Note 5

Traditionen tro har jeg her efter kvarterets afslutning besluttet mig for at lave en besvarelse af det forløbne kvarters afleveringsopgaver. Mit formål med disse besvarelser er ikke at vise „den eneste rigtige måde“ at løse opgaven på (for som oftest findes der ikke en sådan), men derimod blot at give eksempler på hvordan man kan gribe en opgave an. I samme ånd har jeg forsynet besvarelserne med flere kommentarer end der egentlig er nødvendig i en aflevering, fordi jeg gerne vil gøre opmærksom på, *hvorfor* man bør få lige præcis den ide, eller hvorfor vi bør kigge nærmere på dette udtryk.

Afleveringsopgaver

Aflevering 8 (Afstand fra punkt til mængde)**.** *Lad $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ være en ikke tom delmængde af $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Bevis, at hvis $x \in \mathbb{R}^n$, så har mængden*

$$A_x = \{\|x-y\| \mid y \in Y\}$$

et infimum således, at fastsættelsen

$$f(x) = \inf A_x$$

definerer en funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(b) *Vis, at hvis $x \in Y$, så er $f(x) = 0$.*

(c) *Bevis, at*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|$$

for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

(d) *Slut af (c), at f er uniformt kontinuert på $\mathbb{R}^n$.*

(e) *Vis, at hvis Y er lukket og $x \notin Y$, så er $f(x) > 0$.*

(f) *Vis, at hvis Y er lukket, så er*

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}. \qquad (1)$$

Løsningsforslag. **(a)** Idet mængden Y ikke er tom, findes der et element $y_0 \in Y$. Derfor findes der også et element i mængden A_x, nemlig det reelle tal $\|x-y_0\|$. Da mængden er nedad begrænset (idet ethvert element i mængden er større end eller lig 0), har vi jf. Sætning 3.13 (infimum-egenskaben) at A_x har et infimum. **(b)** For ethvert $x \in \mathbb{R}^n$ gælder, at 0 er en nedre grænse for A_x. Hvis $x \in Y$ har vi, at $\|x - x\| = 0 \in A_x$, så 0 er den største (mulige) nedre grænse. Altså er $f(x) = \inf A_x = 0$ for $x \in Y$. **(c)** Idet $f(x_2) = \inf A_{x_2}$, har vi for ethvert $y \in Y$ at $f(x_2) \leq \|x_2 - y\|$. Jf. den sædvanlige trekantsulighed gælder så, stadig for ethvert $y \in Y$, at $f(x_2) \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - y\|$. Men så er tallet $f(x_2) - \|x_2 - x_1\|$ mindre end eller lig ethvert af tallene $\|x_1 - y\|$, altså mindre end eller lig ethvert af tallene i mængden A_{x_1}. Med andre ord er $f(x_2) - \|x_2 - x_1\|$ en nedre grænse for A_{x_1}, og derfor er $f(x_2) - \|x_2 - x_1\| \leq \inf A_{x_1} = f(x_1)$. Flytter vi lidt rundt ser vi at

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \|x_2 - x_1\|.$$

Det samme argument, hvor x_1 og x_2 bytter roller, viser at $f(x_1) - f(x_2) \leq \|x_2 - x_1\|$, så vi har faktisk at

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \|x_2 - x_1\|.$$

(d) Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis vi sætter $\delta = \varepsilon$, har vi for ethvert par af punkter $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ at hvis $\|x_1 - x_2\| < \delta$, så er $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\| < \delta = \varepsilon$ jf. **(c)**, og derfor er Definition 6.29 opfyldt for dette δ. **(e)** Antag Y er lukket, og lad $x \in \mathbb{R}^n - Y$. Idet Y er lukket, er pr. definition komplementet $\mathbb{R}^n - Y$ åben, og da vi står med et punkt herfra, ledes man naturligt til at benytte definitionen af en åben mængde. Vi vælger derfor et $r > 0$ så $B_r(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < r\} \subseteq \mathbb{R}^n - Y$. Så gælder åbenlyst for ethvert $y \in Y$ at $\|x - y\| \geq r$ (ellers ville $y \in B_r(x)$), og derfor gælder også at $f(x) = \inf A_x \geq r > 0$. **(f)** Vi har fra **(b)** at hvis $x \in Y$, så er $f(x) = 0$. Antag omvendt at $x \in \mathbb{R}^n$ opfylder at $f(x) = 0$. Så må $x \in Y$, for ellers ville det stride mod **(e)**.

