Lokalt definerede snitmultipliciteter

Dette projekt går ud på at definere snitmultipliciten i et punkt, hvor to kurver i planen skærer hinanden. Definitionen skal ske ud fra den lokale opførsel af de to kurver i det pågældende punkt. Herefter vil vi vise Bezouts sætning.

Kurver - geometri eller algebra?

En *affin, plan kurve* $C \subseteq k^2$ er en affin varietet $C = V(f)$, hvor $f \in k[x,y]$ er forskellig fra 0-polynomiet. Her kaldes f ligningen for C. Bemærk vi har to forskellige måder at betragte en kurve på: Enten *geometrisk* som en punktmængde i k^2, eller *algebraisk* som polynomiet $f \in k[x,y]$. Geometrisk set er kurverne $V(x)$ og $V(x^r)$ ens, for det er punktmængden $\{(x,y) \in k^2 \mid x = 0\}$. Men for at regne på kurver må vi bruge deres ligninger, og betragtet som polynomier er x og x^r ikke ens.

Hvis man kun er interesseret i det geometriske aspekt ved kurverne, gør man følgende: Hvis vi faktoriserer f i irreducible polynomier,

$$f = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_s^{\alpha_s} \tag{1}$$

og sætter

$$\mathrm{red} f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_s \tag{2}$$

er det let at se, at $V(f) = V(\mathrm{red} f)$. Vi kalder $\mathrm{red} f$ for *den reducerede ligning for C*. Desuden har vi set, at

$$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_s) \tag{3}$$

er den minimale dekomposition af $V(f)$ i irreducible komponenter. For to kurver, $C = V(f)$ og $D = V(g)$, hvor $f, g \in k[x,y]$, gælder altså, at $C = D$ som kurver, hvis og kun hvis $\mathrm{red} f = \mathrm{red} g$. Det tillader os at definere egenskaber for en kurve $C = V(f)$ ud fra ligningen $\mathrm{red} f$, fordi denne er entydigt bestemt af C. Bemærk i øvrigt, at kurverne $C = V(f)$ og $D = V(g)$ har en fælles komponent, hvis og kun hvis f og g har en fælles irreducibel faktor.

Men når man netop er interesseret i skæringspunkter mellem to kurver, er det måske ikke så urimeligt at regne f.eks. $x = 0$ og $x^r = 0$ forskellige. Den første kurve har én irreducibel komponent, men den anden har r (ens) komponenter. Ser vi på skæringpunkter for hver af disse kurver med $y = 0$, er det klart at $x = 0$ og $y = 0$ har netop ét skæringspunkt, $(0,0)$. Men $x^r = 0$ og $y = 0$ kan siges at skære r gange, fordi hver af de r komponenter i $x^r = 0$ skærer $y = 0$ én gang.

Dette er baggrunden for, at vi i det følgende vil fokusere på kurvens ligning, f, snarere end kurven $V(f)$. Vi vil omtale $f \in k[x, y]$ som en kurve og kalde $P \in k^2$ et punkt på kurven, hvis $f(P) = 0$. Men i hele fremstillingen gælder, at tager man den reducerede ligning, får man resultaterne for kurver i stedet for polynomier.

Multiplicitet af et punkt

Lad $f = 0$ være en kurve og $P = (a, b)$ et punkt på kurven. P kaldes et *glat punkt* på C, hvis der gælder $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ eller $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$. I så fald kaldes linien $\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-b) = 0$ for *tangentlinien* til C i P. Et punkt, der ikke er glat, kaldes *singulært*.

Vi vil nu definere multipliciteten af et punkt på en kurve: Lad f være en kurve og P et punkt på kurven. I kapitlet om dimension i [Cox] har vi set, at vi kan opskrive f som følger:

$$f = f_{P,m} + f_{P,m+1} + \ldots + f_{P,n} \tag{4}$$

hvor $f_{P,i}$ er et homogent polynomium i $(x - P)$ af grad i og $f_{P,m} \neq 0$. Vi definerer nu m til at være *multipliciteten* af f i punktet P og skriver $m_P(f) = m$. Bemærk: P er et glat punkt på f, hvis og kun hvis $m_P(f) = 1$. Nu kan vi forme tangentkeglen til kurven f i P. Linierne i tangentkeglen kaldes tangenterne til f i P.

