

## Note 6

### Dementi

Jeg har åbenbart fået bildt jer noget værre vrøvl ind, som jeg hermed må trække i mig igen: Det er *ikke* rigtigt, at blot fordi en funktion er lige, er samtlige dens Fourierkoefficienter med et ulige nummer 0. Se fx den sidste afleveringsopgave, som der er en besvarelse af i denne note, eller Eksempel 8 på side 9 i Fourierrækkenoterne.

Hvad der derimod er rigtigt, er at integralet af en ulige funktion henover et symmetrisk interval omkring 0 er 0, og dette lille resultat kan sagtens værre nyttigt.

**Lemma 1.** *Lad  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  være en integrabel funktion defineret på et symmetrisk interval  $I$  omkring 0. Antag at  $g$  er ulige, altså at  $g(-x) = -g(x)$  for alle  $x \in I$ . For ethvert positivt tal  $a$  så  $[-a, a] \subseteq I$  gælder, at*

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0.$$

*Bevis.* Vi benytter simpelthen indskudsreglen for integraler, og laver substitutionen  $y = -x$  i det første integral:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a g(x) dx &= \int_{-a}^0 g(x) dx + \int_0^a g(x) dx \\ &= \int_a^0 -g(-x) dx + \int_0^a g(x) dx \\ &= \int_a^0 g(x) dx + \int_0^a g(x) dx, \end{aligned}$$

og denne sum er klart 0. □

Det er også rigtigt, at produktet af to ulige funktioner er lige, produktet af to lige funktioner er lige og produktet af en lige og en ulige funktion er ulige (bare se på  $f(-x)g(-x)$  og gennemgå de forskellige muligheder). Problemet er, at jeg havde fået mig selv, og jer, overbevist om at funktionerne  $e_n$  givet ved  $e_n(x) = e^{inx}$  er lige for  $n$  lige og ulige for  $n$  ulige, hvilket aldeles ikke er tilfældet.

Til gengæld kan man sige noget lidt andet, ganske uafhængigt af  $n$ : Vi har jo at  $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ , og derfor er *realdelen* af  $e_n$  en lige funktion, mens *imaginærdelen* af  $e_n$  er en ulige funktion. Da man kan integrere real- og imaginærdele hver for sig, får vi derfor følgende

**Lemma 2.** Lad  $f \in C_{st}$  være en stykkevist kontinuert funktion. Antag at  $f$  udelukkende antager reelle værdier. Så gælder, at hvis  $f$  er lige, er  $\operatorname{Im} c_n(f) = 0$  for alle  $n$ . Tilsvarende gælder, at hvis  $f$  er ulige er  $\operatorname{Re} c_n(f) = 0$  for alle  $n$ .

For en lige funktion er samtlige Fourierkoefficienter altså reelle, mens de for en ulige funktion er rent imaginære. Yderligere gælder for en lige funktion, at  $c_n = c_{-n}$ , og for en ulige funktion gælder at  $c_n = -c_{-n}$  for alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Beviset for disse påstande overlades til den ivrige eksamenslæsende.

## Afleveringsopgaver

**Aflevering 1** (Øvelse 2.5.7). Lad funktionen  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  være givet ved  $f(x) = \sqrt{x}$ . Brug Taylor-polynomiet for  $f$  udviklet omkring 100 til at finde en tilnærmet værdi for  $\sqrt{99}$ . Giv et overslag på nøjagtigheden.

*Besvarelse.* Det bemærkes at  $f$  er (vilkårligt ofte) differentiabel på intervallet  $(0, \infty)$ , således specielt i 100. De afledte er givet ved

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2}$$

og således er  $f(100) = 10$ ,  $f'(100) = \frac{1}{10}$  og  $f''(100) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{-1}{4000}$ .