Bemærk at det omvendte resultat i (f) også gælder, nemlig at hvis en mængde Y er lig med den mængde af punkter i $\mathbb{R}^n$ hvis afstand til Y er 0, så er Y lukket. Prøv selv at gennemføre argumentet for denne påstand, eller snyd ved at finde læsebrillerne frem og udfyld hullerne i nedenstående kortfattede argument:

Lad $x \in \mathbb{R}^n - Y$. Så må $f(x) > 0$, hvilket giver $B_{f(x)}(x) \subseteq \mathbb{R}^n - Y$ (Hvorfor?). Derfor er $\mathbb{R}^n - Y$ åben, hvilket vil sige Y er lukket. $\triangle$

Aflevering 9. *Lad* $a \in \mathbb{R}_+$. *Vis, at funktionen* $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *givet ved* $f(x) = x^a e^{-x}$ *har såvel en største- som en mindsteværdi, og bestem dem.*

Løsningsforslag. Indledningsvis bemærker vi, at $f(x) > 0$ for alle $x > 0$, og $f(0) = 0$. Derfor er 0 et globalt minimumspunkt for f, og minimumsværdien er 0.

Det ses klart at f er differentiabel på det indre $(0, \infty)$ af sin definitionsmængde, og et eventuelt globalt maksimumspunkt skal findes blandt disse punkter jf. ovenstående. Altså skal et globalt maksimum for f søges blandt de kritiske punkter for f. Den afledte funktion $f'\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f'(x) = ax^{a-1}e^{-x} - x^a e^{-x} = x^{a-1}e^{-x}(a-x), \tag{2}$$

og det eneste nulpunkt for denne er a, idet de to første faktorer altid er positive.

At a faktisk er et globalt maksimumspunkt kan vises på flere måder. Den enkleste er nok at se på fortegnene for f'. Disse er lette at finde pga. den enkle formel (2), og vi ser straks at $f'(x) > 0$ for $0 < x < a$ og $f'(x) < 0$ for $x > a$. Derfor følger af Korollar 7.16 at a er et strengt globalt maksimumspunkt. Man kan også differentiere f endnu engang og påberåbe sig Korollar 7.18. Under alle omstændigheder er maksimumsværdien $f(a) = a^a e^{-a}$. △

Aflevering 10. *Lad $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ være et lukket rektangel, og lad $f\colon R \to \mathbb{R}$ være en kontinuert reel funktion på R, og lad funktionen $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ være defineret ved*

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

for $y \in [c,d]$. Bevis, at g er kontinuert.

Løsningsforslag. Idet f er kontinuert, har vi at for ethvert $y \in Y$ er funktionen $f(-,y)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ også kontinuert, og derfor integrabel over $[a,b]$. Derfor er g veldefineret. Vi bemærker, at da domænet for f er lukket og begrænset, er f faktisk uniformt kontinuert.

Lad os analysere opgaven: Vi skal vise at g er kontinuert, hvilket som bekendt vil sige kontinuert i ethvert punkt af domænet. Lad derfor $y_0 \in [c,d]$. Vi minder om, at g siges at være kontinuert i dette punkt hvis betingelsen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in [c,d] : |y - y_0| < \delta \implies |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

Opgaven er med andre ord at gøre størrelsen $|g(y) - g(y_0)|$ „lille“ hvis blot afstanden mellem y og y_0 er passende lille. Derfor er det en god ide at starte med at se på denne størrelse:

$$\begin{aligned} |g(y) - g(y_0)| &= \Big| \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx \Big| \\ &= \Big| \int_a^b f(x,y) - f(x,y_0) \Big| \\ &\leq \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|dx, \end{aligned}$$

hvor jeg i de sidste linjer har benyttet Sætning 8.10. Man skal nu få den ide, at et integral af en ikke-negativ funktion er „lille", hvis blot integranden er lille. Idet integranden heldigt nok er en forskel på f-værdier i to „nærliggende" punkter, nemlig (x, y) og (x, y_0), er der en god chance for at den uniforme kontinuitet af f redder dagen.

