Note 4

Her kommer en note om løst og fast, som vi har snakket om i det forløbne kvarter. Desuden præsenteres en eksperimental metode til bestemmelse af π, som man kan gennemføre hjemme på køkkengulvet.

Spørgetime

Der er spørgetime **fredag den 24. marts** kl. 10–∞. Festlighederne foregår i Koll. H2.28. Jeg modtager meget gerne spørgsmål på forhånd, så jeg har en chance for at give et nogenlunde velforberedt svar. Send en mail til `burner@imf.au.dk`. Spørgsmål af enhver slags er selvfølgelig også velkomne på dagen.

En stamfunktion

For et reelt tal a betragter vi funktionen $f_a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ givet ved $f_a(x) = x^a$. Det er velkendt, at for $a \neq -1$ er en stamfunktion $F_a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ til f_a givet ved

$$F_a(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1}. \tag{1}$$

For $a = -1$ har vi den velkendte stamfunktion $F_{-1} = \log$. Man kan undre sig over denne tilsyneladende "diskontinuitet" ved operationen "at tage stamfunktion". Funktionen f_a er trods alt både kontinuert og differentiabel som funktion af både x og a, og det samme gør sig gældende for forskriften (1) ovenfor. Men for $a = -1$ har udtrykket (1) ingen mening.

Imidlertid er det let at råde bod på, thi en stamfunktion er jo som bekendt ikke entydigt bestemt. Vi vil gerne definere en familie G_a af stamfunktioner til f_a, som virker for alle a inklusive $a = -1$, og som i passende forstand afhænger kontinuert af parameteren a. Vi definerer

$$G_a(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{x^{a+1} - 1}{a+1} \tag{2}$$

for $a \neq -1$. Da G_a kun afviger fra F_a med en konstant, er den tydeligvis en stamfunktion til f_a. Vi definerer desuden $G_{-1} = \log$.

Hvorfor er situationen nu anderledes end med F'erne? Sagen er, at for fastholdt x vil $G_a(x)$ konvergere mod $\log x$ for $a \to -1$. Tricket er nemlig, at vi har sørget for at (2) er et "0/0-udtryk" for fastholdt x og $a \to -1$. Grænseværdien finder vi vha. l'Hôpitals regel:

$$x^{a+1} - 1 = e^{(a+1)\log x} - 1 \tag{3}$$

så den afledte af tælleren med hensyn til a er $\log x \cdot e^{(a+1)\log x}$, mens nævneren blot bliver et 1-tal. Heraf konkluderer vi at

$$\lim_{a \to -1} \frac{x^{a+1} - 1}{a+1} = \log x = G_{-1}(x). \tag{4}$$

Flere stamfunktioner

Til TØ er vi stødt på problemet at finde en stamfunktion til en funktion på formen $x \mapsto p(x)e^{kx}$, hvor p er en polynomiumsfunktion. Vi har set hvordan dette i konkrete tilfælde kan lade sig gøre ved blot at anvende partiel integration n gange, hvor n er graden af p. Et alternativ var at lave et kvalificeret gæt; måske findes der en stamfunktion af formen $P(x)e^{kx}$, og ud fra betingelsen $\frac{d}{dx}P(x)e^{kx} = p(x)e^{kx}$ giver dette tilstrækkelig information til faktisk at bestemme koefficienterne i P.

Man kunne derfor forestille sig, at man kunne lave denne algoritme om til en lukket formel for en stamfunktion til sådanne funktioner en gang for alle. Lad os se hvad der sker: Lad $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, hvor $a_n \neq 0$. Antag desuden at $k \neq 0$ (ellers er $e^{kx} = 1$, og vi skal derfor blot integrere p, hvilket vi ved alt om hvordan man gør). Vi gætter på at vi kan vælge polynomiet P til at have samme grad som p, og sætter derfor $P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Opgaven er at bestemme koefficienterne b_i ud fra a_i og k. Hvis $P(x)e^{kx}$ er en stamfunktion, må vi have at

$$\begin{aligned}(nb_n x^{n-1} + \cdots + 2b_2 x + b_1)e^{kx} + k(b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)e^{kx}& \\ = (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)e^{kx}&.\end{aligned} \tag{5}$$

