Visdommen opnået i efteråret
—et resumé

Rasmus Villemoes

29. december 2006

Indhold

1 Indledning

Nu er det første kvarter af kurset Matematisk Analyse 1 slut, og det er tid til at reflektere over hvad vi har lært. Vi har indført de mest elementære begreber inden for den gren af matematikken som hedder analyse, og studeret visse sammenhænge mellem disse begreber. Lad mig understrege en gang for alle, at vigtigheden af at forstå disse begreber og sammenhænge ikke kan overdrives: Dels bygger resten af kurset naturligvis ovenpå de indførte begreber og de metoder vi har udviklet, men vigtigere endnu er, at *al* den matematik I støder på i en vis forstand generaliserer de idéer som blev præsenteret i efterårssemesteret.

Derfor er det på sin plads at bruge et par sider på at diskutere de reelle tal, supremumsegenskaben, følger, rækker, konvergens, kontinuitet og alt det andet guf. Lad dig ikke skræmme af omfanget af dette resumé. Forhåbentlig kan du nikke genkendende til det meste af stoffet, og skulle der være et afsnit heri som virker lidt fjernt, skal du ikke læse afsnittet igen og igen, men derimod læse den grundigere gennemgang af emnet i lærebogen.

Før læsning af dette resumé anbefaler jeg, at du sætter dig godt til rette i en blød lænestol med en kop varm kaffe inden for rækkevidde. Spredt rundt omkring finder du symbolet ☕. Dette indikerer at det er på tide at stoppe op, drikke en tår kaffe eller hente en ny kop, og overveje om du virkelig forstår det du lige har læst. Kaffen kan eventuelt erstattes af te eller kakao.

Sidder du godt? Så lad os begynde… ☕

2 De reelle tal

Kursets hovedperson er mængden af reelle tal, $\mathbb{R}$. Vi vil, som i lærebogen, ikke diskutere „Hvor kommer denne mængde fra?“ eller „Hvordan konstruerer man de reelle tal?“, men blot tage eksistensen af denne mængde for givet. Den modige rus kan finde en note der behandler netop disse problemstillinger på `http://home.imf.au.dk/burner/matematik.xhtml`, men det er ingenlunde en forudsætning at læse den for at få udbytte af nærværende tekst. Jeg vil sågar anbefale at man læser og forstår dette resumé før man giver sig i kast med de mere dybsindige spørgsmål stillet ovenfor.

De egenskaber de reelle tal besidder som gør dem til grundstenen i megen matematik, kan opsummeres på en enkelt linje:

Mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal er et fuldstændigt ordnet legeme.

Denne ene linje indeholder et væld af information, som vi i det følgende vil folde ud og forklare. Først og fremmest er der altså tale om en mængde som vi betegner med symbolet $\mathbb{R}$, og hvis elementer vi kalder reelle tal.

2.1 Legemet $\mathbb{R}$

At $\mathbb{R}$ er et *legeme* betyder at der findes nogle *binære operationer* på $\mathbb{R}$ kaldet *addition* ($+$) og *multiplikation* ($\cdot$). Til hvert par af reelle tal $x, y \in \mathbb{R}$ findes der altså et reelt tal $x + y$ kaldet *summen* af x og y, og et reelt tal $x \cdot y$ kaldet *produktet* af x og y. Disse to operationer kræves at opfylde en hel del betingelser (eller „aksiomer“), som vi repeterer for fuldstændighedens skyld:

(1) Den *kommutative* lov for $+$: For alle $x, y \in \mathbb{R}$ gælder $x + y = y + x$.
(2) Den *associative* lov for $+$: For alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gælder $(x + y) + z = x + (y + z)$.
(3) Eksistens af neutralelement for $+$: Der skal findes et $n \in \mathbb{R}$ med den egenskab, at for ethvert $x \in \mathbb{R}$ er $n + x = x$.
(4) Eksistens af inverst element med hensyn til $+$: For ethvert $x \in \mathbb{R}$ skal der findes et $y \in \mathbb{R}$ så $x + y = n$.
(5) Den *kommutative* lov for $\cdot$: For alle $x, y \in \mathbb{R}$ gælder $x \cdot y = y \cdot x$.
(6) Den *associative* lov for $\cdot$: For alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gælder $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
(7) Eksistens af neutralelement for $\cdot$: Der skal findes et $e \in \mathbb{R}$ med den egenskab, at for ethvert $x \in \mathbb{R}$ er $e \cdot x = x$.
(8) Distributivitet af $\cdot$ over $+$: For alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gælder at $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
(9) Eksistens af inverst element med hensyn til $\cdot$: For ethvert $x \in \mathbb{R}$ som ikke er n findes der et $y \in \mathbb{R}$ så $x \cdot y = e$.