Lad altså $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan, fordi f er uniformt kontinuert, vælge et $\delta > 0$ med den egenskab, at hvis $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$, så er $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Påstanden er at dette δ „virker". Lad derfor $y \in [c, d]$, og antag at $|y - y_0| < \delta$. Så har vi for ethvert $x \in [a, b]$ at $\|(x, y) - (x, y_0)\| = |y - y_0| < \delta$, og derfor gælder altså pr. valg af δ for ethvert $x \in [a, b]$ at $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Men så er

$$\int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \leq \int_a^b \tfrac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

hvilket viser at g er kontinuert i y_0. Da dette punkt var vilkårligt, er g kontinuert. $\triangle$

Aflevering 11. (a) *Vis, at*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^{2i} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ *og for alle* $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Slut af (a), at der for alle* $n \in \mathbb{N}$ *gælder*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = s_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx,$$

hvor

$$s_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{1}{2i+1}.$$

(c) *Vis, at der for alle* $n \in \mathbb{N}$ *gælder*

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}.$$

(d) *Bevis, at der for alle* $n \in \mathbb{N}$ *gælder*

$$\left|\frac{\pi}{4} - s_n\right| \leq \frac{1}{2n+1},$$

og slut heraf at

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Løsningsforslag. **(a)** En formel jeg ved flere lejligheder har reklameret for er

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b^i.$$

Benytter vi denne formel for $a = 1$ og $b = -x^2$ får man straks at

$$\frac{1 - (-1)^n x^{2n}}{1 + x^2} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^{2i},$$

hvoraf det ønskede følger. **(b)** Idet sum og integration uden videre kan ombyttes, får vi at

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^{2i} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \int_0^1 x^{2i} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [\tfrac{1}{2i+1} x^{2i+1}]_{x=0}^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2i+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \\
&= s_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx
\end{aligned}$$

(c) Vi har for ethvert $x \in [0, 1]$ at $0 \le \frac{x^{2n}}{1+x^2} \le x^{2n}$, og derfor er

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \le \int_0^1 x^{2n} dx = [\tfrac{1}{2n+1} x^{2n+1}]_{x=0}^1 = \frac{1}{2n+1}.$$

Idet en stamfunktion til $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ er arctan, er

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{x=0}^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

og derfor

$$\Big|\frac{\pi}{4} - s_n\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - s_n\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\Big| \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Heraf følger klart at $s_n \to \frac{\pi}{4}$ for $n \to \infty$, hvilket præcis vil sige at rækken

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}$$

er konvergent med sum $\frac{\pi}{4}$. $\triangle$

Aflevering 12. *Lad* $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$*, og lad* $f\colon B_1(0) \to \mathbb{R}$ *være en funktion med den egenskab, at de partielt afledte af* f *eksisterer i alle punkter i* $B_1(0)$*. Vis, at* f *er konstant, hvis og kun hvis* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ *for alle* $(x,y) \in B_1(0)$*.*

Løsningsforslag. Antag f er konstant. Så er det klart at de partielt afledte af f er 0 overalt.

Antag omvendt, at de partielt afledte er identisk 0. Lad $x_0 \in (-1,1)$ og betragt funktionen $g\colon I_{x_0} \to \mathbb{R}$ givet ved $g(y) = f(x_0,y)$, hvor I_{x_0} er intervallet $\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0,y) \in B_1(0)\}$. Det er klart at g er differentiabel med differentialkvotient 0, idet $\frac{dg}{dy}(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = 0$, og derfor følger fra Sætning 7.13 at g er konstant; lad os sige $g(y) = f(x_0,y) = c_{x_0}$ for alle $y \in I_{x_0}$. På samme måde indses, at for fastholdt y_0 er $f(x,y_0) = c_{y_0}$ for alle x i et passende interval. Men så har vi for ethvert punkt $(x,y) \in B_1(0)$ at $f(x,y) = f(x,0) = f(0,0)$, hvor det første lighedstegn følger af at f er uafhængig af andenkoordinaten, og det andet lighedstegn følger af at f er uafhængig af førstekoordinaten. Altså er f konstant. $\triangle$

Aflevering 13. *Lad funktionen* $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ *være givet ved*

$$f(x) = x^2 e^{1/x}.$$

(a) *Find eventuelle lokale maksima og minima for* f*.*
(b) *Skitser grafen for* f*.*
(c) *Find eventuelle globale maksima og minima for* f*.*
(d) *Findes der et tal* a *således, at funktionen* g *defineret ved*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0, \\ a & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuert på hele $\mathbb{R}$*? Begrund dit svar.*