Hvis vi samler koefficienterne til x^i på venstresiden, og i øvrigt husker at $e^{kx} \neq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, finder vi følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} kb_n &= a_n \\ nb_n + kb_{n-1} &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ 2b_2 + kb_1 &= a_1 \\ b_1 + kb_0 &= a_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Med andre ord har vi ligningen $kb_n = a_n$ og de n ligninger $(i+1)b_{i+1} + kb_i = a_i$ for $i = 0, \ldots, n-1$. I alt udgør dette $n+1$ lineære ligninger i de ubekendte b_i. I en konkret situation er det formentlig lettest at løse disse ved at finde $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ i den rækkefølge. Men for at finde en generel løsningsformel skal vi have noget lineær algebra på banen. Ligningssystemet (6) kan skrives på matrixform som

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

hvor altså $(n+1)\times(n+1)$-koefficientmatricen A består af k'er på diagonalen, og tallene $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ umiddelbart under diagonalen, og 0 i de resterende indgange. Idet determinanten af denne matrix er k^{n+1}, og $k \neq 0$ (det er jo en nedre triangulær matrix, og determinanten af en sådan er blot produktet af diagonalindgangene), konkluderer vi umiddelbart at ligningssystemet har en (entydig) løsning.

Tilbage er altså "blot" at finde den inverse matrix til A. Jeg vil ikke trætte jer med mellemregningerne, thi resultatet er så uskønt at regningerne der fører dertil kun kan være endnu grimmere. I stedet postuleres resultatet nedenfor. Vi har brug for at indføre følgende særlige notation: For naturlige tal m og a betegner m_a produktet $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-a+1) = m!/(m-a)!$ hvis $1 \leq a \leq m$. Tallet a angiver altså antallet af faktorer som skal medtages.

$$\begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -nk^{-2} & k^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n_2k^{-3} & -(n-1)k^{-2} & k^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -n_3k^{-4} & (n-1)_2k^{-3} & -(n-2)k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \pm n!k^{-(n+1)} & \pm(n-1)!k^{-n} & \pm(n-2)!k^{-(n-1)} & \cdots & -k^{-2} & k^{-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Fortegnene i den nederste række er naturligvis ikke arbitrære. Systemet i ovenstående virvar er, at den ij'te indgang i ovenstående matrix (hvor indgangen øverst til venstre har nummer $1, 1$) er

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{for } i < j \\ k^{-1} & \text{for } i = j \\ (-1)^{i+j}(n+1-j)_{i-j}k^{j-i-1} & \text{for } i > j. \end{cases} \tag{9}$$

Bemærk, at hvis vi indfører konventionerne $m_0 = 1$ og $m_a = 0$ for $a < 0$ kan den nederste linje bruges som forskrift for samtlige indgange.

Idet $\mathbf{a}$ betegner søjlevektoren $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ og tilsvarende $\mathbf{b}$ søjlevektoren $(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0)$ har vi som bekendt at løsningen til ligningssystemet er $\mathbf{b} = A^{-1}\mathbf{a}$. For at omsætte dette til en formel for b_r, $r = 0, \ldots, n$, skal vi holde tungen lige i munden: Tallet b_r er den $(n+1-r)$'te koordinat i vektoren $\mathbf{b}$. Denne koordinat fremkommer som det indre produkt mellem den $(n+1-r)$'te række i A^{-1} og søjlevektoren $\mathbf{a}$. Det giver formlen

$$b_r = \sum_{s=1}^{n+1} c_{n+1-r,s} a_{n+1-s}$$

idet den s'te koordinat i $\mathbf{a}$-vektoren jo er a_{n+1-s}. Denne formel kan vi gøre en smule pænere, idet "mange" af c_{ij}'erne jo er 0, nemlig præcis dem hvor $j > i$. Ergo kan ovenstående sum stoppe allerede ved $n+1-r$, og vi finder derfor den lukkede formel

$$b_r = \sum_{s=1}^{n+1-r} (-1)^{n+1-r+s} (n+1-s)_{n+1-r-s} k^{s+r-n-2} a_{n+1-s}$$

for b_r. Hvis man glor lidt på dette udtryk finder man, idet $(-1)^{n+1-r+s} = (-1)^{n+1-r-s}$, at summationsvariablen s kun optræder sammen med $n+1$. Et simpelt skift af summationsvariabel, $t = n+1-s$, giver den lidt pænere formel

$$b_r = \sum_{t=r}^{n} (-1)^{t-r} t_{t-r} k^{r-t-1} a_t = \frac{1}{r!} \sum_{t=r}^{n} (-1)^{t-r} t! k^{r-t-1} a_t \tag{10}$$

