

Note 2

Der har tilsyneladende sneget sig en misforståelse ind, som jeg nu en gang for alle vil bringe ud af verden.

Dementi: Der er *ikke* garanti for at bestå eksamen i Lineær Algebra hvis man til eksamen blot postulerer formlen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

En anden trist nyhed er, at det ikke har kunnet lade sig gøre at flytte elektromagnetisme-eksamenen, så I må affinde jer med at skulle til eksamen lørdag den 27/3-2004.

Nuvel, til notens egentlige formål.

2.1 Relationer

Forrige gang faldt vi over begrebet “ækvivalensrelation”, og vi viste at rækkeækvivalens er en ækvivalensrelation på mængden $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$ af $m \times n$ -matricer over legemet \mathbb{F} . I denne note vil jeg forsøge at formalisere begrebet “relation på en mængde”, og give eksempler på flere forskellige typer relationer; herunder især ækvivalensrelationer og ordninger. Det er helt op til jer selv hvor grundigt I læser denne note; den er ikke skrevet i direkte tilknytning til faget Lineær Algebra, men mere for at give jer noget såkaldt “matematisk almendannelse”. Med dette menes ting som man bør vide om dette og hint, men som der ikke nødvendigvis bruges tid på at indføre i noget kursus. Til denne kategori hører også Emils note om afbildninger.

Før vi kan give en formel definition af en relation skal vi dog lige give en formel definition af hvordan man givet to mængder kan konstruere en ny mængde. Konstruktionen har I formentlig set før, men nu får I også at vide at den er opkaldt efter den franske matematiker og filosof René Descartes (1596-1650). Han er dog nok endnu bedre kendt for udsagnet “Cogito ergo sum”¹

Definition 2.1 (Cartesisk produkt). Lad A og B være to mængder. Ved det Cartesiske produkt $A \times B$ af A og B forstås mængden af alle ordnede par (a, b) , hvor a er et element i A og b er et element i B ; dvs.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}. \quad (1)$$

Efter denne abstrakte definition iler vi med at give et par eksempler.

Eksempel 2.2. Lad $A = B = \mathbb{R}$. Så er

$$\begin{aligned} A \times B &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &= \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

¹Jeg tænker, derfor er jeg.

Bemærkning 2.3. I tilfælde som disse hvor $A = B$ skriver man ofte A^2 om $A \times A$; sådan som I allerede kender det fra \mathbb{R}^2 . På tilsvarende vis gives mening til A^n ; nemlig som det Cartesiske produkt af n kopier af A , dvs. $\underbrace{A \times \cdots \times A}_n$.

Eksempel 2.4. Lad $A = D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ betegne den lukkede enhedsskive i planen og $B = [0, 2]$. Så er

$$A \times B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 2\}$$

hvilket jo er en cylinder med radius 1 og højde 2.

Eksempel 2.5. Lad $A = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$ betegne mængden af mulige udfald ved kast med en almindelig 6-sidet terning, og lad $B = \{\textcircled{P}, \textcircled{K}\}$ betegne mængden af mulige udfald ved kast med en almindelig mønt. Så er

$$A \times B = \{(\square, \textcircled{P}), (\square, \textcircled{P}), (\square, \textcircled{P}), (\square, \textcircled{P}), (\square, \textcircled{P}), (\square, \textcircled{P}), \\ (\square, \textcircled{K}), (\square, \textcircled{K}), (\square, \textcircled{K}), (\square, \textcircled{K}), (\square, \textcircled{K}), (\square, \textcircled{K})\}$$

og dette kan på naturlig vis opfattes som mængden af mulige udfald ved simultant kast med en terning og en mønt.

Nu hvor vi er i stand til at konstruere massevis af nye mængder er vi naturligvis også i stand til at definere afbildninger på dem. I Eksempel 2.2 ovenfor kan vi eksempelvis definere en afbildning $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ved at

$$f(a, b) = a + bi.$$

Overvej denne afbildnings egenskaber med hensyn til injektivitet og surjektivitet.