Disse fortjener et par ord med på vejen:

Et udtryk som $x + y + z$ er ikke umiddelbart defineret, da $+$ kun er en binær operation. Det er ikke klart om vi skal tolke det som $(x + y) + z$ eller $x + (y + z)$, men da disse to fortolkninger ifølge aksiom (2) giver det samme resultat, kan vi evaluere udtrykket som vi lyster, og denne utvetydige tolkning gør at vi ikke behøver sætte parenteser i sådanne udtryk. En tilsvarende bemærkning gør sig selvfølgelig gældende for udtryk á la $x \cdot y \cdot z$ og (6).

For at (4) giver mening kræver det, at man indser at der højst kan findes ét n med egenskaben krævet i (3); hvis der fandtes mere end et sådan n, ville kravet i (4) ikke være veldefineret (hvilket n skulle $x + y$ være lig?). Heldigvis er det let at vise denne entydighed, for hvis n og n' begge opfylder kravet i (3), får vi at $n' = n + n' = n' + n = n$ jf. (1). Dette specielle element i $\mathbb{R}$ betegnes normalt 0 og kaldes „nul“. Helt tilsvarende kommentarer kan knyttes til (7) og (9), og det entydige $e \in \mathbb{R}$ som opfylder $e \cdot x = x$ for ethvert $x \in \mathbb{R}$ betegnes normalt 1 og kaldes „en“.

Som i lærebogen og øvrig matematisk litteratur vil vi ofte udelade symbolet $\cdot$ og skrive xy i stedet for $x \cdot y$. Vi vedtager desuden at $\cdot$ (hvad enten symbolet forekommer eksplicit eller implicit) „binder mere“ end $+$, og derfor kan distributivitetskravet i (8) også skrives $x(y + z) = xy + xz$.

Mange af de ovennævnte aksiomer er også kendt som „regneregler“, men det er altså ikke regler man kan bevise, med mindre man faktisk laver en model for de reelle tal. Vi tager eksistensen af operationerne $+$ og $\cdot$ med de nævnte egenskaber for givet; disse giver så anledning til diverse „afledte“ operationer såsom subtraktion og division.

2.2 Ordningen

At de reelle tal udgør et *ordnet* legeme vil løst sagt sige, at der findes en ordning på $\mathbb{R}$ som er kompatibel med regneoperationerne (addition og multiplikation). Ordet *ordning* betyder at der findes en relation $<$ på $\mathbb{R}$, så der for ethvert par af elementer $x, y \in \mathbb{R}$ gælder præcis én af de tre muligheder $x < y$, $x = y$ eller $y < x$ (ordningen er *total*). Yderligere gælder, at hvis $x < y$ og $y < z$, så er $x < z$ (dette kaldes *transitivitet*). Se eventuelt Definition 3.1 i lærebogen. Symbolerne $>$, $\leq$ og $\geq$ har den oplagte og velkendte betydning.☕ Specielt gælder der altså for ethvert reelt tal $x \neq 0$ at enten er $x < 0$ eller $x > 0$. I førstnævnte tilfælde kaldes x *negativt*, og i sidstnævnte kaldes x *positivt*. Tallet 0 er hverken positivt eller negativt.

Hvad menes der mon med at denne ordning er *kompatibel* med regneoperationerne? En smule eftertanke☕ giver, at ordningen skal være „translationsinvariant“ og „stabil under multiplikation med positivt tal“. I symboler kan dette udtrykkes ved de velkendte udsagn, at for $x, y, z \in \mathbb{R}$ skal gælde, at hvis $x < y$, så er $x + z < y + z$, og hvis $z > 0$ og $x < y$, så er $xz < yz$. Som for aksiomerne (1)–(9) for addition og multiplikation kan man ikke bevise disse egenskaber, men til gengæld kan alle de andre regler for regning med ulighed som I kender udledes fra disse (fx at man ved multiplikation med et negativt tal skal vende uligheden).