Nu må det være på sin plads at prøve denne formel af på et (velkendt) eksempel. Opgave 326 blev regnet til TØ, hvor opgaven var at finde $\int (x-1)^3 e^{-x} dx$. Integranden ekspanderer vi til $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)e^{-x}$, og i notationen som er anvendt i dette afsnit har vi altså $n = 3$, $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = 3$, $a_0 = -1$ og $k = -1$. Indsætter vi disse data i formlen (10) ovenfor for $r = 3, 2, 1, 0$ finder vi at

$$\begin{aligned}
b_3 &= (-1)^{3-3} 3_{3-3} (-1)^{3-3-1} \cdot 1 = -1 \\
b_2 &= (-1)^{2-2} 2_{2-2} (-1)^{2-2-1} \cdot (-3) + (-1)^{3-2} 3_{3-2} (-1)^{2-3-1} \cdot 1 = 3 - 3 = 0 \\
b_1 &= -3 + 6 - 6 = -3 \\
b_0 &= 1 - 3 + 6 - 6 = -2.
\end{aligned}$$

Hvis man regner efter finder man ganske rigtigt at $x \mapsto (-x^3 - 3x - 2)e^{-x}$ er en stamfunktion.

Mere om integraler

En del TØ-opgaver har handlet om at vise at et uegentligt integral findes ("er konvergent" i bogens sprogbrug). Et sådant kunne være

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

Det der i dette tilfælde gør integralet "uegentligt" er at integranden ikke er defineret i et af randpunkterne af intervallet (i dette tilfælde 0). Et andet eksempel er

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

hvor uegentligheden består i, at der ikke integreres over et begrænset interval.

For at vise at et sådant uegentligt integral findes kan man i almindelighed prøve to ting. Den første består i at finde et lukket udtryk i a og b for integralet over et vilkårligt interval $[a, b]$ hvorpå funktionen er veldefineret, og så se om man kan vise at dette udtryk opfører sig pænt når a og/eller b nærmer sig det problematiske punkt. Dette går godt i det andet tilfælde ovenfor, fordi vi har en stamfunktion til $\frac{1}{x^2}$, så for et hvilket som helst positivt tal M gælder at

$$\int_1^M \frac{1}{x^2} dx = [-\tfrac{1}{x}]_{x=1}^M = 1 - \frac{1}{M}$$

og det er jo let at se at dette går mod 1 når M går mod ∞.

Det første tilfælde ovenfor er ikke lige så let at behandle, idet vi ikke kender nogen stamfunktion til $\frac{\sin x}{x}$. Imidlertid er der et trick man ofte kan benytte sig af, når det problematiske punkt *ikke* er $\pm\infty$. Vi kan nemlig definere en funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Det er velkendt, at denne funktion faktisk er overalt kontinuert, og derfor integrabel over et vilkårligt begrænset interval. Funktionen

$$G\colon c \mapsto \int_c^\pi g(x) dx$$

er så veldefineret for et hvilket som helst $c \in \mathbb{R}$, og af analysens fundamentalsætning følger at den faktisk er differentiabel, og dermed specielt kontinuert. For et hvilket som helst positivt tal c er $G(c) = \int_c^\pi \frac{\sin x}{x} dx$, fordi forskriften for g på intervallet mellem c og π jo netop er $\frac{\sin x}{x}$. Men da G er kontinuert, respekterer den specielt grænseovergang fra højre, så vi ser at

$$\int_0^\pi g(x) = G(0) = \lim_{c \to 0^+} G(c) = \lim_{c \to 0^+} \int_c^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

og da denne grænseværdi åbenbart findes (og er lig det ukendte tal $G(0)$) har vi jo pr. definition af det uegentlige integral $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ findes.

Hvad vi essentielt har vist er følgende lille lemma.

