

Den projektive lukning af en affin varietet

Vi vil i det følgende bruge \mathbf{I}_a og \mathbf{V}_a for den affine version af \mathbf{I} og \mathbf{V} . Vi minder om at $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ er defineret ved $x_0 \neq 0$. Desuden minder vi om at U_0 identificeres med k^n via $(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ og $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$

Følgende eksempel illustrerer formålet med disse noter.

Example 0.1. Betragt den affine varietet $W = \mathbf{V}(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3, x_4 - x_1^4) \subseteq k^4$. Vi ved at $W = V \cap U_0$, hvor V er den projektive varietet $V = \mathbf{V}(x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3, x_4x_0^3 - x_1^4) \subseteq \mathbb{P}^4(k)$. Er V den mindste projektive varietet der indeholder W ? Først ser vi på hvor "stor" V er i forhold til W . Se på $V - W = V \cap H$ hvor $H = \mathbf{V}(x_0)$ er hyperplanen i uendelig.

$$V \cap H = \mathbf{V}(x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3, x_4x_0^3 - x_1^4, x_0) = \mathbf{V}(x_0, x_1) \subseteq \mathbb{P}^4(k)$$

Dvs. $V = W \cup V(x_0, x_1)$.

Så V er egentlig ret stor. Der er uendelig mange punkter. Findes der en mindre projektiv varietet der indeholder W ? Findes der en mindste?

Der findes faktisk en mindste projektiv varietet \overline{V} , indeholdende en given affin varietet V . \overline{V} kaldes den projektive lukning af V , og vil blive defineret i det følgende. Disse noter beskriver en algoritme til at finde den projektive lukning af en affin varietet.

Men først har vi brug for nogle definitioner.

Definition 0.2. Et ideal $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ kaldes homogent hvis der for $f \in I$ gælder at de homogene komponenter f_i af f også ligger i I

Definition 0.3. Lad I være et ideal i $k[x_1, \dots, x_n]$. Homogeniseringen af I defineres til at være idealet $I^h = \langle f^h : f \in I \rangle \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$

Bemærk at I^h er homogent. For lad $g \in I^h$ så er g på formen $g = \sum a_i f_i^h$, hvor $f_i \in I$. Altså er g 's homogene komponenter $f_i^h \in I^h$ homogene og dermed er I^h homogent.

Definition 0.4. Lad $W \subseteq k^n$ være en affin varietet. Den projektive lukning af W er den projektive varietet $\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, hvor $\mathbf{I}_a(W)^h \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ er homogeniseringen af idealet $\mathbf{I}_a(W) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$

Lemma 0.5. Lad $F(x_0, \dots, x_n)$ være et homogent polynomium og skriv $F = \sum_{i=1}^d x_0^{\nu(i)} g_i(x_1, \dots, x_n)$, hvor $\nu(i) \in \mathbb{N}$. Hvis $f = F(1 : x_1 : \dots : x_n)$ er dehomogeniseringen af F , så er $F = x_0^e f^h$, hvor $e = \min\{\nu(i) : 1 \leq i \leq d\}$

Bevis. Vi har at $f = F(1 : x_1 : \cdots : x_n) = \sum_{i=1}^d g_i(x_1, \dots, x_n)$. Så f^h er altså summen af g_i ganget med en passende potens af x_0 . Dvs. den eneste forskel på f^h og F er en passende potens af x_0 ganget på hvert g_i . Lad nu g_m betegne det g_i der har den største total grad. Bemærk at $\deg(g_m) = \deg(f^h)$. Da hvert led i $F = \sum_{i=1}^d x_0^{\nu(i)} g_i(x_1, \dots, x_n)$ har samme grad, må der gælde at $\nu(m) = e$. Vi har derfor at $\deg(f^h) = \deg(g_m) = \deg(F) - \nu(m) = \deg(F) - e$, og dermed er $F = x_0^e f^h$. \square

Som nævnt, efter eksempel 0.1, er den projektive lukning af en affin varietet, netop den mindste projektive varietet indeholdende den affine varietet.

