelig. Vis at funktionen $\sin f(x)$ er målelig.

S3.5.4 Lad f være en reel funktion på den målelige mængde $E \subseteq \mathbf{R}$. Vis at f er målelig hvis og kun hvis $f^{-1}(O)$ er målelig for alle åbne mængder $O \subseteq \mathbf{R}$

S3.6.1 Betragt grænseovergangen $f_n(x) = x^n \to 0$ på [0,1). Lad $\varepsilon > 0$ og $\delta > 0$ (og begge mindre end 1). Prop. 3.23 sikrer så eksistensen af $N \in \mathbf{N}$ og $A \subseteq [0,1)$ så (1) $m(A) < \delta$ og (2) $f_n(x) < \varepsilon$ for $n \geq N$ og $x \notin A$. Angiv N og A eksplicit (som funktioner af ε og δ).

S4.2.1 Øverst s. 79 bruges at $\int_E \varphi \geq 0$ hvis blot $\varphi \geq 0$ n.o. på E (stadig med φ simpel og $m(E) < \infty$). Vis dette vha. den kanoniske fremstilling.

S4.2.2 Lad $f \geq 0$ være målelig og begrænset på E hvor $m(E) < \infty$. Vis *Markovs ulighed*:

$$m(\{x \mid f(x) \geq \delta\}) \leq \frac{\int_E f}{\delta} \quad (\forall \delta > 0)$$

S4.2.3 Lad f være som ovenfor. Antag $\int_E f = 0$. Vis at $f = 0$ n.o. (vink: sæt $\delta = \frac{1}{n}$).

S4.2.4 Lad f være kontinuert på $[0,1]$. Beregn $\lim_n \int_0^1 f(x^n)dx$ (og vis eksistensen) vha. prop 4.6.

S4.2.5 Sæt $f_n(x) = n$ for $0 < |x| < \frac{1}{n}$ og 0 ellers. Vis at $f_n(x) \to 0$ for alle x, men at $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx \to l \neq 0$. Strider det mod prop 4.6?

S4.2.6 Find $\lim_n \int_0^\pi (\cos x)^{2n} dx$

S4.2.7 Lad f være begrænset og målelig på E hvor $m(E) < \infty$. Antag at $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ er en voksende følge af målelige mængder med $\bigcup_n E_n = E$. Vis at $\lim \int_{E_n} f = \int_E f$

S4.3.1 Find integralet over $[1, \infty)$ af funktionen $f(x) = x^{-2}$ ved at bruge sætningen om monoton konvergens på en passende følge (f_n) af begrænsede målelige funktioner med $m(\{x \mid f_n(x) \neq 0\}) < \infty$

S4.3.2 Her skal vises et par ubeviste delpåstande i to beviser i HLR. (i) Vis (i beviset for prop. 8 s. 86) at $k(x) \leq g(x)$. (ii) Vis (i beviset for Fatou's Lemma s. 87) at $|h_n| \leq \sup |h|$, og at $h_n = 0$ uden for E'.

S4.4.1 (i) Lad f være en positiv målelig funktion på E. Antag $\int_E f < \infty$. Vis at $f < \infty$ n.o.

(ii) (Beppo Levis sætning) Lad (u_n) være en følge af positive målelige funktioner på E. Antag at $\sum \int_E u_n < \infty$. Vis at rækken $\sum u_n(x)$ er konvergent (med endelig sum) for n.a. x.

(iii) Lad (A_n) være en følge af målelige delmængder af $\mathbf{R}$. Antag at $\sum m(A_n) < \infty$. Vis at for n.a x gælder at x tilhører højst endelig mange A_n.

S4.4.2 Find $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} (\cos 4x)^n dx$

S4.4.3 Find integralet over $(0, 1)$ af funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ved at "skære" ned til $(\frac{1}{n}, 1)$ (dvs. se på $f_n(x) = f(x)\chi_{[1/n,1]}(x)$) og bruge en passende konvergenssætning. — Slut at funktionen $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$ er integrabel på $(0, 1)$.

S4.4.4 (Beppo Levis sætning med vilkårligt fortegn, cf. S4.4.1)

(i) Lad (u_n) være en følge af målelige funktioner på E. Antag at $\sum \int_E |u_n| < \infty$. Vis at rækken $\sum u_n(x)$ er konvergent for n.a. x.

(ii) Lad $f(x) := \sum u_n(x)$ være den n.o. definerede funktion på E. Vis at f er integrabel på E (uanset hvad f sættes til på undtagelsesmængden), og at $\int_E f = \sum \int_E u_n$.