Lemma 1. *Lad $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Antag at grænseværdien $\lim_{x \to a^+} f(x)$ findes. Så findes det uegentlige integral $\int_a^b f(x) dx$.*

Den nødvendige modifikation af ovenstående eksempel er at definere funktionen $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ved $g(x) = f(x)$ for $a < x \leq b$ og $g(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$. Så er g pr. konstruktion kontinuert på $[a, b]$, og for ethvert $c \in [a, b]$ findes integralet $\int_c^b g(x) dx$ derfor. Desuden er

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b g(x) dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

Man kan naturligvis formulere et helt tilsvarende resultat hvis b er det problematiske punkt.

Det er imidlertid ikke rigtigt, at blot fordi grænseværdien $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ikke findes, at man så ikke kan give mening til $\int_a^b f(x) dx$. For eksempel kan funktionen $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/2}$ ikke udvides kontinuert til 0, men ikke desto mindre findes integralet $\int_0^1 f(x) dx$ (og er i øvrigt lig 2), fordi f har stamfunktionen $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

For at afvise eksistens af et uegentligt integral skal man derfor finde på noget andet. Man kan, hvis man er heldig, finde det nok- og føromtalte lukkede udtryk for integralet over et interval $[c, b]$ og se hvad der sker for c gående mod a^+. Dette kan imidlertid ikke altid lade sig gøre (ofte fordi det er svært at finde en stamfunktion). Det man i stedet kan gøre er at vurdere integranden større end en funktion som vides ikke at være integrabel på $[a, b]$. Man kan også, for uegentlige integraler af $\int_a^\infty$-typen, forsøge at anvende integralkriteriet (Sætning 8.29).

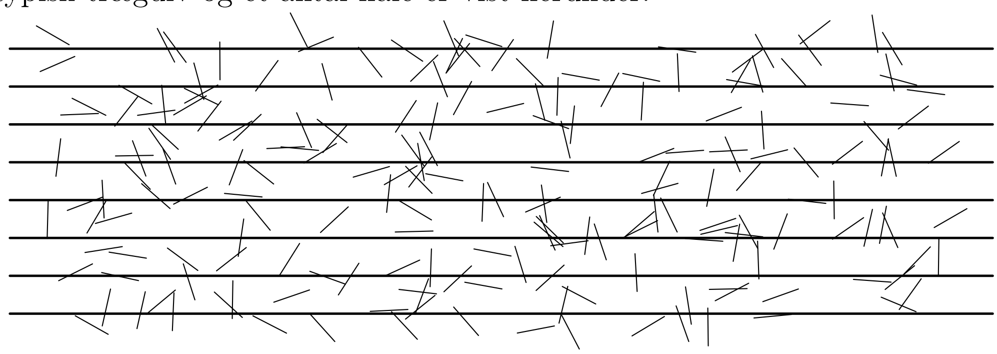
Buffons nåleproblem

Lad os få et par definitioner på plads:

Definition 1. Et trægulv er en uendelig samling af ækvidistante parallelle linjer i planen.

Definition 2. En nål er et linjestykke i planen hvis længde præcis er afstanden mellem to parallelle linjer i et trægulv.

Med disse to definitioner i hånden kan man stille sig selv spørgsmålet: Givet et trægulv og en dertil hørende nål, hvad er så sandsynligheden for at nålen skærer en af trægulvets linjer? Her antages det selvfølgelig at nålen er blevet "tabt" på gulvet, så både dens position og retning er tilfældige. Et typisk trægulv og et antal nåle er vist herunder.