I Eksempel 2.5 kan vi formelt definere en meget anvendt og velkendt afbildning $\text{Sa}\emptyset: A \times A \rightarrow \mathbb{Z}$. $\text{Sa}\emptyset$ står for "sum af øjne", og hvis jeg fx skriver $\text{Sa}\emptyset(\square, \square) = 6$ er det vist klart hvordan den er defineret...

Vi kan nu give en definition af, hvad der menes med en "relation på en mængde". Intuitivt skal en relation være noget, som sammenligner to elementer i mængden; med andre ord skal vi givet to elementer i mængden kunne afgøre, om de er "relateret" til hinanden eller ej.

Definition 2.6 (Relation på mængde). Lad A være en mængde. Ved en relation R på A forstås en afbildning

$$R: A \times A \rightarrow \{\text{ja, nej}\}.$$

Bemærkning 2.7. Der er naturligvis ikke noget guddommeligt ved det danske sprog. Som kodomæne for R kunne jeg naturligvis lige så godt have valgt $\{\text{yes, no}\}$, $\{\text{sí, no}\}$, $\{\text{да, нет}\}$ eller for den sags skyld en hvilken som helst anden mængde med to elementer.

Som oftest er det ikke særligt frugtbart at tænke på en relation som en afbildning, men definitionen gør det muligt (og nemt) at formalisere forskellige begreber. Før vi giver eksempler på relationer skal vi også indføre nogle ord.

Definition 2.8 (Terminologi). Lad R være en relation på en mængde A .

- (1) R kaldes *refleksiv*, hvis $R(x, x) = \text{ja}$ for ethvert $x \in A$.
- (2) R kaldes *symmetrisk*, hvis $R(x, y) = R(y, x)$ for alle $x, y \in A$.
- (3) R kaldes *transitiv*, hvis $R(x, y) = \text{ja}$ og $R(y, z) = \text{ja}$ medfører at $R(x, z) = \text{ja}$.
- (4) R kaldes *antisymmetrisk*, hvis $R(x, y) = \text{ja}$ og $R(y, x) = \text{ja}$ medfører at $x = y$.

Bemærk at “antisymmetrisk” absolut ikke er det samme som “ikke symmetrisk”. Nu til det første eksempel.

Eksempel 2.9. Lad \mathbb{Z} betegne mængden af hele tal, og $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ mængden af naturlige tal. Vi kan nu definere en relation \geq på \mathbb{Z} ved følgende

$$\geq(x, y) = \begin{cases} \text{ja} & \text{hvis } x - y \in \mathbb{N} \\ \text{nej} & \text{ellers} \end{cases}$$

Nu kan jeg lige så godt her afsløre, at man aldrig i praksis bruger den ovenstående notation. Lad os en gang for alle indføre, at hvis $R(x, y) = \text{ja}$ skriver vi $x R y$, og hvis $R(x, y) = \text{nej}$ skriver vi $x \not R y$; det skulle nu være helt klart at den i Eksempel 2.9 definerede relation er den der sædvanligvis er kendt under navnet “større end eller lig med”. Denne relation har egenskaberne (1), (3) og (4) fra Definition 2.8; overvej dette!

En anden velkendt relation på \mathbb{Z} er $>$ (“strengt større end”). Den kunne eventuelt defineres som i Eksempel 2.9 hvis man erstatter \mathbb{N} med $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Overvej at denne relation er transitiv (let) og antisymmetrisk (knap så let!).

Hvis R er en relation på A kan vi definere en anden relation, S , ved at

$$x S y \iff x \not R y.$$

I dette tilfælde kaldes S den modsatte relation til R . I de ovenstående eksempler har vi at $\not\geq$ normalt kaldes $<$ (“ikke større end eller lig med” er det samme som “strengt mindre end”) og $\not\leq$ normalt kaldes \leq (“ikke strengt større end” er det samme som “mindre end eller lig med”).

På en vilkårlig mængde A har vi naturligvis den såkaldte “identitetsrelation”, som vi reserverer symbolet $=$ til. Dens modsatte relation betegnes som bekendt \neq , og udtrykt i ord siger dette at “ikke identisk med” er det samme som “forskellig fra”.

Relationen \geq fra Eksempel 2.9 er en såkaldt “partiel ordning”; partielle ordninger er én type af relationer. En anden vigtig type er de såkaldte ækvivalensrelationer, og vi giver nu en formel definition af disse to begreber.

