Elliptiske kurver over $\mathbb{C}$ og gitre

Weierstrass teorien knytter som bekendt en elliptisk kurve E til et gitter $\mathbb{C}$, jvf. [Knapp][VI, §1-4]. Spørgsmålet om, hvorvidt enhver elliptisk kurve fremkommer p denne mde fra et gitter kaldes inversionsproblemet. Svaret er JA og kan let underbygges med vores viden om modulære former.

Vi husker, at j-invarianten $j = 1728\frac{g_2^3}{\Delta}$ dels klassificerer elliptiske kurver op til isomorfi, jvf. [Knapp][Proposition 3.7], dels er en holomorf afbildning

$$j : \mathcal{H} \to \mathbb{C},$$

der har en simpel pol i uendelig, jvf. [Knapp][Proposition 3.7].
<u>Påstand:</u> j er surjektiv.

Proof. : Lad $\lambda \in \mathbb{C}$ og betragt den modulære form $f_\lambda = 1728g_2^3 - \lambda\Delta$ af vægt 12. Ifølge [Knapp][Theorem 8.6], der anvendes med $k = 12$, har f_λ et nulpunkt $\tau \in \mathcal{H}$, hvorfor $j(\tau) = \lambda$. $\square$

Lad nu E være en elliptisk kurve med j-invariant λ og vælg τ, så $j(\tau) = \lambda$. Gitteret $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ giver anledning til en elliptisk kurve, der er isomorf med E, idet de to kurver har samme j-invariant.

Litteratur

[Knapp] A. W. Knapp, *Elliptic Curves*, Princeton University Press, 1992