Lokal ring

Lad $V \subseteq k^n$ være en affin varietet. Koordinatringen til V er som bekendt givet ved:

$$k[V] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(V) \tag{5}$$

Brøklegemet til $k[V]$ kaldes de rationale funktioner på V og betegnes $k(V)$. Lad nu $P \in V$. *Den lokale ring til* V *i* P er givet ved:

$$k[V]_P = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[V], g(P) \neq 0 \right\} \tag{6}$$

Som navnet antyder, er den lokale ring $k[V]_P$ en ring, og det er rimelig klart at:

$$k[V] \subseteq k[V]_P \subseteq k(V) \tag{7}$$

Definition af snittallet

Lad f og g være to kurver, og lad $P \in k^2$. Vi vil gerne definere snittallet for f og g i punktet P, som vi vil betegne $I_P(f,g)$. Før vi kommer til selve definitionen af snittallet, starter med en række aksiomer, som vi vil kræve at snittallet skal opfylde.

Aksiom 1 Lad P være et punkt på f og g. $I_P(f,g)$ er et positivt, helt tal, hvis f og g ikke har nogen fælles komponenter gennem P. Hvis f og g har en fælles komponent gennem P, sættes $I_P(f,g) = \infty$.

Aksiom 2 $I_P(f,g) = 0$ hvis og kun hvis P ikke ligger på f og på g. $I_P(f,g)$ afhænger kun af de komponenter for f og g, der går gennem P.

Aksiom 3 (symmetri) $I_P(f,g) = I_P(g,f)$.

Aksiom 4 (koordinatskift) Hvis $T : k^2 \to k^2$ er et affint koordinatskifte med $T(Q) = P$, så er $I_Q(f \circ T, g \circ T) = I_P(f,g)$.

Aksiom 5 $I_P(f,g) \geq m_P(f)m_P(g)$, og der gælder lighedstegn hvis og kun hvis f og g ikke har nogen fælles tangenter i P. Specielt gælder: $I_P(f,g) = 1 \Leftrightarrow P$ er et glat punkt på f og g, og de ikke har en fælles tangent i P.

Aksiom 6 (additivitet) Lad $f = \prod f_i^{r_i}$ og $g = \prod g_j^{s_j}$. Så skal der gælde: $I_P(f,g) = \sum_{i,j} r_i s_j I_P(f_i, g_j)$

Aksiom 7 Lad $a \in k[x,y]$. Så skal der gælde $I_P(f,g) = I_P(f, g + af)$.

Sætning 0.0.1. *Der findes et entydigt bestemt snittal $I_P(f,g)$ defineret for alle affine, plane kurver f og g, og alle punkter $P \in k^2$, som opfylder aksiomerne (1) til (7). Det er givet ved formlen $I_P(f,g) = \dim_k(k[k^2]_P/\langle f,g\rangle)$*

Bevis for entydighed For at bevise entydigheden er det nok at vise, at man kan udregne $I_P(f,g)$ alene udfra (1)-(7). Det er nok at se på tilfældet $P = (0,0)$, da (4) giver, hvordan man udregner $I_P(f,g)$ i ethvert punkt P ud fra $I_{(0,0)}(f,g)$. Ud fra (1) kan man antage, at f og g ikke har fælles komponenter, og at snittallet derfor er endeligt. Fra (2) kan man antage, at snittallet er større end 0. Der kan nu laves induktion over snittallet. (5) giver induktionsstarten. Antag, at $I_P(f,g) = n$, og at $I_P(f,g)$ kan beregnes for alle $I_P(f,g) < n$. Vi vil vise, at så kan man også beregne $I_P(f,g)$.

Se på $f_0 := f(x,0)$ og $g_0 := g(x,0) \in k[x]$ af grad henholdvis r og s. Vi kan antage, at $r \leq s$.

Tilfælde 1: $r = 0$.