2.3 Fuldstændighed

Det sidste ord fra den fremhævede linje på side 2 vi mangler at behandle er *fuldstændigt*. Dette ord kan alt afhængig af kontekst betyde forskellige ting, men for os betyder det at de reelle tal besidder *supremumsegenskaben*. Jeg minder om at dette vil sige, at **enhver ikke-tom** og **opad begrænset delmængde** af $\mathbb{R}$ har en **mindste øvre grænse**. I foregående sætning indgår en hel del betydningsbærende ord, og det er på tide med en tår kaffe. Tænk over om du forstår hvert af de fremhævede ord før du læser videre. ☕

Lad os diskutere de enkelte termer hver for sig. Lad A være en delmængde af $\mathbb{R}$. At A er ikke-tom betyder blot at der findes mindst et element i A. En *øvre grænse* for A er et reelt tal $b \in \mathbb{R}$, som er større end ethvert element i A. Med andre ord er b en øvre grænse for A, hvis betingelsen $\forall a \in A : a \leq b$ er opfyldt. Der ligger i definitionen *intet* krav om at b skal være medlem af A, og der påstås heller ikke at enhver delmængde tillader en øvre grænse. Fx er det let at se at $\mathbb{R}$ selv ikke har nogen øvre grænse, og delmængden $\mathbb{N}$ har heller ikke. På den anden side har ethvert interval $[c, d]$ en øvre grænse (fx er

d en øvre grænse, og det er $d + 1$ også). *Hvis* A har en øvre grænse, siges A at være opad begrænset.

En *mindste* øvre grænse for A er en øvre grænse for A som er mindst blandt sådanne. Dette skal naturligvis forstås på den måde, at b kaldes en mindste øvre grænse for A, hvis det for *enhver* øvre grænse c for A gælder, at $b \leq c$. Et standardargument viser, at hvis A har en mindste øvre grænse, er den entydigt bestemt. ☕ Det giver i det tilfælde mening at snakke om *den* mindste øvre grænse for A, og denne kaldes også for *supremum* af A og betegnes $\sup A$.

Hvilke delmængder A af de reelle tal har så en mindste øvre grænse? For det første er det klart fra definitionen at en nødvendig betingelse for at tillade en *mindste* øvre grænse er at A skal have en øvre grænse, eller med andre ord at A skal være opad begrænset.

Lad os for en stund studere det ekstremt simple tilfælde, den tomme mængde $\varnothing$. Denne er opad begrænset af ethvert reelt tal b, for der gælder trivielt $\forall x \in \varnothing : x \leq b$. Dette viser, at $\varnothing$ ikke kan have en *mindste* øvre grænse (for hvis b er en mindste øvre grænse, er $b - 1$ også en øvre grænse, i modstrid med at b var den mindste sådanne). ☕

En anden nødvendig betingelse for at A har en mindste øvre grænse er altså at $A \neq \varnothing$. Supremumsegenskaben for de reelle tal fortæller, at disse to betingelser faktisk er *tilstrækkelige* til at konkludere, at A har en øvre grænse, og det er denne egenskab der adskiller $\mathbb{R}$ fra andre udmærkede ordnede legemer såsom de rationale tal $\mathbb{Q}$.

Når man skal bevise at supremum af en eller anden given mængde er givet ved en eller anden formel, gør man klogt i først at overveje om denne mængde faktisk har et supremum. Dette vil altså sige, at man skal gøre rede for at mængden er ikke-tom og opad begrænset, og dette kan man som oftest konkludere fra de givne forudsætninger uden at få alt for meget sved på panden. Se fx besvarelsesforslaget til aflevering 4 nedenfor.

3 Talfølger

Definitionen af en talfølge i første linje af lærebogens Definition 4.1 er ikke helt så præcis som man kunne ønske sig, omend kommentarerne efterfølgende præciserer hvad der menes. Et alternativ ville fx være at sige, at en reel talfølge er en funktion $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Så undgår man den lidt kluntede formulering med „uendeligt mange tal", hvor man så bliver nødt til at præcisere at nogle af disse tal gerne må forekomme flere gange, og der ikke behøver være uendelig mange forskellige tal. Hvis a er en reel talfølge beslutter vi os for at betegne det n'te element med a_n i stedet for det lidt mere kluntede $a(n)$, men dette er udelukkende et spørgsmål om notation. At Ebbe Thue ikke har valgt denne alternative formulering kan skyldes, at han vil reservere symbolet a til at betegne en eventuel grænseværdi for følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, og derfor er tvunget til at bruge sidstnævnte lidt mere omstændelige notation for selve følgen.