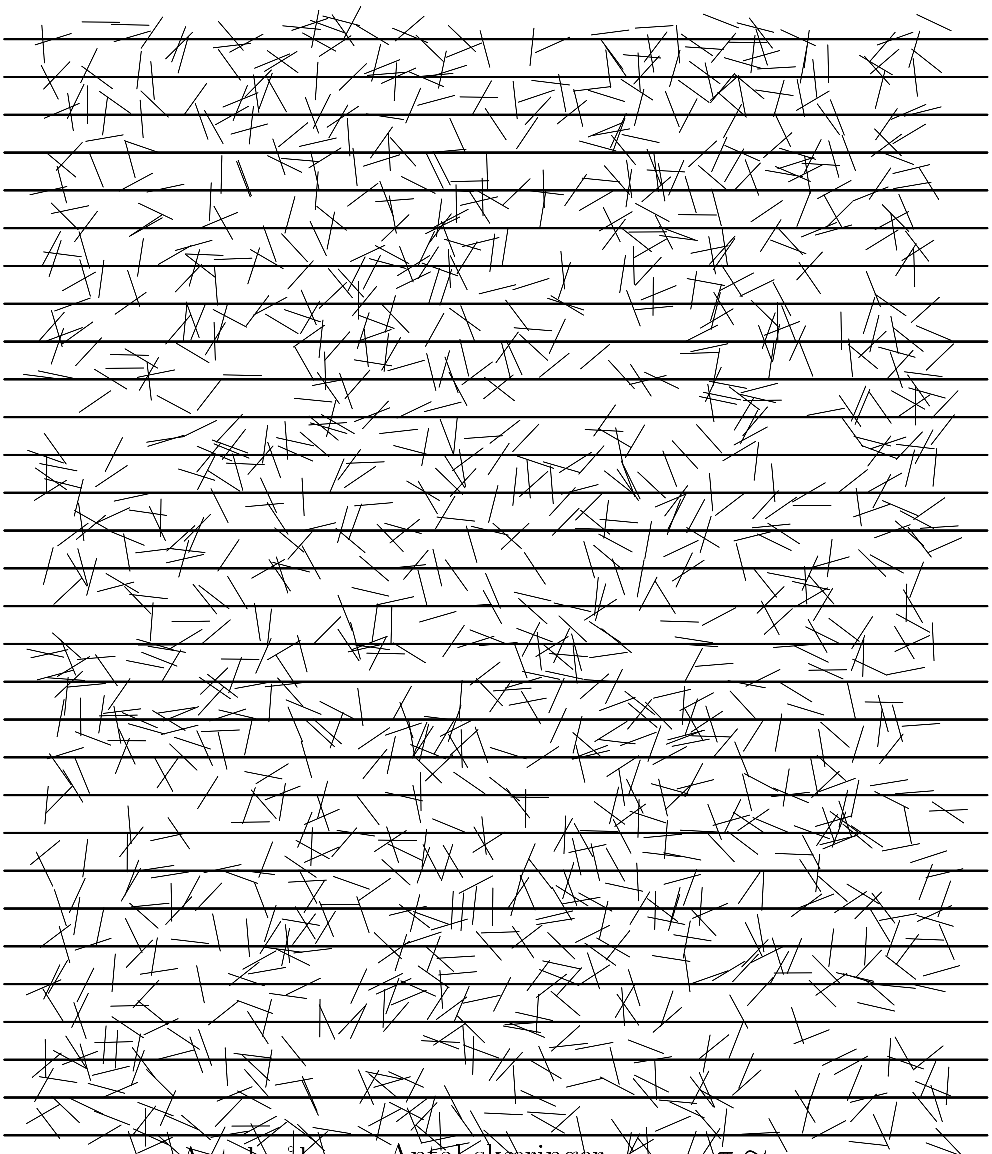
Måske en smule overraskende involverer svaret på ovenstående spørgsmål tallet π. En nål i planen er fastlagt ved dens centerpunkt (a, b) og den vinkel θ mellem 0 og 180° som nålen danner med trægulvets linjer. Lad os for nemhedens skyld antage, at trægulvet udgøres af linjerne parallelle med x-aksen, og at afstanden mellem to nabolinjer er 1. Af symmetriårsager er det klart at førstekoordinaten for centerpunktet ikke spiller nogen rolle, så lad os antage $a = 0$. Af tilsvarende årsager kan vi antage at $0 \leq b < 1$. Derfor er opgaven nu at bestemme hvilke talpar $(b, \theta) \in [0, 1) \times [0, \pi)$ som svarer til en nål der skærer en linje. Arealet af denne delmængde, divideret med det totale areal π af rektanglet, er så sandsynligheden for at en nål skærer en linje.