Det betyder, at $f(x,0) = 0$ (da $f(0,0) = 0$).Da $f \neq 0$ så er $f = hy$ hvor $h \in k[x,y]$. Så har man $I_P(f,g) = I_P(h,g) + I_P(y,g)$ fra (6). Se på $g(x,y)$ og saml leddene, der indeholder y. Så kan vi sætte y udenfor en parantes i disse led og får derved et polynomium, kald det A. Så er $g_0 = g(x,0) = g(x,y) - A(x,y) \cdot y$. Så er i følge aksiom 7, $I_P(y,g) = I_P(y,g_0)$. Skriv nu $g_0 = x^m(a_0 + a_1 x + \ldots)$, hvor $a_0 \neq 0$. Bemærk $m > 0$, da $g(0,0) = 0$. Så er $I_P(y,g_0) = I_P(y,x^m) + I_P(y, a_0 + a_1 x + \ldots)$. Nu er $a_0 + a_1 \cdot 0 + \ldots = a_0 \neq 0$, så i følge (2) er $I_P(y, a_0 + a_1 x + \ldots) = 0$, dvs. $I_P(y, g(x,0)) = I_P(y, x^m) = m \cdot I_P(x,y)$ i følge (6). Det er klart at y og x ikke har nogen fælles tangenter i $(0,0)$, og at $m_{(0,0)}(y) = m_{(0,0)}(x) = 1$. Så giver aksiom 5, at $I_P(y,x) = 1$. Alt i alt er vi kommet frem til at $I_P(f,g) = I_P(h,g) + I_P(y,g) = I_P(h,g) + m$. Da $m > 0$, er $I_P(h,g) < n$ kan derfor beregnes ifølge induktionsantagelsen.

Tilfælde 2: $r > 0$

Ideen, når $r > 0$, er at reducere til tilfældet $r = 0$ ved at bruge en proces, der minder om Euklids algoritme. Se på $f_0 := f(x,0)$ og $g_0 := g(x,0)$ i $k[x]$. Vi ved fra Algebra 1, at $k[x]$ er et Euklidisk område med deg som Euklidisk funktion. Derfor kan vi skrive $g_0 = A \cdot f_0 + h_0$, hvor $A,\ h_0 \in k[x]$ med $\deg(h_0) < \deg(f_0) = r$. Skriv nu $h := g - A \cdot f \in k[x,y]$. Ifølge aksiom (7) er $I_P(f,g) = I_P(f,h)$. Så gentages processen med f og h, osv. Hver gang får vi reduceret graden med mindst 1, så denne proces gentages højst et endeligt antal gange og ender med polynomier $f',\ g' \in k[x,y]$ med $I_P(f,g) = I_P(f',g'))$, hvor $\deg(f'(x,0)) = 0$ eller $\deg(g'(x,0)) = 0$. Dette falder under tilfælde 1, så vi er færdige.

Bevis for eksistens

Sæt $I_P(f,g) = \dim_k(k[k^2]_P/\langle f,g\rangle)$. Bemærk den lokale ring til k^2 i P er givet ved:

$$k[k^2]_P = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in k[x,y], a(P) \neq 0 \right\} \tag{8}$$

Vi skal vise, at aksiom $(1) - (7)$ er opfyldt.

3) Det er klart, at $I_P(f,g) = I_P(g,f)$, fordi $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$.

7) Det er klart at $I_P(f,g) = I_P(f, g + af)$, da $\langle f,g\rangle = \langle f, g + af\rangle$ for ethvert $a \in k[x,y]$.

2) Vi skal vise $I_P(f,g) = 0 \Leftrightarrow P$ ikke tilhører f eller g. Bemærk $I_P(f,g) = 0 \Leftrightarrow k[k^2]_P = \langle f,g\rangle \Leftrightarrow \langle f,g\rangle$ i $k[k^2]_P$ indeholder en enhed.

   $\Leftarrow$: Hvis P ikke ligger på f (eller g, men her har jeg for nemhed skyld antaget, at det er f) gælder: $f(P) \neq 0$. Det betyder at $\frac{1}{f} \in k[k^2]_P$ men så er f en enhed i $k[k^2]_P$.

$\Rightarrow$: Hvis $k[k^2]_P = \langle f, g\rangle$ ligger 1 i $\langle f, g\rangle$. Og da 1 er 1 i P, kan der ikke gælde, at $f(P) = g(P) = 0$, da $1 = a(P)f(P) + b(P)g(P)$ for passende a, $b \in k[k^2]_P$.

