

Note 1

Jeg har flyttet kontor, så man nu kan finde mig i A4.32; dvs. tre etager over Vandrehallen i A-bygningens nordøstlige ende. Desuden er afleveringsfristen ændret til mandag kl. 15.

Jeg har nedenfor gennemført udledningen af "løsningsformlen" for en andengradsligning; udledningen har I formentlig set før, men nu ser I at det virker over et (næsten) vilkårligt legeme, men at man skal være varsom når man arbejder over \mathbb{C} .

I bør læse og forstå vedlagte note, *Grundlæggende om afbildninger*, skrevet af ingen ringere end min egen Lineær Algebra-instruktør Emil.

Der er et par fejl på ugeseddel 4: På side 3, linje 4 fra neden står der \mathbf{R}^n hvor der burde stå \mathbf{F}^n . På første side, linje 5 fra neden står der ret umotiveret *ldots* midt i det hele. Der skulle være tre udeladelsesprikker . . . Desuden mangler der en sluttuborg } efter \mathbf{b}_{n-k} .

1.1 Om løsning af andengradsligninger

Lad \mathbb{F} betegne et legeme, og antag at vi har givet tre tal, $a, b, c \in \mathbb{F}$ hvor $a \neq 0$. Vi ønsker en metode til at bestemme alle $z \in \mathbb{F}$ som opfylder ligningen

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (1)$$

Som sædvanlig starter vi med at antage, at vi har en løsning z , og så ser vi hvad vi kan sige om denne løsning. Da \mathbb{F} er et legeme og $a \neq 0$ giver det mening at dividere igennem med a ; vi får

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \quad (2)$$

Endvidere fås ved addition af $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ til begge sider¹ at

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (3)$$

Dette trin er også kendt som "completing the square", thi vi kan nu genkende venstresiden som kvadratet på størrelsen $z + \frac{b}{2a}$. Med andre ord har vi nu, at hvis z er en løsning til den oprindelige ligning (1), er $z + \frac{b}{2a}$ en løsning til ligningen

$$t^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (4)$$

¹Der er et subtelt problem forbundet med dette trin, men det vil jeg ikke komme nærmere ind på her. Blot bemærkes det, at udledningen har gyldighed i de to tilfælde vi er interesseret i, nemlig $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ og $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

Vi ser nu, at hvis vi bare kan bestemme alle mulige “kvadratrødder” (det vil sige alle mulige løsninger til en ligning af formen (4)), har vi også fundet alle potentielle løsninger til ligningen (1). I tilfældet $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ deler man som bekendt op i tilfældene $d = b^2 - 4ac > 0$, $d = 0$ og $d < 0$, og det giver anledning til 2, 1 eller 0 rødder inden for \mathbb{R} ; i de to første tilfælde kan rødderne beskrives ved den velkendte formel

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5)$$

og indsættes disse to tal i ligningen (1) ser man efter en smule regnearbejde, at de rent faktisk *er* rødder.

Hvis vi derimod arbejder inden for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ har vi ikke nogen veldefineret funktion $\sqrt{}$ der sætter os i stand til at udtrykke eventuelle rødder ved en formel a la (5). Hvis man vil være helt stringent bliver man derfor nødt til at gøre noget i retning af følgende:

Lad $s \in \mathbb{C}$ være et komplekst tal med den egenskab, at $s^2 = b^2 - 4ac$; et sådant tal findes pga. Algebraens Fundamentalsætning. Det eneste andet komplekse tal der har denne egenskab er $-s$. På tilsvarende vis ser man, at $2a$ og $-2a$ er de eneste tal med den egenskab, at deres kvadrat er $4a^2$. Altså er de eneste komplekse tal med den egenskab, at deres kvadrat er $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ tallene

$$\frac{s}{2a} \text{ og } \frac{-s}{2a}$$

og hvis z er en løsning til (1) skal $z + \frac{b}{2a}$ derfor være et af disse to tal. Dermed har vi den analoge formel til (5)

$$z = \frac{-b \pm s}{2a} \quad (6)$$

og på helt samme måde som ovenfor kan man indsætte disse to tal i (1) og se at de begge er løsninger. Dette er uafhængigt af *hvilket* s man har valgt.

Når man bliver udsat for at løse andengradsligninger behøver man selvfølgelig ikke nævne eksplicit hvilken kompleks rod man vælger af $b^2 - 4ac$; hele pointen med ovenstående var blot at minde jer om, at man ikke bør skrive noget i retning af $\sqrt{b^2 - 4ac}$ når indmaden er et komplekst tal.

Lidt om notation

Som I måske har bemærket, bruger Andrew på ugesedlerne betegnelsen \mathbf{F} om et legeme, \mathbf{R} om mængden af reelle tal og \mathbf{C} om mængden af komplekse tal, mens jeg har brugt henholdsvis \mathbb{F} , \mathbb{R} og \mathbb{C} . Begge konventioner er udbredte,

og det er et spørgsmål om personlig stil hvilken man foretrækker. Brugen af dobbeltstregede bogstaver \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} etc. til “standardmængder” har historisk oprindelse; det var og er en bekvem måde at lave “fede” bogstaver på en tavle, og den dag i dag kaldes skrifttypen $\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}\dots$ da også for “blackboard bold”.

I har formentlig vænnet jer til, at $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$ betegner mængden af $m \times n$ -matricer med indgange fra et legeme \mathbb{F} . Hvis $m = n$ forkorter man ofte notationen til $\text{Mat}_n(\mathbb{F})$; dette er således mængden af (kvadratiske) $n \times n$ -matricer. En betegnelse I nok ikke har mødt endnu er $\text{GL}_n(\mathbb{F})$; dette betegner mængden af *invertible* $n \times n$ -matricer.

Det hedder “en matrix”, “matricen”, “flere matricer”, “alle matricerne”. På dansk findes også navneordet “en matrice”, hvis bøjning i øvrigt er identisk med bøjningen af “en matrix”, men en matrice er en støbeform og har ikke meget med Lineær Algebra at gøre.