I denne opgave kommer vi til at skulle benytte nogle definitioner.

Definition 1. *En delmængde $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ er et ideal, hvis det opfylder at*

- $0 \in I$
- *Hvis $f, g \in I$, så $f + g \in I$.*
- *Hvis $f \in I$ og $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$, så er $hf \in I$*

Definition 2. *Lad k være et legeme, og lad $f_1, \ldots, f_s$ være polynomier i $k[x_1, \ldots, x_n]$ da er*

$$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in k^n \mid f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0 \ for \ 1 \leq i \leq s\}.$$

Vi kalder $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ den affine varietet givet ved $f_1, \ldots, f_s$.

Definition 3. *Lad $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ være et ideal. Så er radikalet af I, $\sqrt{I}$, givet ved mængden $\{f \mid f^m \in I \ for \ m \in \mathbb{Z}, m \geq 1\}$*

Idealet I er radikalt hvis og kun hvis $I = \sqrt{I}$.

Definition 4. *Et ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ er et primideal, hvis for alle $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ hvor der gælder $fg \in I$, da er enten $f \in I$ eller $g \in I$.*

Definition 5. *Lad $V \subset k^n$ være en affin varietet. En dekomposition af V er givet ved*

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$$

således at hver af V_i'erne er en irreducibel varietet, kaldes en minimal dekomposition hvis $V_i \not\subset V_j$ for $i \neq j$.

Vores projekt går ud på at finde følgende algoritmer: En algoritme til at bestemme om et givent ideal er et primideal, en algoritme til bestemme om en given affin varietet er irreducibel og endelig en algoritme til at finde den minimale dekomposition af en given affin varietet eller radikal ideal.

Algoritme 1.

Man kan finde en algoritme, der givet et ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ beregner om I er et primideal. Da det er en omfattende algoritme, henviser vi til artiklen "Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals"af P. Gianni, B. Trager og G. Zacharias i tidsskriftet "Computational Aspects of Commutative Algebra"fra 1988, New York.

Algoritme 2. *Lad $V \subset k^n$ være en affin varietet. Se på $\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(x) = 0 \; \forall x \in V\}$. Benyt algoritme 1 til at bestemme om $\mathbf{I}(V)$ er et primideal. Ifølge proposition 4.5.3 i "Ideals, Varieties, and Algorithms"gælder at V er irreducibel hvis og kun hvis $\mathbf{I}(V)$ er et primideal.*

Sætning 6. *Lad $V \subseteq k^n$ være en affin varietet. Da kan V skrives som en endelig forening*

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$$

hvor hver V_i er en irreducibel varietet.

Hvordan kan man finde dette endelige antal irreducible varieteter, hvis forening giver den affine varietet selv? Til det skal vi bruge at givet et ideal $I \in k[x_1, \ldots, x_n]$

$$V(I) = V_1 \cup \ldots \cup V_m$$

og at

$$V(\sqrt{I}) = V(I).$$

Nu har vi en sætning, Theorem 4.6.5, der fortæller at ethvert radikal ideal kan skrives som en endelig snitmængde af primidealer.

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \ldots \cap P_m \Rightarrow V_i = V(P_i)$$

Metode til finde denne snitmængde, kan findes i artiklen "On the Lasker-Noether decomposition theorem"i American Journal Mathematics af A. Seidenberg (1984), 106, side 611-638.

Algoritme 3.

Input: Et radikal ideal, $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$.
Output: Den minimale dekomposition af $V(I)$.

Lad der være givet et radikal ideal, I. *Find*

$$V(I) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I\}$$

Find dekompositionen af $V(I)$ *vha. Seidenbergs algoritme. Vi mangler nu bare at udtynde denne foreningsmængde til at blive den minimale dekomposition. Det kan gøres ved at udføre denne algoritme.*

Lad V *være givet*

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$$

$\alpha = 1$
FOR $i = \alpha \leq m$ *DO*
    IF $V_i \subseteq V_j$ *for* $i \neq j$ *og* $j = 1, \ldots, m$ *THEN*
    fjern V_i
    $\alpha = \alpha + 1$
    ELSE
    $\alpha = \alpha + 1$
RETURN V