Vi vil nu vise, $I_P(f, g)$ kun afhænger af de komponenter for f og g, der går gennem P. Skriv $f = af'$, hvor f' er produktet af komponenterne gennem P og a er produktet af komponenterne, der ikke går gennem P. Skriv tilsvarende $g = bg'$. Det, vi skal vise, er så, at $I_P(f, g) = I_P(f', g')$. Det svarer til at vise, at $\langle f, g\rangle = \langle f', g'\rangle$ i $k[k^2]_P$. Men det er klart, fordi $a(P) \neq 0$ og $b(P) \neq 0$, så a og b er enheder i $k[k^2]_P$.

4) Hvis $T : k^2 \to k^2$ er et affint koordinatskifte med $T(Q) = P$, så skal vi vise $I_Q(f \circ T, g \circ T) = I_P(f, g)$. Dette kommer af, at T inducerer en isomorfi mellem de lokale ringe i hhv. P og Q, så dimensionen er den samme. Vi vil ikke vise dette i detaljer.

   Nu kan vi altså antage, at $P = (0, 0)$ og at samtlige komponenter for f og g går gennem P.

1) At $I_P(f, g)$ er endelig, når f og g ikke har nogen fælles komponenter, vil vi ikke vise. Se evt. [Fulton] kap. 3, afsnit 3.

   Hvis f og f har en fælles komponent gennem $P = (0, 0)$ har vi set, at der findes en fælles faktor h for f og g. Derfor vil $\langle f, g\rangle \subseteq \langle h\rangle$ og derfor er $I_P(f, g) = \dim_k(k[k^2]_P/\langle f, g\rangle) \geq \dim_k(k[k^2]_P/\langle h\rangle)$. Nu er $k[k^2]_P/\langle h\rangle$ fremkommet ved først at lave rationale funktioner defineret i P og derefter tage kvotienten med $\langle h\rangle$. Ser vi på den lokale ring til $V(h)$ i P, som vi kan betegne $k[h]_P$, er den fremkommet ved først at tage kvotienten med $\langle h\rangle$ og dernæst lave rationale fukntioner defineret i P. Hvis der skal være rimelighed til, må disse ringe være "ens", og man kan da også formelt vise, at $k[k^2]_P/\langle h\rangle)$ og $k[h]_P$ er isomorfe. Dvs. $I_P(f, g) \geq \dim_k(k[k^2]_P/\langle h\rangle) = \dim_k(k[h]_P)$. Fra afsnittet "Lokal ring" har vi at koordinatringen $k[h] \subseteq k[h]_P$. Så mangler vi bare at $\dim_k k[h] = \infty$, og da $V(h)$ er en uendelig punktmængde, er det nok at vise følgende påstand:

   Hvis $k[h]$ har endelig dimension, er $V(h)$ endelig: Tag r forskellige punkter $P_1, \ldots, P_r$ i $V(h)$. Så kan lave polynomier $f_1, \ldots, f_r$, så $f_i(P_j) = 0$ for $i \neq j$ og $f_i(P_i) = 1$. Hvis $\sum \lambda_i[f_i] = 0$ i $\langle h\rangle$, er $\sum \lambda_i f_i \in \langle h\rangle$. Så er $\lambda_j = \sum \lambda_i f_i(P_j) = 0$ da $P_j \in V(h)$. Altså er $[f_1], \ldots, [f_r]$ lineært uafhængige, så $r \leq \dim_k k[h]$. Dette viser påstanden.

6) Det er nok at vise, at $I_P(f, gh) = I_P(f, g) + I_P(f, h)$ for alle $f, g, h \in k[x, y]$. Vi kan antage, at f og gh ikke har nogen fælles komponenter, for ellers er resultatet trivielt. Skriv for nemheds skyld $\mathcal{K} = k[k^2]_P$.

Lad $\phi : \mathcal{K}/\langle f, gh\rangle \longrightarrow \mathcal{K}/\langle f, g\rangle$ være givet ved $\phi([z]) = [z], z \in \mathcal{K}$. Vi ved ϕ er en ringhomomorfi.