De første par resultater om konvergente talfølger er på samme tid vigtige og nemme. Nøglen til at forstå de mere avancerede ε-δ- eller ε-N-beviser vi senere støder på, ligger i at forstå tankegangen i beviserne for Sætning 4.3–4.6, og altså herunder beviserne for Lemma 4.8–4.9. Også Sætning 4.10 (en konvergent følge er begrænset) og Sætning 4.14 (svage uligheder er bevaret under grænseovergang) er værd at lægge mærke til. Disse resultater fortæller tilsammen at „konvergente talfølger opfører sig pænt". ☕

3.1 Monotone talfølger

Efter de indledende resultater om konvergente talfølger er det på tide at finde kriterier for at en given talfølge faktisk er konvergent, og det er i studiet af talfølger og deres konvergens vi første gang støder på et eksempel på nytten af supremumsegenskaben ved $\mathbb{R}$. Navnet „Hovedsætning om monotone talfølger" er aldeles fortjent, for Sætning 4.17 er et uhyre nyttigt værktøj i både teori og praksis, som senere resultater og mange TØ-opgaver har vist. Lad os genkalde de essentielle dele af beviset:

Vi antager for nemhedens skyld at $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en voksende og begrænset reel talfølge, og vil vise at den er konvergent. Altså skal vi finde et reelt tal a som er grænseværdien for følgen, og til det formål betragter vi mængden $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ af følgens elementer. Bemærk at denne mængde kan være endelig eller uendelig, men den er i hvert fald ikke tom (den indeholder netop et element hvis følgen er konstant, ellers flere). Antagelsen om at følgen er begrænset betyder præcis at mængden A er begrænset, således specielt opad begrænset, og det giver derfor mening at sætte $a = \sup A$. Nu skal man vise at følgen faktisk konvergerer mod dette a, og til det formål benytter man sig af noget af det hårde arbejde vi allerede har udført, nemlig en række ligeværdige karakterisationer af den mindste øvre grænse for en mængde. Mere præcist lader man $\varepsilon > 0$ være givet, og udnytter punkt (e) i Sætning 3.10 til at konkludere at der findes et $x \in A$ med $x > a - \varepsilon$. Men dette x må være på formen a_N for et eller andet $N \in \mathbb{N}$ (for sådan er mængden A defineret). Ser vi nu på et vilkårligt $n \geq N$ får man at $a - \varepsilon \leq a_N \leq a_n \leq a$. Anden ulighed fordi følgen er voksende, og sidste ulighed fordi a specielt er *en* øvre grænse for A. Af disse uligheder ses let at $|a - a_n| < \varepsilon$. ☕

3.2 Delfølger

Det viser sig ganske ofte i matematik, at det er nyttigt midlertidigt at se bort fra noget af den information man har. Begrebet „delfølge" er et eksempel på dette. Ved at se bort fra nogle af leddene i en følge fremkommer en ny følge, som har (måske ville det være mere præcist at sige „kan have") mange fællestræk med den oprindelige følge. Fx er egenskaberne *monotonicitet*, *begrænsethed* og *konvergens* arvelige i den forstand, at hvis en følge har en af disse egenskaber, har enhver delfølge deraf samme egenskab. Som i mange andre sammenhænge kan man som oftest kun konkludere delvist den anden vej, men med en smule sund fornuft kan man ofte drage konklusioner om den oprindelige følge ud fra egenskaber ved en delfølge og en knivspids ekstra viden (for eksempel: en monoton følge med en konvergent delfølge er selv konvergent).

3.3 Rækker

Man kan som bekendt ikke umiddelbart danne summen $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ af uendelige mange tal. Hvis man ønsker at give mening til en sådan sum må man definere hvad man mener med den. Man ledes naturligt til at studere *afsnitssummerne* $s_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$, og disse udgør en følge $\{s_N\}_{N=1}^{\infty}$. Afsnitssummerne skal modellere en slags approksimation til værdien af den „uendelige sum“ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, og man siger derfor at rækken er konvergent, hvis følgen af afsnitssummer er konvergent. I tilfælde af konvergens bruger man symbolet $\sum_{i=1}^{\infty}$ om tallet $\lim_{N\to\infty} s_N$.

