

# Blow-up af en varietet $V \subset k^n$ i punktet 0

Filip Svendsen

17. december 2003

For en varietet  $V \subset k^n$ , med  $0 \in V$  og 0 ikke en irreducibel komponent af  $V$  kan vi lave et så kaldt 'blow-up' af  $V$ :

$$\pi : \tilde{V} \rightarrow V$$

Her er  $\pi$  projektionen fra  $\mathbb{P}^{n-1} \times k^n$  ned på  $k^n$  og  $\tilde{V}$  er en varietet i  $\mathbb{P}^{n-1} \times k^n$ . Blow-up'et har 2 egenskaber:

Egenskab 1:  $\pi^{-1}(q) = (q, q)$ , for  $q \in V - \{0\}$ .

Egenskab 2:  $\pi^{-1}(0) = W \times \{0\}$ .

Her betegner  $(p, q)$  et punkt i  $\mathbb{P}^{n-1} \times k^n$  med et homogent  $\mathbb{P}^{n-1}$ -koordinat  $p$ , og et  $k^{n-1}$ -koordinat  $q$ .  $W$  er den projektive version af tangent keglen i 0 (dvs.  $C_0(V) = C_W$ ). Når koordinaterne skal skrives ud, vil vi bruge  $y$ -koordinater for punkter i  $\mathbb{P}^{n-1}$  og  $x$ -koordinater for punkter i  $k^n$ .

Et 'blow-up' af en varietet  $V$  i punktet 0, er altså en måde at få adskilt  $V$  omkring origo, så forskellige kurver ind mod 0 kun mødes hvis deres "indgangsvinkel" til origo er den samme.

Det skal vises at et  $\tilde{V}$  der opfylder egenskaberne altid eksisterer.

En varietet  $\Gamma \subset \mathbb{P}^{n-1} \times k^n$  konstrueres:  $\Gamma = V(\dots, x_i y_j - x_j y_i, \dots)$ .  $x_i y_j - x_j y_i$  er  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogen så  $\Gamma$  er en varietet i  $\mathbb{P}^{n-1} \times k^n$ .

**Sætning 1** En varietet  $\tilde{V} \subset \mathbb{P}^{n-1} \times k^{n-1}$  opfylder egenskab 1 hvis og kun hvis  $\tilde{V} \subset \Gamma$ :

Antag  $\tilde{V}$  opfylder egenskab 1.  $\tilde{V}$  er en varietet i  $\mathbb{P}^{n-1} \times k^{n-1}$  så hvis  $(p, q) \in \tilde{V}$  er  $(p, q) = (sp, q)$ , for alle  $s \in k - \{0\}$ . Antag  $q = 0$ , så er  $x_i y_j - x_j y_i = 0 - 0 = 0$  og  $(p, q) \in \Gamma$ . Antag  $q \neq 0$ , så er  $\pi(p, q) = q \neq 0$  og egenskab 1 giver os så at  $(p, q) = (q, q)$ , dvs.  $p = sq$ ,  $x_i y_j - x_j y_i = s x_i^2 - s x_j^2 = 0$  og  $\tilde{V} \subset \Gamma$ .

Antag  $(p, q) \in \Gamma$ .  $p \in \mathbb{P}^{n-1}$  så der findes et  $k$  så  $y_k \neq 0$ .

$0 = y_k x_i - y_i x_k \Rightarrow y_k x_i = y_i x_k \Rightarrow y_i \frac{x_k}{y_k} = x_i$ , for alle  $i$ . Altså er  $q = \frac{x_k}{y_k} p$ . Hvis  $\frac{x_k}{y_k} = 0$  er  $q$  ikke et punkt i  $V - \{0\}$ . Hvis  $\frac{x_k}{y_k} \neq 0$  er  $(p, q) = (q, q)$  (det vil sige at  $p = sq$ ) og dermed er  $\pi^{-1}(q) = (q, q)$ .

At opfylde egenskab 2 er noget mere besværligt:

Et  $\tilde{V}$  vælges som den mindste varietet der indeholder  $\Gamma \cap (\mathbb{P}^{n-1} \times (v - \{0\}))$ . Da snittet af 2 varieteter er en varietet er  $\tilde{V}$  klart indeholdt i  $\Gamma$ , så  $\tilde{V}$  opfylder egenskab 1.

Vi må igennem en del trin for at vise egenskab 2:

**Sætning 2** *At 0 ikke er et irreducibelt element i  $V$  medfører at  $k$  er uendelig og  $V$  er Zariski lukningen af  $V - \{0\}$ .*

Der findes en minimal dekomposition af  $V$ :  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup v_m$ . Antag  $k$  endelig. Så er  $V$  endelig. Minimal dekompositionen for  $V$  vil være  $\bigcup_{q \in V} \{q\}$ . Dermed er 0 en irreducibel komponent i  $V$ , hvilket er en modstrid.