Sæt $\psi : \mathcal{K}/\langle f, h\rangle \longrightarrow \mathcal{K}/\langle f, gh\rangle$ til $\psi([z]) = [gz], z \in \mathcal{K}$.

Vi vil nu vise, at følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}/\langle f, h\rangle) \longrightarrow \mathcal{K}/\langle f, gh\rangle) \longrightarrow \mathcal{K}/\langle f, g\rangle) \longrightarrow 0 \tag{9}$$

er eksakt. Så har vi nemlig, at

$$\dim_k(\mathcal{K}/\langle f, gh\rangle) = \dim_k(\mathcal{K}/\langle f, h\rangle) + \dim_k(\mathcal{K}/\langle f, g\rangle) \tag{10}$$

1. ϕ er surjektiv: Da $\langle f, gh\rangle \subseteq \langle f, g\rangle$ er $\mathcal{K}/\langle f, g\rangle \subseteq \mathcal{K}/\langle f, gh\rangle$. Da $\phi([z]) = [z]$, er ϕ restringeret til $\mathcal{K}/\langle f, g\rangle$ simpelthen identitetsafbildningen på $\mathcal{K}/\langle f, g\rangle$. Så er restriktionen af ϕ klart surjektiv, og dermed er ϕ også surjektiv.
2. $\ker\phi = \mathrm{Im}\psi$: Da $\phi \circ \psi = 0$, er det klart, at $\ker\phi \supseteq \mathrm{Im}\psi$. Tag nu $[z] \in \ker\phi$. Så er $\phi([z]) = [z] = 0$ i $K/\langle f, g\rangle$, dvs. $z = uf + vg$, hvor $u, v \in \mathcal{K}$. I $K/\langle f, h\rangle$ er så $[z] = [af + vg] = [vg]$. Pr. definition af ψ giver dette, at $[z] = \psi([v])$, så $[z] \in \mathrm{Im}\psi$. Dermed er $\ker\phi \subseteq \mathrm{Im}\psi$.
3. ψ er injektiv: Antag at $\psi([z]) = 0$. Vi skal så vise, at $[z] = 0$. Når $\psi([z]) = [gz] = 0$ i $\mathcal{K}/\langle f, gh\rangle$, er $gz = uf + vgh, u, v \in \mathcal{K}$. Vælg nu $s \in k[x, y]$ med $s(P) \neq 0$ og $su = a$, $sv = b$, $sz = c \in k[x, y]$. Så er:

$$af = suf = sgz - svgh = cg - bgh = g(c - bh) \tag{11}$$

   Da f og g pr. antagelse ikke har fælles faktorer, giver ovenstående ligning, at f går op i $c - bh$, eller med andre ord $c - bh = df$ for et $d \in k[x, y]$. Men så er $sz = c = df + bh$, hvilket giver $z = \frac{d}{s} \cdot f + \frac{b}{s} \cdot h$. Altså er $[z] = 0$ i $\mathcal{K}/\langle f, h\rangle$.

5) Beviset er meget langt og teknisk. Vi henviser til [Fulton] kap. 3 afsnit 3.

Bezouts Sætning

Vi vil nu kort gennemgå, hvordan snittallet er defineret for projektive, plane kurver. Lad $f \in {}_{c}[x, y, z]$ være et homogent polynomium forskelligt fra 0-polynomiet. Så kaldes den projektive varietet $C = V(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ en projektiv, plan kurve. Lad nu $C = V(f)$ og $D = V(g)$ være to projektive, plane kurver. Vi ved at $C \cap D$ er en endelig punktmængde, så vi kan antage (evt. ved brug af et projektivt koordinatskift), at ingen punkter på $C \cap D$ ligger på "linien gennem uendelig", $z = 0$. Så kan vi dehomogenisere f og g mht. z, og får to polynomier i $k[x, y]$, som vi vil kalde f_* og g_*. Vi definerer nu $I_P(f, g) := \dim_k(k[k^2]_P/\langle f_*, g_*\rangle)$. Denne definition opfylder aksiomerne (1) – (7), bortset fra, at i (4) skal T være et projektivt koordinatskift, og i (7) skal a være et homogent polynomium med deg(a) = deg(g) - deg(f).