Definition 2.10 (Mere terminologi). En relation R som opfylder betingelserne (1), (2) og (3) fra Definition 2.8 kaldes en *ækvivalensrelation*. En relation R som opfylder betingelserne (1), (3) og (4) kaldes en *partiel ordning*.

Identitetsrelationen $=$ er klart en ækvivalensrelation på enhver mængde. Ligeså er relationen \sim (rækkeækvivalens) en ækvivalensrelation på mængden af $m \times n$ -matricer; dette så vi til $T\emptyset$ for et par gange siden.

Om et stykke tid vil I se en ækvivalensrelation på kvadratiske matricer kaldet “similaritet”. Lad mig blot give definitionen her, og overlade til jer at vise det er en ækvivalensrelation.

Definition 2.11 (Similaritet af matricer). Lad $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ være to kvadratiske matricer. A og B kaldes *similære* (notation: $A \approx B$) hvis der findes en matrix $C \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ så²

$$A = CBC^{-1}.$$

I så fald siges A og B at være similære *via* C .

Eksempel 2.12. Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Så er $A \approx B$, thi vi kan vælge

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

²Husk at $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ betegner mængden af invertible $n \times n$ -matricer med reelle indgange.

Det er let at se at C er invertibel, at $C^{-1} = C$, og en efterregning viser at $A = CBC^{-1}$.

Dette eksempel viser på ingen måde hvordan man kan afgøre hvorvidt to matricer er similære eller ej; ejheller hvordan man i givet fald kan finde et C som de er similære via. Alt dette og meget mere kommer der en masse om senere i [FB] og i kurset.

Du har måske undret dig over ordet “partiel” i Definition 2.10. Forklaringen er, at vi ikke nødvendigvis kræver at en (partiel) ordning R sætter os i stand til at sammenligne alle par af elementer i en mængde. Med dette menes, at der for ethvert par af elementer $x, y \in A$ gælder mindst en af $x R y$ og $y R x$. En partiel ordning som i denne forstand rent faktisk lader os sammenligne alle elementer kaldes (logisk nok) en *total ordning*. Tjek selv efter, at \geq på \mathbb{Z} er en total ordning. Lad os som det sidste give et par eksempler på partielle ordninger der ikke er totale:

Definer en relation, betegnet \succeq , på \mathbb{R}^2 ved at

$$(x_1, y_1) \succeq (x_2, y_2) \iff x_1 \geq x_2 \text{ og } y_1 \geq y_2$$

hvor \geq betegner den sædvanlige relation på \mathbb{R} . Eksempelvis er $(4, 2) \succeq (-3, 1)$ da både $4 \geq -3$ og $2 \geq 1$. Overvej nøje hvorfor \succeq er en partiel ordning. Observer dernæst at der både gælder $(3, -5) \not\succeq (-1, 2)$ og $(-1, 2) \not\succeq (3, -5)$; ergo er \succeq ikke en total ordning på \mathbb{R}^2 . Intuitivt kan man sige, at \succeq kun kan sammenligne punkter, hvis “det ene ligger over og til højre for det andet”.

Som det andet eksempel betragter vi mængden $A = \{0, 1\}$. Lad B være mængden af delmængder af A (ofte betegnet $\mathcal{P}(A)$ eller 2^A , og kaldet “potensmængde A ”); dvs.

$$B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Så er den sædvanlige mængdeinklusion \subseteq en partiel ordning på B (thi $X \subseteq X$, $X \subseteq Y$ og $Y \subseteq Z$ medfører $X \subseteq Z$ og endelig har vi $X \subseteq Y$ og $Y \subseteq X$ medfører $X = Y$). Det er ikke en total ordning, da hverken $\{0\} \subseteq \{1\}$ eller $\{1\} \subseteq \{0\}$.

Hvis I har lyst kan I prøve at lege med relationen \parallel (parallel) på \mathbb{R}^n . Start med at give en (formel) definition af hvornår $x \parallel y$, og undersøg dernæst denne relations egenskaber (i henhold til Definitionerne 2.8 og 2.10). Gør dernæst det samme på $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ og se om ikke der er noget der bliver pænere. . .