S5.2.1 Lad $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ være en monotont voksende funktion med $F([a, b]) = [F(a), F(b)]$ (dvs. værdimængden er et interval). Vis at F er kontinuert (analyser eventuelle springs effekt på værdimængden vha. HLR opg. 7a).

S5.2.2 Cantorfunktionen (fra opg. S3.3.6) kan udvides til hele $[0, 1]$ så den bliver monoton. Først en uformel beskrivelse: Sæt $F = \frac{1}{2}$ på den først fjernede midterste åbne tredjedel. Herefter $F = \frac{1}{4}$ hhv. $\frac{3}{4}$ på de to åbne midterste der fjernes i anden omgang. Fortsæt således. – Ovenstående kan beskrives med trialbrøker. Hvis $x \in [0, 1] \sim C$, har x

en fremstilling $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ hvor ikke alle a_n er 0 eller 2. Lad N være det mindste k med $a_k = 1$ og indse at

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n/2}{2^n} + \frac{a_N}{2^N}$$

Vis at F er kontinuert.

S5.3.1 Lad f være integrabel på $[a, b]$, og antag at det ubestemte integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ er overalt differentiabel med begrænset differentialkvotient. Udnyt Sætningen i Notat 5 og en passende sætning fra HLR Kap 5. til at vise $F' = f$ n.o.

S5.4.1 Lad F være en funktion af begrænset variation på $[a, b]$. Vis at hvis F er kontinuert, er $T(= T_a^x)$ det også (Vink).

S5.5.1 Lad φ være konveks på et interval (c, d), og lad f være en integrabel funktion på $[a, b]$ hvis værdier ligger i (c, d). Vis følgende udgave af Jensens ulighed:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t))dt \geq \varphi(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt)$$

S5.5.2. Lad φ være konveks på $(0, \infty)$. Vis at funktionen $x\varphi(\frac{1}{x})$ er konveks. (Det er ret tricket uden antagelse om differentiabilitet). — Undersøg om $\varphi(\frac{1}{x})$ er konveks.

S5.5.3 (a) Lad f være en konveks funktion. Vis at $f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$
(b) Lad A, B og C være vinklerne i en plan trekant. Vis at $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$
(c) (for dem der har sinusrelationerne present) Vis at $a+b+c \leq 3\sqrt{3}R$, hvor a, b og c er siderne i trekanten og R radius i den omskrevne cirkel.

S6.1.1 Lad $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ for $0 < x \leq 1$ For hvilke $p \geq 1$ gælder $f \in L^p$?

S6.1.2 Find en funktion f på $(0, 1)$ så$f \notin L^3$, men $f \in L^p$ for $p < 3$.

S6.1.3 Vis at $L^r(0, 1) \subseteq L^p(0, 1)$ for $r \geq p$.

S6.1.4 Lad $f(x) = -\ln x$ for $0 < x \leq 1$. Vis at $f \notin L^\infty$, og at $f \in L^p$ for alle p med $1 \leq p < \infty$.

S6.2.1 Antag at $f_n \to f$ og $g_n \to g$, begge i p-middel. Vis at $f_n + g_n \to f + g$, også i p-middel. Vis også at $||f_n||_p \to ||f||_p$.

S6.2.2 Antag at $f_n \to f$ i p-middel, og at $g_n \to g$ i q-middel, hvor p og q opfylder $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Vis at $f_n g_n \to fg$ i 1-middel.

S6.3.1 Antag om følgen (f_n) i L^p at $f_n \to f$ n.o, og at der findes $h \in L^p$ så $|f_n| \leq h$ for alle n. Vis at $f_n \to f$ i p-middel.

S6.3.2 Lad f_n være en følge i $L^1(0,1)$ givet ved $f_n(x) = n$ for $0 \leq x \leq n^{-1}$. Undersøg om følgen er konvergent i 1-middel, og om den er konvergent n.o.

S6.3.3 (a) Lad y_1 og y_2 være reelle tal. Vis at $|y_1^+ - y_2^+| \leq |y_1 - y_2|$. (b) Lad (f_n) være en følge i L^p med $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i p-middel. Vis at f_n^+ er i L^p, og at $\lim_{n\to\infty} f_n^+ = f^+$ i p-middel.

S11.2.1 Denne opgave går ud på at vise at for målelige (overalt endelige) funktioner f og g på $(X, \mathcal{B}, \mu)$ og h kontinuert på $\mathbf{R}^2$ er den sammensatte funktion $x \to h(f(x), g(x))$ også målelig på X

(a) Lad $O \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben mængde. Vis at O er en højst tællelig forening af åbne rektangler: $O = \bigcup I_n \times J_n$ hvor I_n og J_n er åbne intervaller

(b) Lad I og J være åbne intervaller. Vis at $\{x \mid (f(x), g(x) \in I \times J\}$ er målelig.