Det er klart fra definitionen at rækker og følger er nært beslægtede. Faktisk er en række jo bare en følge, hvor det n'te element i følgen er summen af det $n-1$'te element og et tal a_n, så man kan med god ret spørge hvorfor man skal interessere sig for rækker. Svaret er, at mange følger „i naturen“ opstår på denne måde, og det er derfor smart at studere rækkers opførsel en gang for alle for derved hurtigt at kunne afgøre spørgsmål om konkrete rækker man måtte støde på. Man får umiddelbart nogle regneregler for konvergente rækker fra de tilsvarende regneregler for konvergente følger ved blot at se på afsnitssummerne. ☕

Som for talfølger vil man gerne have et arsenal af værktøjer til at afgøre om en given række konvergerer. Det enkleste eksempel på en række er en såkaldt *geometrisk række*, og en sådan kan man umiddelbart afgøre hvorvidt konvergerer (dette er indholdet af Sætning 4.32). Denne viden kan man så bruge til at lave to vigtige kriterier for konvergens eller divergens for rækker med positive led ved at sammenligne med en til lejligheden konstrueret geometrisk række (Sammenligningskriteret 4.36, Kvotientkriteriet 4.38, Rodkriteriet 4.39). ☕

3.4 Cauchy-følger

Ved første læsning kan Cauchy-betingelsen godt virke lidt besynderlig, men man må ikke undervurdere nytten af begrebet Cauchy-følge. Eksempelvis er man ofte i en situation hvor man ønsker at vise, at en given følge er konvergent. Dette indebærer at man skal finde et fornuftigt bud på grænseværdien, og derefter vise at følgen konvergerer mod dette tal. Dette er ikke altid muligt, men vha. Sætning 4.44 ser vi, at det er nok at vise at følgen er en Cauchy-følge, og dette involverer *kun* at se på følgens elementer.

Beviset for at en Cauchy-følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent er ikke svært, hvis man blot kan huske de basale egenskaber ved følger som blev udledt i løbet af Kapitel 4. Første problem er at bestemme grænseværdien, men det kan gøres ved at vise, at en Cauchy-følge har en konvergent delfølge. Grænseværdien af denne må så nødvendigvis være grænseværdien for Cauchy-følgen, og man skal så bare eftervise at Cauchy-følgen faktisk konvergerer mod dette tal. Så meget for strategien; her kommer et bevis:

Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en Cauchy-følge. Vi påstår at den er begrænset, for hvis man udnytter Cauchy-betingelsen med $\varepsilon = 1$, får man et $N \in \mathbb{N}$ så $|a_m - a_n| < 1$ for alle $m, n \geq N$. Heraf følger specielt at $|a_n| \leq |a_N| + 1$ for alle $n \geq N$, og ved at sætte $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1)$ får vi at $|a_n| \leq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dernæst erindrer vi, at enhver følge har en monoton delfølge, og da denne delfølge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ i vores tilfælde tillige er begrænset, er delfølgen altså konvergent. Lad $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Sidste trin er at vise at a_n går mod a for $n \to \infty$. Ideen her er, at Cauchy-betingelsen fortæller, at hvis man går langt nok ud, er hvert par af elementer i følgen „tæt“ på hinanden, og hvis man vælger det ene element til at være element i den konvergente delfølge, er dette element altså „tæt“ på a. Mere formelt lader vi $\varepsilon > 0$ være givet, og vælger N så $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$ for alle $m, n \geq N$. Vi kan også vælge K så $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ for $k \geq K$. Vælg nu et k så stort at $k \geq K$ og så $n_k \geq N$. Så finder vi at $|a - a_n| \leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ for et vilkårligt $n \geq N$.

4 Kontinuitet

Efter vi er blevet fortrolige med de reelle tal og deres basale egenskaber, er det på tide at vende sig mod titlen på lærebogen og begynder at studere funktioner. Vi starter med det simpleste tilfælde, nemlig reelle funktioner af én reel variabel. Med dette menes funktioner $A \to \mathbb{R}$, hvor $A \subseteq \mathbb{R}$ er en delmængde af de reelle tal. I første omgang interesserer vi os primært for den klasse af funktioner som kaldes *kontinuerte*. En funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ kaldes kontinuert i punktet $a \in A$, hvis $f(x)$ er tæt på $f(a)$ når blot $x \in A$ er tæt på a. Fra vores erfaring med talfølger er formaliseringen af dette intet problem, og den præcise definition er derfor

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in A : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4.1}$$

Hvis f er kontinuert i ethvert punkt $a \in A$ siges f kort at være kontinuert, men hvis man vil være præcis siger man kontinuert overalt.