Proposition 0.6. *Lad $W \subseteq k^n$ være en affin varietet og lad $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ være den projektive lukning af W . Så er \overline{W} er den mindste projektive varietet i $\mathbb{P}^n(k)$ der indeholder den affine varietet W .*

Bevis. Antag at V er en projektiv varietet så $W \subseteq V$. Vi skal vise at $\overline{W} \subseteq V$. Dvs. vis at $I(\overline{W}) \supseteq I(V)$. Skriv nu $V = \mathbf{V}(F_1, \dots, F_s)$. Det er nok at vise at $F_i \in I(\overline{W})$, da $F \in I(V)$ kan skrives som $F = \sum a_i F_i$. Vi har at $F_i \in \mathbf{I}(V) \subseteq \mathbf{I}(W)$, hvor W ses som liggende inde i U_0 via afbildningen nævnt før eksemplet 0.1. Derfor gælder der at dehomogeniseringen af $F_i(1, x_1, \dots, x_n) = f_i \in \mathbf{I}_a(W)$ og dermed $f_i^h \in \mathbf{I}_a(W)^h$. Da $f_i = F_i(1, x_1, \dots, x_n)$ har vi ifølge lemma 0.5 at $F_i = x_0^e f_i^h \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h)) = \mathbf{I}(\overline{W})$. Dvs. at $\mathbf{I}(\overline{W}) \supseteq \mathbf{I}(V)$ og dermed $\overline{W} \subseteq V$. \square

Nu har vi altså vist at der findes en mindste, men hvordan finder vi den? Vi så i eksempel 0.1 at man, højst sandsynligt, ikke fik den projektive lukning (den mindste) ved bare at homogenisere ligningerne for den affine varietet.

Hvis k er algebraisk lukket, så har vi her et første skridt på vejen til en besvarelse af spørgsmålet.

Theorem 0.7. *Lad k være et algebraisk lukket legeme og lad $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ være et ideal. Så er $\mathbf{V}(I^h) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ den projektive lukning for den affine varietet $\mathbf{V}_a(I) \subseteq k^n$.*

Bevis. Lad $W = \mathbf{V}_a(I) \subseteq k^n$ og $Z = \mathbf{V}(I^h) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Vi husker på at vi kan identificere k^n med $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ via afbildningen nævnt før eksemplet 0.1. Dvs. punkterne $(1 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ identificeres med $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$. Lad $(a_1, \dots, a_n) \in W$, så har vi at $f^h(1 : a_1 : \cdots : a_n) = f(a_1, \dots, a_n) = 0$, hvor $f \in I$. Altså er W indeholdt i Z , så vi mangler bare at vise at Z er den mindste projektive varietet indeholdende W . Lad derfor $V = \mathbf{V}(F_1, \dots, F_s)$ være en vilkårlig projektiv varietet så $V \supseteq W$. Som i beviset for Proposition 0.6 er dehomogeniseringen $f_i = F_i(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{I}_a(W)$. Da k er algebraisk

lukket giver Hilberts Nullstellensatz at $\mathbf{I}_a(W) = \sqrt{\mathbf{I}}$, og dermed eksisterer der et heltal m så $f_i^m \in I$. Vi har altså at

$$(f_i^m)^h \in I^h$$

og dermed at $(f_i^m)^h \in \mathbf{I}(Z)$. (*)

Skriv nu $f_i = \sum_{j=0}^d g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, hvor $\deg(g_{ij}) = j$. Læg mærke til at $g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = g_{ij}(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})x_0^j$. Så vi har at

$$f_i^h = \sum_{j=0}^d g_{ij}(x_1, \dots, x_n)x_0^{d-j} = \sum_{j=0}^d g_{ij}(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})x_0^j x_0^{d-j} = f_i(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})x_0^d$$

Altså gælder der at $(f_i^h)^m = (f_i(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})x_0^d)^m = f_i(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})^m x_0^{md} = (f_i^m)^h$, så (*) giver nu at $f_i^h \in \mathbf{I}(Z)$. Fra Lemma 0.5 har vi at $F_i = x_0^e f_i^h \in \mathbf{I}(Z)$, og dermed er $Z \subseteq V$. Altså er Z den mindste projektive varietet indeholdende W , så $Z = \overline{W}$. \square

Det eneste vi mangler nu er at finde en smart måde til at beregne I^h . Til dette skal vi bruge forskellige redskaber fra teorien om Gröbner baser og om monomielle ordninger. Det antages kendt hvad en monomial ordning på $k[x_1, \dots, x_n]$ er. Ellers henviser til kap. 2 i [CLO]. Vi minder dog om at en vægtet monomial ordning, er en monomial ordning, \prec , der først ordner efter den totale grad ($x^\alpha \prec x^\beta$ hvis $|\alpha| < |\beta|$).