Derfor er Taylorpolynomiet  $T_2^{100}f$  for  $f$  af grad 2 givet ved

$$T_2^{100}f(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{f^{(n)}(100)}{n!} (x-100)^n$$

$$= 10 + \frac{1}{10}(x-100) - \frac{1}{8000}(x-100)^2.$$

Vi finder derfor at en approksimation til  $\sqrt{99}$  er

$$T_2^{100}f(99) = 10 - \frac{1}{10} + \frac{1}{8000} = \frac{79201}{8000}.$$

Vi får en vurdering af nøjagtigheden af denne approksimation ved hjælp af Korollar 2.2.2, som fortæller at størrelsen af fejlen  $|f(99) - T_2^{100}f(99)|$  kan vurderes opad, såfremt vi kender et tal  $M$  så  $|f^{(3)}(x)| \leq M$  for alle  $x$  mellem 99 og 100. Idet

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$$

og  $f'''$  således er aftagende, finder vi at  $M = f'''(99) = \frac{3}{8}99^{-5/2} \approx 3.85 \cdot 10^{-6}$  dur. Korollaret fortæller nu at

$$|f(99) - T_2^{100}f(99)| \leq \frac{M}{3!}|99 - 100|^3 \approx 6.4 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

Fejlen er altså mindre end en milliontedel.

Hvis man ikke bryder sig om ovenstående, fordi man ikke kan beregne  $M$  uden en lommeregner, kan man i stedet bruge  $M = f'''(81)$ . Denne er jo eksakt

$$\frac{3}{8} \frac{1}{9^5} = \frac{1}{8 \cdot 3^9}$$

og ovenstående vurdering bliver derfor i stedet

$$|f(99) - T_2^{100}f(99)| \leq \frac{1}{2^4 \cdot 3^{10}} = \frac{1}{944784}$$

Som forventet er denne vurdering ikke helt så god som den første, da vi jo kunne have valgt et mindre  $M$ .  $\triangle$

### Aflevering 2 (Øvelse 2.5.17).

(a) Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \tag{1}$$

konvergerer for ethvert  $x \in \mathbb{R}$ .

(b) Vis at rækken konvergerer uniformt på  $\mathbb{R}$ . Gør rede for, at dens sumfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  givet ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

er kontinuert på  $\mathbb{R}$ .

(c) Vis at  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

*Besvarelse.* Idet det for ethvert  $x \in \mathbb{R}$  gælder, at  $x^2 \geq 0$  har vi at  $0 \leq \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ . Da rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

vides at være konvergent, følger af sammenligningskriteriet at også den givne række (1) er konvergent.

Faktisk følger endnu mere af det netop sagte. Thi hvis vi lader  $M_n = \frac{1}{n^2}$  har vi en summabel følge af tal, som majoriserer funktionerne  $x \mapsto \frac{1}{x^2+n^2}$  på  $\mathbb{R}$ , og så følger af Weierstraß'  $M$ -test (også kendt som majorantkriteriet og i dette kursus Sætning 2.5.1), at rækken (1) konvergerer uniformt og absolut på  $\mathbb{R}$ .

Da sumfunktionen  $f$  er den uniforme grænse for funktionsfølgen  $f_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fastsat ved

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^2 + n^2},$$

og hver af disse åbenlyst er kontinuerte, følger af Sætning 2.3.8 at funktionen  $f$  selv er kontinuert.

For ethvert  $x \in \mathbb{R}$  og ethvert  $N \in \mathbb{N}$  gælder at

$$0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^2 + n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

Idet  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  er konvergent, findes der for et givet  $\varepsilon > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$ , så halen  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon/2$ . Idet  $\frac{1}{x^2+n^2} \rightarrow 0$  for  $x \rightarrow \infty$  for ethvert  $n$ , kan vi finde et  $X \in \mathbb{R}$  således at der for ethvert  $x \geq X$  gælder, at

$$\frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{\varepsilon}{2N}$$

for alle  $n = 1, \dots, N$ . Men så følger af vurderingen (2) ovenfor, at for  $x \geq X$  er  $|f(x)| < \varepsilon$ , og derfor har vi at  $f(x) \rightarrow 0$  for  $x \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