Da  $V$  er en varietet kan Zariski lukningen af  $V - \{0\}$  kun være  $V$  eller  $V - \{0\}$ . Antag den sidste mulighed. Der er en minimal dekomposition for  $V$  så  $V - \{0\} = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$ . Ingen af  $V_i$ 'erne indeholder 0 så  $V = \{0\} \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$  er minimal dekompositionen for  $V$ . Men så er  $\{0\}$  et irreducibelt element i  $V$ , hvilket er en modstrid.

**Sætning 3**  $g \in I(\tilde{V}) \Leftrightarrow \forall t \in k \forall q \in V: g(tq, q) = 0$

Antag  $g \notin I(\tilde{V})$ : Så findes der et  $(p, q) \in \Gamma \cap (\mathbb{P}^{n-1} \times (v - \{0\}))$  så  $g(p, q) \neq 0$ .  $(p, q) \in \Gamma$  og  $q \neq 0$ ,  $q \in V$  så  $(p, q) = (tq, q)$ , hvilket giver  $0 \neq g(p, q) = g(tq, q)$ .

Antag  $g \in I(\tilde{V})$ : Antag at hverken  $t$  eller  $q$  er nul. Så følger  $g(tq, q) = 0$  af egenskab 1. Definer  $h_t$  som  $h_t(q) = g(tq, q)$ . Vælg  $t \neq 0$ . Så ligger  $h$  i  $I(V - \{0\})$ . Antag at  $h(0) \neq 0$ : Så er Zariski lukningen af  $V - \{0\}$  lig  $V - \{0\}$ . Men vi ved at det ikke er sandt så  $0 = h_t(0) = g(0, 0)$ .

Udtryk  $g(tq, q)$  som et polynomium i  $t$ :  $g(tq, q) = f_0(q) + f_1(q)t + \dots + f_m(q)t^m$ . Vælg et fast  $q \in V$ . Polynomiet er enten 0 for alle værdier af  $t$  eller maksimalt  $m$  forskellige værdier af  $t$ , og da  $g(tq, q) = 0$  for alle  $t \in k - \{0\}$  og  $k$  ikke er endelig er  $g(0, q) = 0$  for alle  $q \in V$ .

Sætningen har et simpelt lemma:

**Lemma 4**  $g(p, q) \in I(\tilde{V}) \Rightarrow f(q) = g(q, q) \in I(V)$ :

$g(q, q) = 0$  for alle  $q \in V$  så  $f(q) = 0$  for alle  $q \in V$ .

**Sætning 5** *Hvis  $g$  ligger i  $\tilde{V}$  er de  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogene komponenter af  $g$  også i  $\tilde{V}$ :*

Antag  $q \in V$ .  $g = g_0 + g_1 + \dots + g_l$ , hvor  $g_i$  er  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogen af grad  $i$ . Vi har fra sætning 4 at  $g(tq, q) = 0$  for alle  $t \in k$ :  $g = g_0 + g_1 + \dots + g_l$ , hvor  $g_i$  er  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogen af grad  $i$   $0 = g(tq, q) = g_0(tq, q) + g_1(tq, q) + \dots + g_l(tq, q) = g_0(q, q) + g_1(q, q)t + \dots + g_l(q, q)t^l$ . Det er sandt for alle  $t \in k$  og da  $k$  ikke er endelig må alle  $g_i$  være 0 i  $(q, q)$  og dermed også i  $(tq, q)$ . Det gælder for alle  $t \in k$  og alle  $q \in V$ , så jævnfør sætning 3 har vi at  $g_i \in \tilde{V}$ .

Det medfører også at  $\tilde{V}$  er genereret af  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogene polynomier, da vi blot kan tage en anden genererende mængde for  $\tilde{V}$  og skrive den ud i dens  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogene komponenter.

Så kan egenskab 2 bevises opfyldt:

**Sætning 6**

$$W \times \{0\} = \tilde{V} \cap (\mathbb{P}^{n-1} \times \{0\})$$

Elementerne i  $\tilde{V} \cap (\mathbb{P}^{n-1} \times \{0\})$  er elementerne i  $\tilde{V}$  på formen  $(p, 0)$ . Det vil sige at  $(p, 0) \in \tilde{V} \cap (\mathbb{P}^{n-1} \times \{0\})$  hvis og kun hvis  $g(p, 0) = 0$  for alle  $g \in I(\tilde{V})$ . Men da  $I(\tilde{V})$  er genereret af  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogene polynomier er det ensbetydende med at  $g(p, 0) = 0$  for alle  $g \in I(\tilde{V})$  når  $g$  er  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogen.