Lemma 0.8. *Lad \prec være en vægtet ordning på $k[x_1, \dots, x_n]$ så kan \prec udvides til en ordning \prec_h på $k[x_0, \dots, x_n]$. Desuden gælder der at hvis $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ så er*

$$LM_{\prec_h}(f^h) = LM_{\prec}(f)$$

Bevis. Ethvert Monomium i $k[x_0, \dots, x_n]$ kan skrives på formen

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} x_0^d = x^\alpha x_0^d$$

Hvor x^α ikke indeholder nogen x_0 faktorer. Nu kan vi udvide den vægtede monomielle ordning \prec på $k[x_1, \dots, x_n]$ til en monomial ordning \prec_h på $k[x_0, \dots, x_n]$ på følgende måde:

$$x^\alpha x_0^d \succ_h x^\beta x_0^e \iff x^\alpha \succ x^\beta \text{ eller } x^\alpha = x^\beta \text{ og } d > e.$$

Det ses ved inspektion af Definition 1 side 53 i [CLO] at denne ordning \prec_h opfylder kravene for en monomial ordning. Vi mangler nu kun at vise at de ledende monomier for f og f^h er ens. Altså at $LM_{\prec_h}(f^h) = LM_{\prec}(f)$.

Da \prec er en vægtet ordning ved vi at det ledende monomie for ethvert $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ er et af monomierne x^α i den homogene komponent af f af maksimal total grad. Når vi homogeniserer ændres dette led ikke. Så hvis $x^\beta x_0^e$ er et vilkårligt andet element i f^h er $\alpha > \beta$, og pr definition af \prec_h er $x_h^\alpha \succ x^\beta x_0^e$ og derfor er $LM_{\prec}(f) = x^\alpha = LM_{\prec_h}(f^h)$. \square

Vi er nu fuldt udrustet til at vise en måde man kan finde homogeniseringen af idealet I , I^h . Og vi har derved fundet en måde til at finde den mindste projektive varietet der indeholder en given affin varietet. Følgende sætning vil sammen med Sætning 0.7 give en algoritme der finder den projektive lukning hvis man er i et algebraisk lukket legeme.

Theorem 0.9. *Lad I være et ideal i $k[x_1, \dots, x_n]$ og lad $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ være en Gröbner basis for I med hensyn til en vægtet monomial ordning \prec i $k[x_1, \dots, x_n]$. Så er $G^h := \{g_1^h, \dots, g_s^h\}$ en Gröbner basis for $I^h \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ med hensyn til ordningen \prec_h i $k[x_0, \dots, x_n]$*

Bevis. Ifølge Definition 5 side 74 i [CLO] er $G^h = \{g_1^h, \dots, g_s^h\}$ en Gröbner basis for I^h mht. \prec_h hvis der gælder at

$$\langle LT(g_1^h), \dots, LT(g_s^h) \rangle = \langle LT(I^h) \rangle \quad (1)$$

Hvor $LT(g_i^h)$ er den ledende term for polynomiet $g_i^h \in G^h$. Og $\langle LT(I^h) \rangle$ er defineret som idealet frembragt af $LT(I^h)$ hvor

$$LT(I^h) = \{cx^\alpha \mid \text{eksisterer } f \in I^h \text{ med } LT(f) = cx^\alpha\}.$$

Men Vi skal altså bevise at (1) er sand, for at vise at G^h er en Gröbner basis for idealet I^h mht. \prec_h Vi har pr. definition 0.3 at $I^h = \langle f^h \mid f \in I \rangle$, så da $g_i \in I$ har vi at $g_i^h \in I^h$ og derved at $\langle LT(g_1^h), \dots, LT(g_s^h) \rangle \subset \langle LT(I^h) \rangle$.

Lad nu $F \in I^h$ så kan F skrives som $F = \sum_j A_j f_j^h$ hvor $A_j \in k[x_0, \dots, x_n]$ og $f_j \in I$. Lad nu $f = F(1, x_0, \dots, x_n)$ være dehomogeniseringen af F . Så får vi, da $f_j^h(1, x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1, \dots, x_n)$, at

$$\begin{aligned} f &= F(1, x_1, \dots, x_n) = \sum_j A_j(1, x_1, \dots, x_n) f_j^h(1, x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_j A_j(1, x_1, \dots, x_n) f_j(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Det vil sige at f kan skrives som en linear kombination af elementer i I og derfor har vi at $f \in I$.