**Aflering 3** (Opgave 3 fra Ugeseddel 3).

(a) *Vis, at potensrækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n \quad (3)$$

*har konvergensradius 1. Begrund, at rækken er divergent i ethvert punkt af konvergenscirkelens rand.*

(b) *Sæt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n$$

for  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| < 1$ . Find en potensrækkefremstilling af funktionen  $g: \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  givet ved  $g(z) = f(z) - zf(z)$ , og vis herved at

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Udregn  $f(z)$  for ethvert  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| < 1$ .

(c) Find summen af rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}. \quad (4)$$

Vis, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} i^n = \frac{4}{25} + i \frac{22}{25}, \quad (5)$$

og find summen af rækken

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{4p+1}{4^p}. \quad (6)$$

*Besvarelse.* Idet potensrækken (3) er på formen  $\sum a_n z^n$ , og koefficienterne  $a_n$  fra et vist trin er forskellige fra 0 (faktisk er det dem alle), betragter vi kvotienten  $\frac{2n+1}{2n+3}$  mellem de numeriske værdier to på hinanden følgende koefficienter. Idet denne åbenlyst har grænseværdien  $R = 1$  for  $n \rightarrow \infty$ , følger af Sætning 3.2.5 at dette er konvergensradius.

Antag  $|z| = 1$ . Absolutværdien af et led i (3) er så  $|(2n+1)z^n| = 2n+1$ . Heraf ses, at leddene  $(2n+1)z^n$  ikke går mod 0 for  $n \rightarrow \infty$ , og derfor kan rækken (3) ikke være konvergent for et  $z$  med norm 1.

Ved sædvanlige manipulationer får vi at

$$\begin{aligned}
 g(z) &= f(z) - zf(z) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n - z \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^{n+1} \quad (*) \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)z^n \quad (**) \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n \quad (@) \\
 &= 1 + \frac{2}{1-z} - 2 \\
 &= \frac{1+z}{1-z},
 \end{aligned}$$

hvor det ved (\*) er udnyttet, at konvergens ikke ændres ved at gange en konstant (i dette tilfælde  $z$ ) på ethvert led i rækken, ved (\*\*) er et enkelt led pillet fra den første sum (halen er jo stadig konvergent), og der er skiftet variabel i den anden. Ved (@) benyttes, at hvis to rækker vides at være konvergente, er rækken af ledvise differenser også konvergent, og endelig genkendes (det meste af) den geometriske række. Hvis man vil være pedantisk er (@) den ønskede potensrækkefremstilling af  $g$ , og hvis man vil være endnu mere pedantisk er potensrækkefremstillingen af  $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  hvor  $b_0 = 1$  og  $b_n = 2$  for  $n > 0$ . Fra dette lukkede udtryk for  $g$  finder man let

$$f(z) = \frac{1+z}{(1-z)^2} \quad (7)$$

for  $|z| < 1$ .

Rækken (4) er simpelthen  $f(\frac{1}{2})$ , og jf. det netop fundne udtryk er dette  $\frac{1 + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 6$ .

Tilsvarende er (5) simpelthen  $f(\frac{i}{2})$ , og dette udregnes til

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{2}i}{(1 - \frac{1}{2}i)^2} &= \frac{1 + \frac{1}{2}i}{\frac{3}{4} - i} \\ &= \frac{(1 + \frac{1}{2}i)(\frac{3}{4} + i)}{\frac{9}{16} + 1} \\ &= \frac{16}{25} \cdot (\frac{1}{4} + \frac{11}{8}i) \\ &= \frac{4}{25} + \frac{22}{25}i \end{aligned}$$