På samme måde har vi  $(p, 0) \in W \times \{0\}$  hvis og kun hvis  $h(p) = 0$  for alle  $h \in \{f_{min} : f \in V\}$ . Det ønskede er så vist hvis der findes et  $h \in I(C_0(V))$  for hvert  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogent  $g \in I(\tilde{V})$  så  $g(p, 0) = h(p)$ , og findes et  $g \in I(\tilde{V})$  for hvert  $h \in \{f_{min} : f \in V\}$  så  $g(p, 0) = h(p)$ :

Vælg et  $(y_1, \dots, y_n)$ -homogent  $g \in I(\tilde{V})$ . Så kan  $g$  skrives på formen  $g(p, q) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}(p)q^{\alpha}$ .  $g(p, 0) = g_0(p)$ . Vi definerer et  $f: f(q) = g(q, q) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}(q)q^{\alpha}$ . Fra lemma 4 ved vi at  $f \in I(V)$ , og da  $g_{\alpha}$ 'erne alle er af samme grad har vi at  $f_{min}(q) = g_{\alpha}(q) = g(q, 0)$

Vælg et  $h \in \{f_{min} : f \in V\}$ . Så findes der et  $f \in V$  så  $h = f_{min}$ . Vælg  $d$  til at være graden af  $h$ . Lad  $g$  være resten af  $ft^d$  ved division med  $tx_1 - y_1, \dots, tx_n - y_n$ . Se på divisionen af et enkelt led i  $f$ : Ved hvert skridt i divisionen falder graden af  $x$  og  $t$  med 1, og graden af  $y$  stiger med 1. Men  $x$  har grad enten højere eller lig  $d$ . Derfor vil divisions algoritmen give en rest der ikke indeholder  $t$ . Resten bliver den samme lige meget hvordan divisionen foretages, da  $tx_1 - y_1, \dots, tx_n - y_n$  er en Groebner basis for  $\langle tx_1 - y_1, \dots, tx_n - y_n \rangle$ . Vi har  $g(p, q) = t^d f(q) - a_1(tx_1 - y_1) - \dots - a_n(tx_n - y_n)$ , hvor  $a_i \in k[t, y_i, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n]$ . Vælg  $q \in V$ . Så er  $f(q) = 0$ . Vælg  $p = sq$ ,  $s \in k$ . Vælg  $t = \frac{1}{s}$  hvis  $s \neq 0$ , ellers vælg  $t = 0$ . Så er  $a_1(tx_1 - y_1) + \dots + a_n(tx_n - y_n) = 0$ . Vi har altså at  $g(sq, q) = 0$  for alle  $q \in V$  og  $s \in k$ . Så har vi fra sætning 3 at  $g \in I(\tilde{V})$ . Vælg  $t = 1$ :  $g(p, p) = f(p)$ . Vi har altså konstrueret et  $g \in I(\tilde{V})$  så  $g(p, p) = f(p)$  for alle  $p$ . Dermed er også  $g(p, 0) = f_{min}(p) = h(p)$  for alle  $p$ , og det ønskede er vist.

**Sætning 7** *Antag  $V = V(f_1, \dots, f_m)$ . Så er  $\tilde{V} = V(g_1, \dots, g_m)$ , hvor  $g_i$  er resten af  $t^{d_i} f_i$  ved division med  $tx_1 - y_1, \dots, tx_n - y_n$ . (Her er  $d_i$  graden af  $f_{i_{min}}$ ).*

Bevis: Vi har fra beviset af sætning 6 at  $g_i \in I(\tilde{V})$  så  $V(g_1, \dots, g_m) \supset \tilde{V}$ .  $g_i \in \Gamma$  så alle punkter i  $V(g_1, \dots, g_m)$  er på formen  $(sq, q)$  eller  $(p, 0)$ . Antag  $p \notin W$ ,  $(p, 0) \in V(g_1, \dots, g_m)$ : Så er  $f_{i_{min}}(p) = 0$ , for alle  $i$ . Dermed er  $p \in C_0(V)$ , hvilket er en modstrid. Antag  $(sq, q) \notin \tilde{V}$ ,  $(sq, q) \in V(g_1, \dots, g_m)$ : Så er  $f_i(q) = 0$  for alle  $i$ . Dermed er  $q \in V$  hvilket er en modstrid.

Vi har herved fundet en måde at bestemme genererende polynomier for  $\tilde{V}$  ud fra de genererende polynomier for  $V$ .