(c) Gør rede for at $\{x \mid h(f(x), g(x)) > \alpha\} = \{x \mid (f(x), g(x) \in h^{-1}(\alpha, \infty)\}$, og slut vha. (a) og (b) det ønskede resultat.

S11.2.2 Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum, og lad f og g være målelige funktioner som opfylder at de "er nul uden for en mængde med endeligt mål". Vis at mængden

$$\{x \in X \mid f(x) + g(x) \neq 0\}$$

er målelig med endeligt mål.

S11.3.1 Betragt målrummet $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \nu)$ hvor ν er tællemålet på $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}))$, altså $\nu(A) =$ antal elementer i $A = \sum_{n\in A} 1$ for alle $A \subseteq \mathbf{N}$. (a) Vis at en reel funktion på $\mathbf{N}$ er integrabel hvis og kun hvis $\sum_n |f(n)| < \infty$, og at $\int f d\nu = \sum_n f(n)$ i bekræftende fald.

(b) Lad a_{mn} være en dobbeltfølge af reelle tal. Antag om den at

(1) $|a_{mn}| \leq b_n$ med $\sum_n |b_n| < \infty$

(2) $\lim_m a_{mn} = a_n$ findes for alle n

Vis (Vink) at $\lim_m \sum_n a_{mn} = \sum_n a_n$

S11.3.2 (a) Lad a_{mn} være en dobbeltfølge af reelle tal med $a_{mn} \geq 0$ for alle m og n. Antag at $\lim_m a_{mn} = a_n$ findes for alle n. Vis at $\sum_n a_n \leq \underline{\lim}_m \sum_n a_{mn}$

(b) Lad b_n være en følge af reelle tal med $b_n \geq 0$. Vis at $\sum_n b_n = \lim_m \sum_n b_n(1 - \frac{1}{m})^n$

S11.7.1 Vis at $L^1(0,\infty) \nsubseteq L^2(0,\infty)$ og $L^2(0,\infty) \nsubseteq L^1(0,\infty)$.

S12.1.1 Lad X være en mængde, og definerer μ^* ved $\mu^*(A) = 1$ for $\emptyset \neq A \subseteq X$ og $\mu^*(\emptyset) = 0$. Vis at μ^* er et ydre mål. Find alle de μ^*-målelige delmængder.

S12.1.2 Lad for hvert $n \in \mathbf{N}$ μ_n^* være et ydre mål på X. Vis at der ved $\mu^*(A) = \sum_n \mu_n^*(A)$ defineres et ydre mål på X. Vis at hvis E er μ_n^*-målelig for alle n, er E også μ^*-målelig.

S12.1.3 Betragt betingelserne der optræder for ydre mål. Udgave nr. 2 af betingelse iii (på s. 289) kaldes herefter iv. Vis at betingelse i og iii sammen medfører ii. Vis (som hævdet) at i, ii og iv medfører iii.

S12.4.1 (det todimensionale Lebesgue mål). Det todimensionale Lebesguemål m_2 (på $\mathbf{R}^2$) defineres ved $m_2 = m \times m$

(a) Vis at åbne mængder i $\mathbf{R}^2$ er målelige (brug opg. S11.2.1(a)).

(b) Vis at enhver kontinuert funktion er målelig.

(c) Gør rede for at hvis $E \subseteq \mathbf{R}$ er målelig , er $E \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2$ det også.

(d) Lad f være målelig på $\mathbf{R}$. Vis at funktionen $(x, y) \to f(x)$ på $\mathbf{R}^2$ er målelig.

(e) Lad f og g være målelige funktioner på $\mathbf{R}$. Vis at funktionen $f(x)g(y)$ på $\mathbf{R}^2$ er målelig.

S12.4.2 Lad f være defineret på $[0, 1] \times [0, 1]$ ved

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^\alpha & \text{hvis } x + y > 0 \\ 0 & \text{hvis } x + y = 0 \end{cases}$$

hvor $\alpha \in \mathbf{R}$. — Undersøg for hvilke værdier af α funktionen f er integrabel, og udregn integralet for disse α.

S12.4.3 Lad f være defineret på $\mathbf{R}^2$ ved $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Vis at de to itererede integraler

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x, y)dxdy \quad \text{og} \quad \int_1^\infty \int_0^1 f(x, y)dydx$$

eksisterer, men er forskellige (Vink). Strider det mod Fubinis sætning?

S12.4.4 Lad f være defineret på $[0, 1] \times [0, 1]$ ved

$$f(x, y) = \begin{cases} |x - y|^\alpha & \text{hvis } x \neq y \\ 0 & \text{hvis } x = y \end{cases}$$

hvor $\alpha \in \mathbf{R}$. — Undersøg for hvilke værdier af α funktionen f er integrabel, og udregn integralet for disse α.