Fra Matematisk Analyse 1 ved vi, at en række af komplekse tal er konvergent, hvis og kun hvis rækkerne bestående af henholdsvis realdelene og imaginærdelene af leddene er konvergente (og i tilfælde af konvergens passer grænseværdierne sammen „som de skal“). Ser vi på rækken (5) har vi, at leddene er enten reelle (for  $n$  lige) eller rent imaginære (for  $n$  ulige). Vi har derfor at

$$\frac{4}{25} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ lige}}}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} i^n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2(2p)+1}{2^{2p}} i^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4p+1}{4^p} (-1)^p.$$

△

**Aflering 4** (Opgave 3 på Ugeseddel 4). *Betragt potensrækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} z^n. \quad (8)$$

(a) *Vis, at rækken har konvergensradius  $R = \infty$ .*

(b) *Idet vi lader  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  betegne potensrækkens sum, altså sætter*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} z^n$$

*skal man vise, at*

$$\int_0^x f(t) dt = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$$

*for ethvert  $x \in \mathbb{R}$ .*

(c) Idet vi definerer funktionen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ved

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$$

skal man vise, at

$$\int_0^x g(t) dt = xe^x$$

for ethvert  $x \in \mathbb{R}$ .

(d) Vis, at  $f(x) = x^2 + 3xe^x + e^x$  for alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Besvarelse. Idet samtlige koefficienter i (8) er forskellige fra 0, betragter vi kvotienten

$$\frac{(n+1)^2}{n!} / \frac{(n+2)^2}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^3}{(n+2)^2}$$

og da denne har grænseværdien  $\infty$  for  $n \rightarrow \infty$ , er dette konvergensradius for rækken (8).

Vi har nu (fra Sætning 3.2.8), at potensrækken som definerer  $f$  konvergerer uniformt mod  $f$  på enhver begrænset delmængde af  $\mathbb{C}$ , og dermed specielt for enhver begrænset delmængde af  $\mathbb{R}$ . Betragter vi en sådan, som omfatter intervallet mellem 0 og et givet  $x \in \mathbb{R}$  har vi, at vi kan integrere  $f$  ledvist jf. Sætning 3.2.15. Således er

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{n+1}{n!} t^{n+1} \right]_{t=0}^x \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Sætning 3.2.15 fortæller tillige, at den definerende potensrække for  $g$  har konvergensradius  $\infty$ , og med samme argument som ovenfor finder vi, at

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n!} t^{n+1} \right]_{t=0}^x \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= xe^x. \end{aligned}$$

Fra analysens fundamentalsætning og de to netop viste identiteter følger, at

$$g(x) = \frac{d}{dx} x e^x = e^x + x e^x$$

og

$$f(x) = \frac{d}{dx} (xg(x)) = \frac{d}{dx} (x e^x + x^2 e^x) = e^x + 3x e^x + x^2 e^x$$

△

**Aflering 5** (Opgave 3 fra Ugeseddel 5). *Betragt potensrækken*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}. \quad (9)$$

- (a) *Vis, at potensrækken (9) har konvergensradius  $R = 1$ .*  
 (b) *Vis at (9) konvergerer for ethvert  $z \in D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1\}$ , og at sumfunktionen  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$  defineret ved*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} \quad (10)$$

*er kontinuert.*

- (c) *Lad  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  være restriktionen af  $g$  til  $[-1, 1]$ . Vis, at  $f$  er differentiabel på det indre  $(-1, 1)$ , og at den afledte her er givet ved*

$$f'(x) = -\log(1-x).$$

- (d) *Vis, at*

$$f(x) = (1-x) \log(1-x) + x$$

*for  $x \in (-1, 1)$ .*

- (e) *Vis, at*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2 \log 2 - 1.$$

- (f) *Vis,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \quad (11)$$

*Besvarelse.* Idet vi observerer, at potensrækken (9) er på formen  $\sum a_n z^n$  med  $a_n = 1/n(n-1)$  for  $n \geq 2$  og  $a_0 = a_1 = 0$ , betragter vi kvotienten  $|a_n|/|a_{n+1}| = \frac{n+1}{n-1}$ . Idet denne har grænseværdien 1 for  $n \rightarrow \infty$ , følger af Sætning 3.2.5 at dette er konvergensradius for potensrækken (9).

