Fortælling 2
Grundlæggende om afbildninger

Emil Hedevang Lohse

For ikke at gøre arbejdet med matematiske emner tungt og trægt indfører man gerne forkortende og hjælpsomme skrivemåder og begreber. Disse, omendskønt de er aldeles harmløse, forvolder ofte den nye rus ganske meget besvær. Hensigten med dette lille skrift er at modvirke besværet.

Lidt om afbildninger.
En *afbildning* f er en tingest som tager et element x i en mængde A og giver et element kaldet $f(x)$ i en anden mængde B (evt. den samme, altså A). En afbildning kan således ikke for et givet element x i A give to forskellige elementer y og z fra B. Man skriver kort

$$f\colon A \to B.$$

Mængden A kaldes *domænet* eller *definitionsmængden* og mængden B kaldes *codomænet* for f. Bemærk at der er forskel på codomænet og værdimængden, altså mængden af funktionsværdier. Nogle gange har man også en såkaldt forskrift for f; i så fald skriver man noget i retning af

$$f\colon A \to B, \quad f(x) = \text{forskriften}, \qquad \text{eller} \qquad f\colon A \to B, \quad x \mapsto \text{forskriften}.$$

At det er uhyre vigtigt at gøre sig klart at man *skal* angive domæne og codomæne for en afbildning for at kunne undersøge afbildningens egenskaber, bliver klart af det følgende, men først skal vi indføre et par definitioner.

Billede og urbillede.
Lad $f\colon A \to B$ være en afbildning og lad $C \subseteq A$ og $D \subseteq B$ være delmængder af A og B. Vi sætter da

$$\begin{aligned} f(C) &= \{b \in B \mid \text{der findes et } a \in C \text{ så } f(a) = b\}, \\ f^{-1}(D) &= \{a \in A \mid \text{der findes et } b \in D \text{ så } f(a) = b\}. \end{aligned}$$

$f(C)$ kaldes billedet af C under f, og $f(A)$ er således værdimængden for f; og $f^{-1}(D)$ kaldes urbilledet eller tilbagetrækket af D under f. Bemærk, at $f^{-1}(D)$ altid findes og ikke på nogen måde antyder at afbildningen har en invers. Jeg beklager den uheldige notation. Man skriver også $\mathrm{Im}(f) = f(A)$.

Sammensætning af afbildninger.
Hvis $f\colon A \to B$ og $g\colon B \to C$ er to afbildninger, kan man tage et element $a \in A$ og med f sende det over i $f(a) \in B$, og derefter med g sende $f(a)$ over i $g(f(a)) \in C$. Vi har dannet den sammensatte afbildning

$$g \circ f\colon A \to B \to C, \quad a \mapsto g(f(a)).$$

Man undlader ofte det midterste B og skriver blot $g \circ f\colon A \to C$. Bemærk, at sammensætning af afbildninger er associativ, dvs. at hvis tillige $h\colon C \to D$ er en afbildning, så er

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\colon A \to D, \quad a \mapsto h(g(f(a))).$$

Injektiv, surjektiv og bijektiv.

Følgende tre begreber kan man ikke slippe udenom.

- En afbildning $f\colon A \to B$ siges at være *injektiv* hvis der for alle $a, a' \in A$ gælder, at $a \neq a'$ medfører $f(a) \neq f(a')$. En ligeværdig beskrivelse er at der for alle $a, a' \in A$ gælder at $f(a) = f(a')$ medfører at $a = a'$. Med andre ord har ligningen $f(x) = b$ højst én løsning, altså er en løsning entydigt bestemt hvis den findes.
- En afbildning $f\colon A \to B$ siges at være *surjektiv* hvis der for alle $b \in B$ findes et $a \in A$, så $f(a) = b$. Med andre ord har ligningen $f(x) = b$ en løsning mht. x for ethvert $b \in B$.
- En afbildning som er både injektiv og surjektiv kaldes *bijektiv*.

Lad os nu se på hvorfor det er så vigtigt at angive domæne og codomæne for en afbildning. Hvis $n \in \mathbf{N}$ er et naturligt tal, kan vi afgøre om n er et lige tal eller ej. Hvis man således får spørgsmålet "Er n et lige tal?", kan man svare enten ja eller nej. Vi kan nu definere fire afbildninger som alle ligner hinanden meget, men som har forskellige egenskaber med hensyn til injektivitet og surjektivitet.

$$\begin{aligned}
&f_1\colon \mathbf{N} \to \{\text{ja, nej, banjo, pandekage}\},\\
&\quad n \mapsto \text{svaret på om } n \text{ er et lige tal eller ej},\\
&f_2\colon \mathbf{N} \to \{\text{ja, nej}\},\\
&\quad n \mapsto \text{svaret på om } n \text{ er et lige tal eller ej},\\
&f_3\colon \{43\} \to \{\text{ja, nej}\},\\
&\quad n \mapsto \text{svaret på om } n \text{ er et lige tal eller ej},\\
&f_4\colon \{43, 12\} \to \{\text{ja, nej}\},\\
&\quad n \mapsto \text{svaret på om } n \text{ er et lige tal eller ej}.
\end{aligned}$$

Afbildningen f_1 er hverken injektiv eller surjektiv; f_2 er surjektiv, men ikke injektiv; f_3 er injektiv, men ikke surjektiv; f_4 er både injektiv og surjektiv, således bijektiv. Et andet eksempel får vi fra den velkendte cosinus.

$$\begin{array}{ll}
\cos\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} & \text{er hverken injektiv eller surjektiv,}\\
\cos\colon \mathbf{R} \to [-1, 1] & \text{er surjektiv, men ikke injektiv,}\\
\cos\colon [0, \pi] \to \mathbf{R} & \text{er injektiv, men ikke surjektiv,}\\
\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1] & \text{er både injektiv og surjektiv, altså bijektiv.}
\end{array}$$

Øvelser.