S12.4.5 Vis at HLR Prop. 12.18 (Fubini for mængder) gælder hvis 1) antagelsen om $\lambda(E) < \infty$ stryges, men 2) X og Y antages at være σ-endelige.

FN1.1 Vis at $l^p \subseteq l^s$ for $1 \leq p \leq s \leq \infty$ (l^∞ er mængden af begrænsede følger $x = (x_n)$ med normen $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$). Vis også $\|x\|_p \geq \|x\|_s$

FN1.2 Antag at $x \in l^p$ for et $p < \infty$. Vis at $\lim_{s\to\infty, s\geq p} \|x\|_s = \|x\|_\infty$

FN1.3 Lad der for hvert $r \in \mathbf{N}$ være givet $x^r \in l^p$ (hvert x^r har formen $x^r = (x^r_n)_{n=1}^\infty$). Antag at $\lim x^r = 0$ i l^p. Vis at $\lim_{r\to\infty} x^r_n = 0$ for hvert n. — Gælder det omvendte?

FN1.4 Vis at mængden af punkter $x = (x_n)$ i (det reelle) l^p med mindst én positiv koordinat er en åben mængde.

Er mængden

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_n > 0 \text{ for alle } n\}$$

åben i l^p?

FN1.5 Lad $(V, \| \ \|)$ være et normeret rum. Vis at enhedskuglen $\{x \in V \mid \|x\| \le 1\}$ er en lukket konveks mængde.

Vis at hvis to normer på V har samme enhedskugle, da stemmer de to normer overens.

FN1.6 Lad f være en kontinuert funktion på $[0,1]$, og antag $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ for alle $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Vis at $f = 0$ (Vink).

FN1.7 Lad $C^1([a,b])$ være vektorrummet af komplekse, kontinuert differentiable funktioner på $[a,b]$. Vis at der ved

$$\|f\| = \max_t |f(t)| + \max_t |f'(t)|$$

er defineret en norm på $C^1([a,b])$.

Vis at rummet er et Banachrum.

FN1.8 Betragt mængden P af (restriktioner af) polynomier på $[0,1]$. Vis at P er tæt i $L^1(0,1)$ ved at udnytte at mængden af kontinuerte funktioner er tæt i $L^1(0,1)$ (jf. HLR Prop. 5.8 anden påstand som vi ikke har vist).

FN3.1. Lad $f \in L^2(0,1)$, og sæt $g(t) = tf(t)$. Vis at $\|g\|_2 \le \|f\|_2$. Vis herved at operatoren $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ givet ved $(Tf)(t) = tf(t)$ opfylder $\|T\| \le 1$. Vis at for $\varepsilon > 0$ findes $f \in L^2(0,1)$ med $\|f\|_2 \le 1$ så $\|g\|_2 \ge 1 - \varepsilon$. Slut heraf $\|T\| = 1$.

S10.2.1 Lad $S : X \to Y$ og $T : Y \to Z$ være lineære operatorer på normerede rum. Vis at $T \circ S$ er lineær og $\|T \circ S\| \le \|T\|\|S\|$.

Vink

S2.4.1 – Undersøg polynomiet $x - (1 - (1 - x^2)^2$ på intervallet $[0,1]$, og vis herved at $x_2 \le x_4 \le x_6 \le \dots$ og $x_1 \ge x_3 \ge x_5 \ge \dots$

S3.3.2 – $E_n = (E_n \sim E_{n-1}) \cup \cdots \cup (E_2 \sim E_1)$ er en disjunkt forening.

S5.4.1 – For at vise at T_a^x er højrekontinuert i c vælges til $\varepsilon > 0$ dels 1) et $\delta > 0$ så $|F(x) - F(c)| \le \varepsilon$ for $|x - c| < \delta$ og 2) dels en inddeling af $[c,b]$ med $t \ge T_c^b - \varepsilon$. Ved at videreinddele kan vi antage at første delepunkt z opfylder $z - c < \delta$ Herefter fås at $T_a^z - T_a^c = T_c^b - T_z^b \le t + \varepsilon - T_z^b \le |F(z) - F(c)| + T_z^b + \varepsilon - T_z^b \le |F(z) - F(c)| + \varepsilon \le 2\varepsilon$

S11.3.1 – Betragt funktionsfølgen $(f_m)_{m=1}^\infty$ givet ved $f_m(n) = a_{mn}$

S12.4.3 – Forsøg ikke at udregne integralerne, men kun deres fortegn.

FN1.6 – Slut i rækkefølge: $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ for 1) g et polynomium, 2) g kontinuert og 3) et specielt valg af g.