Nålen vi betragter er altså linjestykket med endepunkter $(\frac{1}{2}\cos\theta, b + \frac{1}{2}\sin\theta)$ og $(-\frac{1}{2}\cos\theta, b - \frac{1}{2}\sin\theta)$. Nålen skærer linjen med ligningen $y = 0$ hvis $b - \frac{1}{2}\sin\theta \leq 0$, altså hvis $\frac{1}{2}\sin\theta \geq b$. Arealet af den delmængde af $[0, 1) \times [0, \pi)$ som opfylder denne ulighed kan findes som integralet

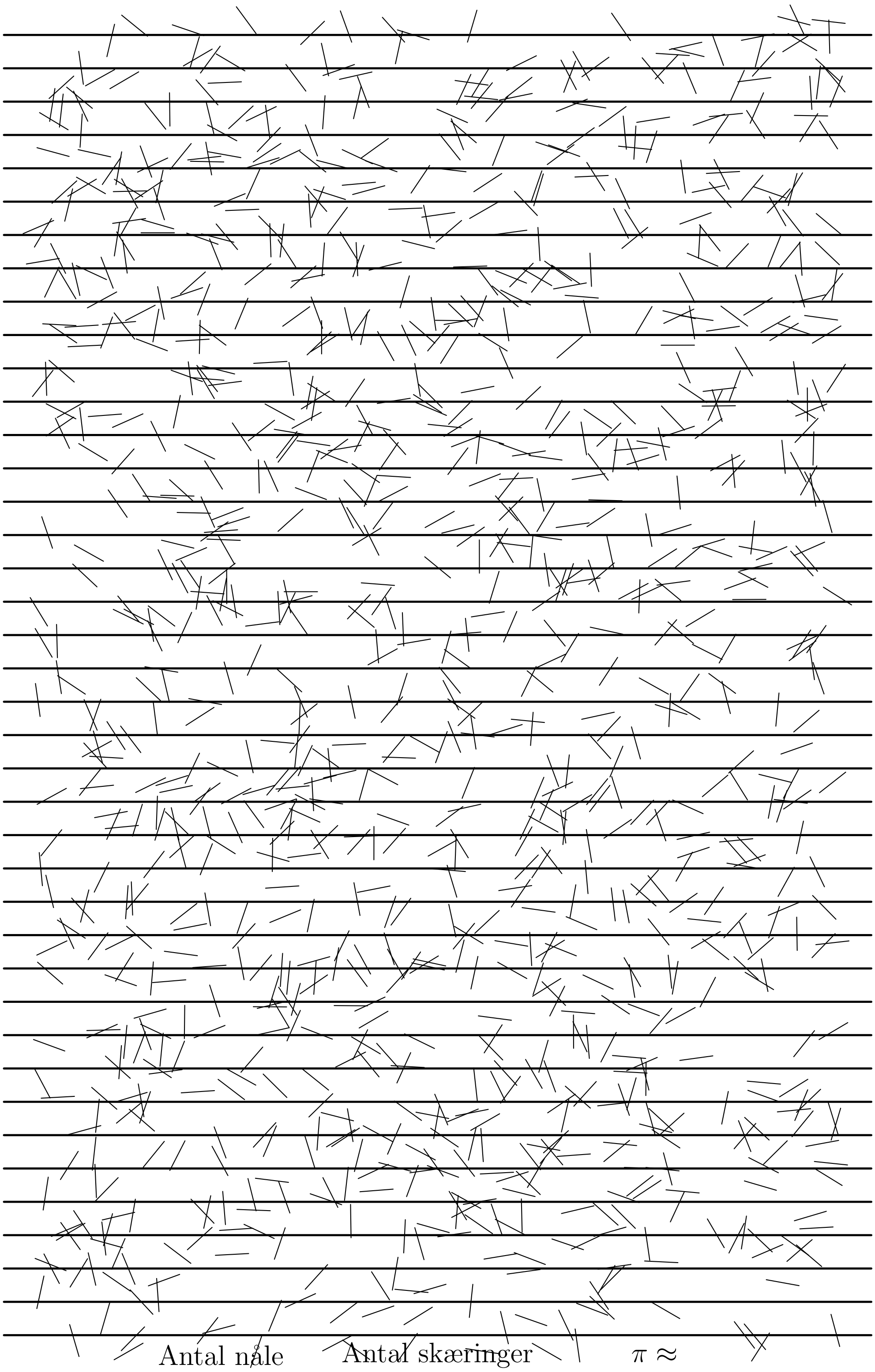
$$\int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}\sin\theta} 1 db d\theta = \int_0^\pi \tfrac{1}{2}\sin\theta d\theta = 1.$$

Af symmetriårsager er det lige så sandsynligt for nålen at skære linjen med ligningen $y = 1$, og derfor er det totale areal altså 2.