Vis de ovenstående påstande om f_1, f_2, f_3, f_4 og cos. Lad $f\colon A \to B$ være en givet afbildning. Overvej at $f(A) = B$ hvis og kun hvis f er surjektiv.

Identiteten.

Givet en mængde A kan man altid lave en afbildning $A \to A$, nemlig

$$\mathrm{id}_A\colon A \to A, \quad a \mapsto a$$

og denne afbildning kaldes *identiteten* på A. Afbildningen bijektiv, men den har også følgende vigtige egenskab. For alle afbildninger $f\colon A \to B$ gælder der at

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \qquad \text{og} \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Øvelse.
Vis at $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ og $\mathrm{id}_B\colon B \to B$ er entydigt bestemte ud fra ovenstående egenskab. Med andre ord skal det vises at hvis $g\colon A \to A$ og $h\colon B \to B$ opfylder at

$$f \circ g = f \qquad \text{og} \qquad h \circ f = f$$

for alle (altså samtlige) afbildninger $f\colon A \to B$, så er $g = \mathrm{id}_A$ og $h = \mathrm{id}_B$.

Venstreinvers og højreinvers.
En afbildning $f\colon A \to B$ tager som sagt et element $a \in A$ og sender det over i et $b = f(a) \in B$. Nogle gange kan man gøre dette ugjort, altså finde en afbildning $v\colon B \to A$ så $v \circ f = \mathrm{id}_A$. Hvis et sådant v findes, siges v at være *venstreinvers* til f.

Men vi kan også nogle gange starte i B og tage et element $b \in B$ og med en passende afbildning $h\colon B \to A$ sende b til $a = h(b) \in A$ så $f(a) = b$, dvs. at $f \circ h = \mathrm{id}_B$. Hvis et sådant h findes, siges h at være *højreinvers* til f.

Øvelser.
Lad $f\colon A \to B$ være en afbildning. Vis at f er injektiv hvis og kun hvis der findes en afbildning $v\colon B \to A$ som er venstreinvers til f. Vis at f er surjektiv hvis og kun hvis der findes en afbildning $h\colon B \to A$ som er højreinvers til f. Giv eksempler på at venstre- og højreinverser ikke nødvendigvis er entydigt bestemte.

Invers afbildning.
Lad $f\colon A \to B$ være en afbildning. Hvis f er bijektiv, giver ovenstående øvelse at f har både en venstreinvers $v\colon B \to A$ og en højreinvers $h\colon B \to A$. Nu er

$$\begin{aligned} v \circ (f \circ h) &= v \circ \mathrm{id}_B = v, \\ (v \circ f) \circ h &= \mathrm{id}_A \circ h = h. \end{aligned}$$

Dette viser at $v = h$, altså at en venstreinvers for f også er en højreinvers for f og omvendt. Hvis $v'\colon B \to A$ er en venstreinvers og $h'\colon B \to A$ er en højreinvers, så er $v' = h = v$ og $h' = v = h$, og altså findes der en entydigt bestemt afbildning $g\colon B \to A$ således at $g \circ f = \mathrm{id}_A$ og $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Afbildningen g siges at være den *inverse afbildning* til f og skrives gerne som $g = f^{-1}$.

Bemærkninger.
Man bør ikke forveksle den inverse afbildning med tilbagetrækket. Husk, at tilbagetrækket altid findes; den inverse afbildning findes hvis og kun hvis f er bijektiv. Bemærk også, at vi kun har defineret invers afbildning for en bijektiv afbildning.

Hvis $f\colon A \to B$ er injektiv, findes ikke nødvendigvis en invers afbildning. Sæt $B' = f(A)$. Så er afbildningen

$$f'\colon A \to B', \quad a \mapsto f(a)$$

injektiv (da $f\colon A \to B$ er det) og surjektiv (da $f'(A) = B'$), og der findes derfor en invers afbildning til f'.

Restriktion.
Endelig kan man indskrænke domænet af en afbildning $f\colon A \to B$. Lad $C \subseteq A$ være en delmængde af A. Vi definerer da

$$f|_C\colon C \to B, \quad c \mapsto f(c).$$

$f|_C$ kaldes *restriktionen* af f til C.

Øvelser.
I disse øvelser skal du vise nogle grundlæggende egenskaber ved mængdeoperationerne. Lad $f\colon A \to B$ være en afbildning, og lad $A_i \subseteq A$ og $B_i \subseteq B$ være delmængder for alle $i \in I$. Vis at

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \\ f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) &= \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i), \\ f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f(A_i), \\ f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &\subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i). \end{aligned}$$

Giv et eksempel på at man ikke kan opnå lighed i det sidste tilfælde. Når man skal vise at to mængder A og B er lig med hinanden, er det tit lettets at vise at $x \in A \Rightarrow x \in B$ og $x \in B \Rightarrow x \in A$, thi man viser således at $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.