

Note 3

Denne note burde selvfølgelig have været udleveret ved sidste TØ-gang i tirsdags, men bedre sent end aldrig. Nu kan jeg så også passende bruge lejligheden til at vise hvordan man kan regne den opgave, vi ikke kom igennem i tirsdags. Først et par praktiske oplysninger og nogle formaninger.

Instruktørøl gives på *fredag den 21/5-04*; naturligvis i Fysisk Fredagsbar. Vi starter ved 16-tiden når baren åbner.

Spørgetime afholdes *mandag den 7/6-04 kl. 10-∞*. Vi mødes uden for vores sædvanlige TØ-lokale; hvis det er ledigt snupper vi det, ellers finder vi et andet.

Spørgsmål bedes sendt pr. email (burner@imf.au.dk) senest dagen før kl. 20; så har jeg en chance for at forberede mig.

En gennemsnitshøne lægger ca. 228 æg om året.

Jeg har ingen intentioner om at holde mig væk fra universitetet de næste par måneder; og det vil derfor i almindelighed være muligt at finde mig. Hvis ikke kan man sende en email og skrive hvor man sidder og læser; så kigger jeg nok forbi.

Hvis man ikke kan (eller vil) op til eksamen den dag man er sat på til, er det op til en selv at finde nogen at bytte med. Det er en fordel for alle parter, hvis Andrew får en seddel med navne, årskortnumre og de involverede dage, så der ikke opstår forvirring.

Det er ofte tilfældet, at nogen udebliver fra eksamen, så der bliver et par huller sidst på dagen. I en sådan situation kan man normalt godt få lov at gå op til eksamen tidligere end man egentlig skulle, hvis man gerne vil have det overstået og i øvrigt føler sig parat til det. *Det omvendte* er **ikke** tilfældet. Hvis man udebliver fra eksamen den dag man skulle have været oppe og kommer en af de senere dage, får man **ikke** lov at blive eksamineret.

Husk i øvrigt at overvære hinandens eksamener, og sørg i hvert fald for at have set mindst én eksamen inden det er jeres egen tur. Så ved I hvordan det foregår og hvad man kan blive udsat for.

Besvarelse af opgave 9.2.45

Den metode Allan brugte var sådan set rigtig nok; der manglede blot et enkelt lille trick. Nuvel, til besvarelsen:

Lad $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ være en matrix, der opfylder

$$\|Az\| = \|A^*z\| \text{ for alle } z \in \mathbb{C}^n. \quad (1)$$

Betingelse (1) ses let at være ækvivalent med

$$\langle Az, Az \rangle = \langle A^*z, A^*z \rangle \text{ for alle } z \in \mathbb{C}^n. \quad (2)$$

På et tidspunkt (vistnok som en laboratorie-opgave) har I vist, at $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$. Brug vi dette og at $(A^*)^* = A$ på (2) får vi

$$\langle z, A^*Az \rangle = \langle z, AA^*z \rangle. \quad (3)$$

For nemheds skyld lader vi $B = A^*A$ og $C = AA^*$. Den mk 'te indgang i B betegner vi b_{mk} , og tilsvarende for C .

Lad nu $z = e_r + e_s$, hvor e_k som sædvanlig betegner den k 'te standard-basisvektor for \mathbb{C}^n . Så er Bz altså summen af den r 'te og den s 'te søjle i B , så

$$Bz = \begin{bmatrix} b_{1r} + b_{1s} \\ b_{2r} + b_{2s} \\ \vdots \\ b_{nr} + b_{ns} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Det indre produkt af z med Bz er summen af den r 'te og den s 'te indgang i søjlevektoren Bz . Altså er

$$\langle z, Bz \rangle = b_{rr} + b_{rs} + b_{sr} + b_{ss}. \quad (5)$$

På helt tilsvarende vis får vi, at

$$\langle z, Cz \rangle = c_{rr} + c_{rs} + c_{sr} + c_{ss} \quad (6)$$

og udtrykkene i (5) og (6) er altså ens.

I specialtilfældet $r = s$ får vi

$$4b_{rr} = 4c_{rr} \quad (7)$$

og dermed $b_{rr} = c_{rr}$; altså er A^*A og AA^* ens på diagonalen. Udnytter vi dette faktum får vi den vigtige identitet

$$b_{rs} + b_{sr} = c_{rs} + c_{sr} \quad (8)$$

for vilkårlige r, s .

Dette var ca. så langt vi nåede i tirsdags. Tricket var nu at vælge en anden værdi for z og se hvad man kunne få ud af det. Mit umiddelbare bud, $z = e_r - e_s$ viste sig at føre frem til identiteten (8) igen, og virkede derfor ikke. Et bedre bud er dette: Lad $z = e_r + ie_s$ (altså vektoren der har et 1-tal på r 'te plads og et i på den s 'te plads). Som før kan vi udregne vektoren Bz ; denne gang får vi summen af den r 'te søjle og i gange den s 'te søjle i B ; altså

$$Bz = \begin{bmatrix} b_{1r} + ib_{1s} \\ b_{2r} + ib_{2s} \\ \vdots \\ b_{nr} + ib_{ns} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ved udregningen af det komplekse indre produkt $\langle u, v \rangle$ skal man huske, at det er defineret ved at man skal *konjugere* koordinaterne i u . Derfor bliver det indre produkt $\langle z, Bz \rangle$ summen af den r 'te indgang og $-i$ gange den s 'te indgang i søjlevektoren Bz ; altså

$$\begin{aligned} \langle z, Bz \rangle &= b_{rr} + ib_{rs} - i(b_{sr} + ib_{ss}) \\ &= b_{rr} + b_{ss} + ib_{rs} - ib_{sr}. \end{aligned} \quad (10)$$

En tilsvarende argumentation og udregning af $\langle z, Cz \rangle$ fører til identiteten

$$b_{rr} + b_{ss} + ib_{rs} - ib_{sr} = c_{rr} + c_{ss} + ic_{rs} - ic_{sr} \quad (11)$$

og erindrer vi at $b_{kk} = c_{kk}$ for alle k ledes vi altså frem til identiteten

$$b_{rs} - b_{sr} = c_{rs} - c_{sr}. \quad (12)$$

Tilbage er blot at addere ligningerne (8) og (12); det giver

$$2b_{rs} = 2c_{rs}, \quad (20)$$

og da dette gælder for vilkårlige r, s har vi $A^*A = B = C = AA^*$, hvilket skulle vises. \square