Sætning 0.0.2. *Lad $C = V(f)$ og $D = V(g)$ være projektive, plane kurver, hvor* $\deg(f) = m$ *og* $\deg(g) = n$. *Amtag, at C og D ikke har nogen fælles komponenter. Så er $\sum_P I_P(f, g) = mn$*

Bevis Ifølge ovenstående definition er:

$$\sum_P I_P(f, g) = \sum_P \dim_k(k[k^2]_P/\langle f_*, g_*\rangle) = \dim_k k[x, y]/\langle f_*, g_*\rangle \tag{12}$$

hvor andet lighedstegn kommer fra Prop 9, kapitel 3 i [Fulton]. Nu indfører vi følgende betegnelser: $\mathcal{K}_* = k[x, y]/\langle f_*, g_*\rangle$, $\mathcal{K} = k[x, y, z]/\langle f, g\rangle$ og $R = k[x, y, z]$, og vi lader hhv. $\mathcal{K}_d$ og R_d betegne vektorrummet af homogene polynomier af grad netop d i hhv. $\mathcal{K}$ og R. Så vil Bezouts sætning være bevist, hvis vi kan vise, at $\dim \mathcal{K}_* = \dim \mathcal{K}_d = mn$ for et tilstrækkelig stort d.

Trin 1: Vi vil vise at $\dim \mathcal{K}_d = mn$ for alle $d \geq m + n$: Lad $\pi : R \longrightarrow \mathcal{K}$ være den kanoniske ringhomomorfi, lad $\phi : R \times R \longrightarrow R$ være givet ved $\phi(a, b) = af + bg$, og lad $\psi : R \longrightarrow R \times R$ være givet ved $\psi(c) = (gc, -fc)$. Det giver følgen:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R \times R \longrightarrow R \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0 \tag{13}$$

Vi vil vise, at denne følge er eksakt: Det er klart, at π surjektiv, ψ er injektiv og $\ker \pi = \langle f, g\rangle = \mathrm{Im}\phi$. Vi ser at $\phi \circ \psi = 0$, så $\ker \phi \supseteq \mathrm{Im}\psi$. Tager vi $(a, b) \in \ker \phi$, er $af + bg = 0 \Leftrightarrow bg = -af$. Da f og g pr. antagelse ikke har nogen fælles faktorer, må g gå op i a, dvs. $a = cg$ for et $c \in R$. Heraf fås $bg = -cgf$, hvilket giver $b = -cf$. Altså er $(a, b) = (cg, -cf) = \phi(c)$ og $\ker \phi \subseteq \mathrm{Im}\psi$.

Hvis vi restringerer afbildningerne til homogene polynomier af visse grader, får vi denne eksakte følge:

$$0 \longrightarrow R_{d-m-n} \longrightarrow R_{d-m} \times R_{d-n} \longrightarrow R_d \longrightarrow \mathcal{K}_d \longrightarrow 0 \tag{14}$$

Vi har til forelæsningerne set, at

$$\dim R_s = \dim k[x, y, z]_s = \begin{pmatrix} s+2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{(s+2)!}{s!2!} = \frac{(s+1)(s+2)}{2} \tag{15}$$

Ved at bruge eksaktheden kan vi så udregne $\dim \mathcal{K}_d$ for $d \geq m+n$:

$$\dim \mathcal{K}_d = \dim R_d - \dim(R_{d-m} \times R_{d-n}) + R_{d-m-n} = mn \tag{16}$$

idet alle led på højresiden går ud, undtagen mn.

Trin 2: Afbildningen $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$, givet ved $\alpha([h]) = [zh]$ for $h \in R_d$, er injektiv.

Vi skal vise: Hvis $zh = af + bg$, så er $h = a'f + b'g$, for passende a', b'. Indfør betegnelsen $c_0 = c(x, y, 0)$ for $c \in k[x, y, z]$. f, g og z har ikke nogen fælles nulpunkter (vi antag jo, at $C \cap D$ ikke havde nogen punkter til fælles med $z = 0$). Det betyder, at f_0 og g_0 ikke kan have en (ikke-triviel) fælles faktor, så f_0 og g_0 er indbyrdes primiske i $k[x, y]$.