Hvis vi homogeniserer f har vi fra Lemma 0.5 at der eksistere et $e \in \mathbb{N}$ så

$$F = x_0^e \cdot f^h$$

så

$$LM_{\prec_h}(F) = LM_{\prec_h}(x_0^e \cdot f^h) = x_0^e \cdot LM_{\prec_h}(f^h) = x_0^e \cdot LM_{\prec}(f)$$

Hvor vi i sidste lighedstegn har brugt resultatet fra Lemma 0.8. Da G er en Gröbner base for idealet I ved vi at der eksisterer et $g_i \in G$ så $LM_{\prec}(g_i) | LM_{\prec}(f)$. Men da vi ifølge Lemma 0.8 har at

$$LM_{\prec}(g_i) = LM_{\prec_h}(g_i^h)$$

får vi

$$LM_{\prec_h}(g_i^h) | LM_{\prec_h}(F)$$

og da

$$\langle LT(g_1^h), \dots, LT(g_s^h) \rangle \subset \langle LM(g_1^h), \dots, LM(g_s^h) \rangle$$

har vi det at

$$\langle LT(g_1^h), \dots, LT(g_s^h) \rangle = \langle LT(I^h) \rangle$$

Og derved er G^h en Gröbner basis for idealet I^h mht. \prec_h

□

Vi har nu i form af Sætning 0.7 og Sætning 0.9 en algoritme til at finde den mindste projektive varietet indeholdende en given affin varietet, $W \in k^n$. Først finder man en Gröbner basis, G , for idealet $I(W)$. Derefter udregnes homogeniseringen, G^h , af Gröbnerbasisen G , der ifølge Sætning 0.9 er en Gröbner basis for idealet I^h . G^h og I^h udspænder derfor det samme ideal i $k[x_0, \dots, x_n]$. Til sidst har vi ifølge Sætning 0.7 at $V(I(W)^h) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ er den projektive lukning for $V_a(I(W)) = W$.

Vi kan nu fortsætte eksempel 0.1 og finde den mindste projektive varietet der indeholder den affine varietet $W = (x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3, x_4 - x_1^4)$.

Example 0.10. Først findes en Gröbner basis for idealet $I(W) = I(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3, x_4 - x_1^4)$ med hensyn til en vilkårlig vægtet monomial ordning (her vælger vi graded lexicographic order, grevlex, Definition 6 side 56 i [CLO]). Denne Gröbner basis findes ved hjælp af MAPLE og er

$$G = \langle x_3^2 - x_2x_4, x_3x_2 - x_1x_4, x_1x_3 - x_4, x_2^2 - x_4, x_1x_2 - x_3, x_1^2 - x_2 \rangle.$$

Herefter homogeniseres G og vi får

$$G^h = \langle x_3^2 - x_2x_4, x_3x_2 - x_1x_4, x_1x_3 - x_0x_4, x_2^2 - x_0x_4, x_1x_2 - x_0x_3, x_1^2 - x_0x_2 \rangle.$$

Og vi har ifølge Sætning 0.9 at

$$I^h = \langle x_3^2 - x_2x_4, x_3x_2 - x_1x_4, x_1x_3 - x_0x_4, x_2^2 - x_0x_4, x_1x_2 - x_0x_3, x_1^2 - x_0x_2 \rangle$$

og derved får vi ifølge sætning 0.7 at

$$V(I^h) = V(x_3^2 - x_2x_4, x_3x_2 - x_1x_4, x_1x_3 - x_0x_4, x_2^2 - x_0x_4, x_1x_2 - x_0x_3, x_1^2 - x_0x_2)$$

er den projektive lukning for den affine varietet

$$W = (x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3, x_4 - x_1^4).$$

Det er vigtigt at legemet vi arbejder over er algebraisk lukket. Ellers kan vores algoritme gå galt, som følgende eksempel illustrerer

Example 0.11. Lad $I = \langle x_1^2 + x_2^4 \rangle$, så er $\mathbf{V}_a(I) = \{(0, 0)\}$. Så den projektive lukning er $\overline{\mathbf{V}_a(I)} = \{(1 : 0 : 0)\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Men ved brug af vores algoritme fås $I^h = \langle x_1^2x_0^2 + x_2^4 \rangle$ og dermed bliver $V(I^h) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dvs. $V(I^h) \supset \overline{\mathbf{V}_a(I)}$.

Referencer [CLO] : David Cox, John Little og Donal O'Shea: Ideals, varieties and algorithms, 2nd edition 1997, Springer.