Vi konkluderer, at sandsynligheden for at en nål (hvis centerpunkt og vinkel med trægulvets linjer er uniformt fordelt) skærer en linje er $\frac{2}{\pi}$. Dette antyder en eksperimentel metode til bestemmelse af π, nemlig at kaste N nåle af passende længde ud over et trægulv og tælle antallet k der skærer en linje. Teoretisk set er $k/N = 2/\pi$, så vi får approksimationen $\pi \approx 2N/k$. Her er endnu et par eksempler, hvor antallet af nåle er tilfældigt (mellem 1000 og 1500):



Antal nåle	Antal skæringer	$\pi \approx$
1469	972	3.02263



Antal nåle	Antal skæringer	$\pi \approx$
1103	681	3.23935

Om kompakte mængder

Jeg kom jo til at bilde jer ind, at „kompakt“ er synomym med „lukket og begrænset“. Dette er også korrekt for delmængder af $\mathbb{R}^n$, men det er *ikke* definitionen af at være kompakt. For at rette op på det bringer jeg her dels den korrekte definition på kompakthed, dels den berømte Heine-Borel-sætning.

Definition 3. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være en delmængde af $\mathbb{R}^n$. Mængden A kaldes kompakt, hvis den har følgende såkaldte udtyndingsegenskab:

For **enhver** samling $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ af åbne mængder $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$, som overdækker A, findes der en **endelig** delmængde $J \subseteq I$ så også samlingen $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ overdækker A.

At $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ overdækker A vil sige at

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Kravet er altså, at hver gang A er overdækket af en (uendelig) samling af åbne mængder, skal man kunne udvælge endeligt mange af disse åbne mængder på en sådan måde at de stadig overdækker A.

Sætning 2 (Heine-Borel)**.** *En delmængde A af $\mathbb{R}^n$ er kompakt hvis og kun hvis A er lukket og begrænset.*

Bevis. Vi viser kun sætningen i tilfældet $n = 1$, idet dette tilfælde indeholder de væsentligste ideer i beviset.

Antag $A \subseteq \mathbb{R}$ er en kompakt delmængde. Betragt samlingen $U_n = (-n, n)$ af åbne intervaller, hvor $n \in \mathbb{N}$. Da $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er en overdækning af $\mathbb{R}$, er det specielt en overdækning af A. Der findes derfor endeligt mange mængder $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}$ så $A \subseteq U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_k}$. Sæt $M = \max_i\{n_i\}$. Så har vi at $A \subseteq (-M, M)$, og derfor er A begrænset.

Vi skal vise at A er lukket. Dette vises ved at vise, at komplementærmængden $B = \mathbb{R} - A$ er åben. Lad derfor $y \in B$ være et vilkårligt element. Vi skal så konstruere en åben kugle (dvs. et åbent interval) centreret i y, som er helt indeholdt i B. For ethvert $x \in A$ kan vi vælge positive δ_x, ε_x så kuglerne $U_x = B_{\delta_x}(x) = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ og $V_x = B_{\varepsilon_x}(y) = (y - \varepsilon_x, y + \varepsilon_x)$ er disjunkte (fx vil $\varepsilon_x = \delta_x = |x - y|/2$ virke, idet $|x - y| > 0$. Tegn!) Samlingen $\{U_x\}_{x \in A}$ af åbne kugler er klart en overdækning af A, da ethvert element i A jo pr. konstruktion er element i mindst et U_x. Der findes derfor endeligt mange punkter $x_1, \ldots, x_N \in A$ så $\{U_{x_i}\}_{i=1,\ldots,N}$ er en overdækning af A. Betragt fællesmængden

$$V = \bigcap_{i=1}^{N} V_{x_i}$$

af de tilsvarende åbne omegne af y. Da det er et endeligt snit af åbne mængder er V åben, og indeholder y. Desuden er V disjunkt fra A, for hvis der var et element $z \in V \cap A$ ville vi have at $z \in U_{x_i}$ for et eller andet i, men V_{x_i} og U_{x_i} er disjunkte. Altså har vi at $V \subseteq \mathbb{R} - A$, hvilket skulle vises.