For et vilkårligt  $z \in D$  og  $n \geq 2$  har vi vurderingen

$$\left| \frac{z^n}{(n-1)n} \right| = \frac{1}{(n-1)n} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Da rækken  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$  er konvergent, følger af Weierstraß'  $M$ -test, at rækken (9) konvergerer absolut og uniformt på  $D$ . Da hver afsnitssum definerer en kontinuert afbildning  $D \rightarrow \mathbb{C}$ , følger af Sætning 2.3.8 at grænsefunktionen  $g$  også er kontinuert på  $D$ .

Fra Sætning 3.2.12 følger direkte, at  $f$  er differentiabel på  $(-1, 1)$ , og tillige at den afledte er givet ved

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-t)^n}{n}$$

For  $t \in (-1, 1)$  tilhører  $-t$  det samme interval, og så følger fx af Øvelse 3.2.19(b) at

$$f'(t) = -\log(1-t).$$

Funktionen  $h: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  givet ved  $h(x) = (1-x)\log(1-x) + x$  er klart differentiabel, og den afledte er

$$h'(x) = -\log(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x} + x = -\log(1-x).$$

Da således  $f' = h'$  og vi desuden har at  $f(0) = h(0) = 0$ , må vi have at  $f(x) = h(x)$  på deres fælles definitionsmængde,  $(-1, 1)$ .

Da  $f$  er restriktionen af en kontinuert funktion er  $f$  selv kontinuert. Derfor er

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} &= f(-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x)\log(1-x) + x \\ &= 2\log 2 - 1. \end{aligned}$$

På lignende vis kan vi beregne summen af rækken i (11) som  $f(1)$ , men problemet er at det lukkede og kontinuerte udtryk for  $f$  på intervallet  $(-1, 1)$  ikke har mening for  $x = 1$ . Imidlertid gælder stadig at

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= f(1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \log(1-x) + x \\ &= 1, \end{aligned}$$

idet den lineære faktor  $1-x$  dominerer logaritmen, således at grænseværdien af det første led er 0.  $\triangle$

Før vi går i gang med den næste aflering er det på sin plads at indføre lidt notation: Man har sjældent brug for så store tal, som itereret anvendelse af faktultetsfunktionen producerer, og derfor har man valgt at lade to udråbstegn efter hinanden have en lidt anden betydning. For et naturligt tal  $n$  betyder  $n!!$  produktet af alle de positive naturlige tal  $\leq n$  der har samme paritet som  $n$ . Fx er  $8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$ , og  $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ . Vi har så fx generelt at  $n! = n!! \cdot (n-1)!!$ , og  $(2n)!! = 2^n n!$ . Bemærk, at da der ikke er nogle positive naturlige tal som er mindre end eller lig 0, er  $0!!$  såvel som  $0!$  det tomme produkt, der som bekendt er lig 1.

**Aflering 6** (Opgave A fra Ugeseddel 6).

(1) Vis, at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$

er konvergent for alle  $z \in \mathbb{C}$ .

(2) Lad  $f(x)$  betegne summen af rækken ovenfor for  $x \in \mathbb{R}$ . Vis, at  $f$  er en løsning til differentilligningen

$$\frac{dy}{dx} - 2yx = 1. \quad (12)$$

(3) Vis, at der gælder

$$f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

for  $x \in \mathbb{R}$ .