(e) *Undersøg, om de uegentlige integraler*

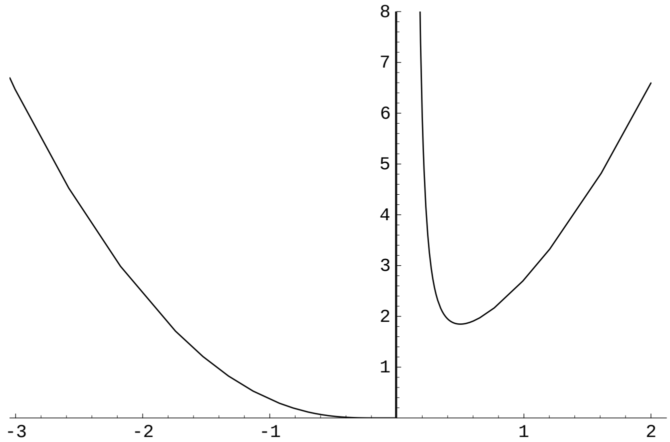
$$\int_{-1}^{0} f(x)dx \qquad \text{og} \qquad \int_{0}^{1} f(x)dx$$

er konvergente.

Løsningsforslag. **(a)** Da f er defineret på en åben mængde og er overalt differentiabel, findes eventuelle lokale ekstrema blandt de kritiske punkter for f. Den afledte funktion $f'\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f'(x) = 2xe^{1/x} + x^2 e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} = e^{1/x}(2x - 1).$$

Heraf ses, at det eneste nulpunkt for f' er $x = \frac{1}{2}$. Man ser også, at for $0 < x < \frac{1}{2}$ er $f'(x) < 0$ og for $x > \frac{1}{2}$ er $f'(x) > 0$. Derfor følger af Korollar 7.16, at $\frac{1}{2}$ er strengt lokalt minimumspunkt for f (faktisk strengt globalt minimumspunkt for funktionen $f|_{(0,\infty)}$). **(b)** En del af grafen for f er skitseret nedenfor:



(c) Det eneste potentielle globale ekstremumspunkt er det lokale minimum $\frac{1}{2}$. Men idet $e^{1/x} \to 0$ for $x \to 0^-$ og dermed $f(x) \to 0$ for $x \to 0^-$, og $f(\frac{1}{2}) > 0$, er $\frac{1}{2}$ ikke et globalt minimumspunkt. **(d)** Som nævnt har vi at $f(x) \to 0$ for $x \to 0^-$. Hvis g skal være kontinuert, tvinger det os derfor til at vælge $a = 0$. Men for $x \to 0^+$ har vi at $1/x \to +\infty$, og derfor vil

$$f(x) = x^2 e^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{(1/x)^2}$$

gå mod ∞. Derfor vil g, uanset valget af a, ikke kunne være højrekontinuert i 0.

Bemærk, at hvis man sætter $a = 0$ er g kontinuert på $(-\infty, 0]$ *og* på $(0, \infty)$, men dette er altså ikke tilstrækkeligt til at konkludere at g er kontinuert på $\mathbb{R}$. **(e)** Jf. en passende modificeret version af Lemma 1 på Note 4 eksisterer det uegentlige integral $\int_{-1}^{0} f(x)dx$, idet det væsentlige blot er at integranden har en endelig grænseværdi for $x \to 0^-$. Det „implicitte hint“-princip fortæller nu, at det andet uegentlige integral formentlig er divergent (med dette mener jeg, at hvis man ikke har et mere, fagligt begrundet, kvalificeret bud, kan man jo starte med at prøve at bevise dette. Hvis man ikke kommer igennem med et sådant bevis, kan det jo være fordi integralet faktisk er konvergent). For alle $t \geq 0$ har vi, jf. potensrækkefremstillingen af eksponentialfunktionen, at $e^t \geq 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$. Derfor får vi for alle $x > 0$ at $f(x) > x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6x}$. Men så gælder jo for ethvert $0 < c < 1$ at

$$\int_c^1 f(x)dx \geq \int_c^1 x^2 + x + \tfrac{1}{2}dx + \int_c^1 \frac{1}{6x}dx$$

og heraf ses let at $\int_c^1 f(x)dx \to \infty$ for $c \to 0^+$. Altså er $\int_0^1 f(x)dx$ divergent.
$\triangle$

Som sædvanlig er rettelser, spørgsmål og kommentarer af enhver art velkomne.

Rasmus Villemoes