Denne halvdel var i en vis forstand den nemme halvdel af sætningen, idet vi „blot“ skulle vise at en given mængde var lukket og begrænset, og vi havde det meget stærke værktøj til rådighed der bestod i, at enhver åben overdækning kunne udtyndes til en endelig. Nu skal vi vise, at hvis blot en mængde er lukket og begrænset, så kan en hvilken som helst given åben overdækning udtyndes til en endelig overdækning.

Antag altså, at $A \subseteq \mathbb{R}$ er lukket og begrænset, og lad $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ være en åben overdækning af A. Sæt $a = \inf A$ og $b = \sup A$ (disse findes da A er begrænset). Vi har altså at $A \subseteq [a, b]$. Mængden $V = \mathbb{R} - A$ er åben, da A er lukket. Samlingen $\mathcal{U}'$ bestående af alle U_α'erne samt denne ekstra mængde V er en åben overdækning af hele $\mathbb{R}$, og dermed specielt af intervallet $[a, b]$. Vi ser nu på følgende mængde:

$$C = \{c \in [a, b] \mid [a, c] \text{ kan overdækkes med endeligt mange elementer fra } \mathcal{U}'.\}$$

Da $\mathcal{U}'$ er en overdækning af $[a, b]$, findes der i samlingen en åben mængde U_0 som indeholder punktet a. Denne mængde U_0 overdækker altså intervallet $[a, a] = \{a\}$, og derfor er mængden C ikke tom. C er desuden pr. definition opad begrænset (af b). Lad $m = \sup C$.

Antag for modstrid at $m < b$. Da $m \in [a, b]$ findes der en åben mængde U_1 i $\mathcal{U}'$ som indeholder m. Vælg et $\delta > 0$ så $B_\delta(m) \subseteq U_1 \cap [a, b]$ (dette kan kun lade sig gøre fordi m er antaget at være mindre end b). Da $m = \sup C$ findes der et tal $x \in (m - \delta, m) \cap C$, og derfor kan intervallet $[a, x]$ overdækkes med endeligt mange mængder fra $\mathcal{U}'$. Tilføjer vi mængden U_1 til disse endeligt mange mængder har vi en endelig overdækning af intervallet $[a, m + \delta/2]$, i modstrid med at m er supremum af C.

Vi må derfor nødvendigvis have at $m = b$. Vi er dog ikke helt færdig endnu, idet vi ikke er sikre på at mængden C indeholder sit supremum. Imidlertid kan vi gentage argumentet fra før: Der findes en mængde U_2 fra samlingen $\mathcal{U}'$ som indeholder punktet b. Denne mængde dækker en smule til venstre for b; lad os sige $(b - \varepsilon, b] \subseteq U_2$. Vælger vi nu et $y \in (b - \varepsilon, b]$ så $[a, y]$ kan overdækkes med endeligt mange af mængderne fra $\mathcal{U}'$ får vi ved at tilføje U_2 til disse endeligt mange, en overdækning af $[a,b]$ med endeligt mange af mængderne fra $\mathcal{U}'$.

Imidlertid var $\mathcal{U}'$ ikke den givne overdækning, idet vi tog os den frihed at tilføje den ekstra åbne mængde $V = \mathbb{R} - A$ til $\mathcal{U}$. Hvis denne skulle vise sig at være blandt den endelige samling af mængder fra $\mathcal{U}'$ vi har konstrueret, ser vi blot bort fra den. De resterende mængder må nemlig alle sammen komme fra $\mathcal{U}$, og da V ikke har bidraget til at overdække A må de tilbageværende udgøre en overdækning af A. Således er A kompakt. $\triangle$

Hvis man har lyst til at øve sig lidt i begrebet kompakthed, kan man prøve at generalisere ovenstående bevis til at vise, at enhedskvadratet $[0,1]\times[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ er kompakt. Hvis man gennemfører dette, er der formentlig ikke så langt til at indse, at en vilkårlig „boks“ $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ er kompakt, og med denne viden i hånden følger Heine-Borel ret let.