Besvarelse. Omskrivningen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!!} (x^2)^n$$

viser, at vi (bortset fra en faktor  $x$ ), kan betragte den givne række som en potensrække i  $x^2$ . Koefficienterne  $a_n$  er så åbenbart  $2^n/(2n+1)!!$  for  $n \geq 0$ , og ingen af disse er 0. Kvotienten

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2^n}{(2n+1)!!} \frac{(2n+3)!!}{2^{n+1}} = \frac{2n+3}{2}$$

har klart grænseværdien  $\infty$  for  $n \rightarrow \infty$ . Altså konvergerer den givne række for alle  $x \in \mathbb{C}$  med  $|x^2| < \infty$ , hvilket vil sige for alle  $x \in \mathbb{C}$ .

Sætning 3.2.12 fortæller, at  $f$  er differentiabel, og at den afledte er givet ved

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n-1)!!} x^{2n}.$$

Vi finder derfor at

$$\begin{aligned} f'(x) - 2xf(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n-1)!!} x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n-1)!!} x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n-1)!!} x^{2n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Funktionen  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved

$$h(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

er differentiabel med afledt

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} e^{-x^2} \\ &= 2xh(x) + 1 \end{aligned}$$

som kan omskrives til  $h'(x) - 2xh(x) = 1$ . Altså er  $h$  en løsning til differentialligningen (12). Vi har desuden at  $f(0) = h(0) = 0$ . Jævnfør Sætning 5.2.5 og de foregående sider følger så at  $f = h$ .  $\triangle$

**Aflevering 7** (Opgave 20 i Fourierrækkenoterne). Bestem Fourierrækken for den  $2\pi$ -periodiske funktion  $f \in \mathcal{C}_{st}$ , der er givet ved

$$f(t) = t^2$$

for  $t \in (-\pi, \pi)$ .

Er rækken uniformt konvergent? I bekræftende fald mod hvad? Kan du besvare spørgsmålene uden at have regnet rækken ud?

Bestem summen af rækkerne

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} \quad \text{og} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}. \quad (13)$$

*Besvarelse.* Vi bemærker først, at normaliseringsbetingelsen på  $f$  giver at  $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2$ . Heraf ses, at  $f$  faktisk er kontinuert, og stykkevist kontinuert differentiabel.

Fourierkoefficienterne, for  $n \neq 0$ , beregnes således:

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int} dt \\ &= \left[ \frac{i}{n} t^2 e^{-int} \right]_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{2i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt \\ &= -\frac{2i}{n} \left( \left[ \frac{i}{n} t e^{-int} \right]_{t=-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \right) \\ &= -\frac{2i}{n} \left( (-1)^n \frac{\pi i}{n} + (-1)^n \frac{\pi i}{n} \right) \\ &= (-1)^n \frac{4\pi}{n^2} \end{aligned}$$

og for  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} 2\pi c_0(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &= \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Altså er

$$c_n(f) = \begin{cases} (-1)^n \frac{2}{n^2} & \text{for } n \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{3} & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

og Fourierrækken er derfor

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2} e^{int}.$$

Normen af et led i summen er  $\frac{2}{n^2}$ , og Weierstraß'  $M$ -test fortæller så, at Fourierrækken konvergerer uniformt. Grænsefunktionen er  $f$ , da  $f \in \mathcal{C}_{st}$ .

Som nævnt i begyndelsen er  $f$  kontinuert og stykkevist kontinuert differentiabel. Altså opfylder  $f$  netop betingelserne i Hovedsætning 1 på side 25, og vi kunne derfor på forhånd vide, at Fourierrækken for  $f$  konvergerer uniformt på  $\mathbb{R}$  mod  $f$ .

Vi har derfor at

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

og heraf får vi

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

Vi har at

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{5} t^5 \right]_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{5},$$

og Parsevals identitet, Sætning 5 på side 40, fortæller så at

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{5} &= \frac{\pi^4}{9} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{4}{n^4} \\ &= \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4} \end{aligned}$$

hvoraf fås at

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

△

Som sædvanlig er rettelser, spørgsmål og kommentarer af enhver art velkomne.

*Rasmus Villemoes*