Ligningen $zh = af + bg$ medfører ved at sætte $z = 0$, at $a_0 f_0 = -b_0 g_0$. Fordi f_0 og g_0 er indbyrdes primiske, må $b_0 = f_0 c$ for et $c \in k[x, y]$. Indsættes dette, fås at $a_0 = -c g_0$. Sæt nu $\tilde{a} = a + cg$ og $\tilde{b} = b - cf$. Så er $\tilde{a}_0 = a_0 + c_0 g_0 = 0$ og ligeledes $\tilde{b}_0 = 0$. Derfor findes a', $b' \in k[x, y, z]$, så $\tilde{a} = a'z$ og $\tilde{b} = b'z$. Da $zh = af + bg = \tilde{a}f + \tilde{b}g = (a'f + b'g)z$, er $h = a'f + b'g$, og det ønskede er vist.

Trin 3: $\dim \mathcal{K}_* = \dim \mathcal{K}_d$ for alle $d \geq m + n$:

Lad $d \geq m+n$ og vælg $a_1, \ldots, a_{mn} \in R_d$, så de repræsenterer en basis for $\mathcal{K}_d$ (Trin 1). Vi dehomogeniserer disse polynomier mht. z og får $a_{1*}, \ldots, a_{mn*}$, hvor $a_{i*} = a_i(x, y, 1)$. Lad $[a_{i*}]$ være klassen for a_{i*} i $\mathcal{K}_*$. For at vise Trin 3, er det nok at vise, at $[a_{1*}], \ldots, [a_{mn*}]$ er en basis for $\mathcal{K}_*$.

Bemærk først, at restriktionen til $\mathcal{K}_d$ af afbildningen α fra Trin 2, $\alpha|_{\mathcal{K}_d} : \mathcal{K}_d \longrightarrow \mathcal{K}_{d+1}$, er en isomorfi mellem vektorrum: Restriktionen af α er injektiv, fordi α er det (Trin 2), og $\dim \mathcal{K}_d = mn = \dim \mathcal{K}_{d+1}$ (Trin 1). Induktivt fås, at $\{z^r a_1, \ldots, z^r a_{mn}\}$ repræsenterer en basis for $\mathcal{K}_{d+r}$, for ethvert $r \geq 0$.

1. $\{[a_{i*}]\}$ udspænder $\mathcal{K}_*$: Lad $[h] \in \mathcal{K}_*$, hvor $h \in k[x, y]$. Vi homogeniserer h mht. z og får et homogent polynomium h^h. Så kan vi opnå, at $z^N h^h$ er homogent af grad $d+r$ ved at vælge N passende. Fordi $\{z^r a_i\}$ repræsenterer en basis for $\mathcal{K}_{d+r}$ findes passende $\lambda_i \in k$ og $b, c \in k[x, y, z]$, så:

$$z^N h^h = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i z^r a_i + bf + cg \tag{17}$$

Så er

$$h = (z^N h^h)_* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i a_{i*} + b_* f_* + c_* g_* \tag{18}$$

så $[h] = \sum \lambda_i [a_{i*}]$. Dette viser, at $\{[a_{i*}]\}$ udspænder $\mathcal{K}_*$.

2. $\{[a_{i*}]\}$ er lineært uafhængige: Antag at $\sum \lambda_i[a_{i*}] = 0$ i $\mathcal{K}_*$. Det betyder, at $\sum \lambda_i a_{i*} = bf_* + cg_*$ i $k[x,y]$. Hvis vi homogeniserer denne ligning, får vi: $z^r \sum \lambda_i a_i = z^s b^h f + z^t c^h g$ for passende r, s, t. Men så er i $\mathcal{K}_{d+r}$ $\sum \lambda_i[z^r a_i] = [z^s b^h f + z^t c^h g] = 0$. Og da $\{[z^r a_i]\}$ er en basis, følger det, at alle $\lambda_i = 0$. Dette viser, at $\{[a_{i*}]\}$ er lineært uafhængige.

Hermed har vi bevist Bezouts sætning.

Litteratur:

[Fulton]: William Fulton - *Algebraic Curves*
[Cox]: Cox, Little, O'Shea - *Ideals, Varieties, and Algorithms*