Bemærk, at man kun stiller krav til de reelle tal x for hvilke funktionen er defineret. Det betyder, at hvis A indeholder et såkaldt isoleret punkt a, er f kontinuert i punktet a uafhængig af hvordan f i øvrigt opfører sig. At a er et isoleret punkt vil sige, at der findes et positivt tal $r > 0$, så $(a - r, a + r) \cap A = \{a\}$. Opgave 154 går netop ud på at vise dette faktum, men lad os gøre det her: Lad $\varepsilon > 0$ være givet, og sæt $\delta = r$. Antag nu at $x \in A$ og at $|x - a| < r$. Vi skal så vise at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Men da $x \in A$ og afstanden til a er mindre end r, følger af valget af r at $x = a$, og derfor er $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. ☕

Man kunne også forestille sig at definitionen af kontinuitet baseredes på ideen, at hvis x nærmer sig a, skal $f(x)$ nærme sig $f(a)$. Vores viden om følger og de tilknyttede begreber om konvergens tillader os at præcisere dette, og vi ender med definitionen af *følgekontinuitet* i a: Som bekendt siges $f\colon A \to \mathbb{R}$ at være følgekontinuert i $a \in A$, hvis det for *enhver* følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ der forløber i A og konvergerer mod a gælder, at følgen $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi $f(a)$. Betingelsen at $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ forløber i A betyder selvfølgelig blot at $x_n \in A$ for alle n, og er nødvendig for at $f(x_n)$ giver mening.

Denne tilsyneladende alternative definition af kontinuitet er heldigvis ækvivalent med den første, hvilket er indholdet af Sætning 5.7. I praksis er det oftest lettest at vise kontinuitet ud fra den første definition, for det er svært at håndtere samtlige følger som konvergerer mod a. På den anden side er følgekontinuitetskarakterisationen ofte anvendelig til at *afvise* kontinuitet i et punkt a, for til det formål skal man jo blot producere én følge som konvergerer mod a, men hvor følgen af funktionsværdier ikke konvergerer mod funktionsværdien i a. ☕ Se fx besvarelsen af TØ-opgaven 155 nedenfor.

Vanen tro udledes et antal regneregler, som fortæller at kontinuitet er bevaret under de operationer man kan finde på at udføre med funktioner, såsom punktvis sum og produkt, og sammensætning. Disse resultater er relativt elementære. De langhårede resultater fra Kapitel 5 kommer umiddelbart efter hinanden i afsnit 5.3, som ikke uden grund har overskriften „Hovedsætninger om kontinuerte funktioner af en reel variabel": Hvis $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion defineret på det lukkede og begrænsede interval $[a,b]$ gælder at

- f er begrænset på $[a,b]$,
- f antager en størsteværdi og en mindsteværdi på $[a,b]$,
- for alle tal d mellem $f(a)$ og $f(b)$ findes der et tal $x \in (a,b)$ så $f(x) = d$.

I lærebogen antages kontinuitet af de mest elementære funktioner såsom de trigonometriske funktioner sin, cos, tan, eksponential- og logaritmefunktionerne exp og log og kvadratrodsfunktionen for kendt fra gymnasiet. Det vil vi også gøre, men jeg henleder opmærksomheden på bemærkningen til Sætning 5.5 på side 338, som diskuterer hvordan et bevis for kontinuitet af disse funktioner nødvendigvis må tage afsæt i en præcis definition af funktionerne, og dette kan fx gøres vha. teorien for uendelige rækker. Bemærk endvidere, at vi med de til rådighed stående værktøjer faktisk kan bevise kontinuiteten af enhver *polynomiumsfunktion*. ☕

5 De komplekse tal

Vi nærmer os slutningen på resuméet af efterårssemesterets pensum. Den opmærksomme læser har bemærket, at jeg i min ellers nogenlunde kronologiske gennemgang helt har undladt at omtale komplekse tal, talfølger og rækker. Dette skyldes ikke at forståelse for de komplekse tals natur ikke er vigtig, men i dette kursus spiller de ikke nogen fremtrædende rolle, og de fleste spørgsmål om $\mathbb{C}$ kan, i dette kursus, lige så godt formuleres som spørgsmål om $\mathbb{R}^2$; vi har ofte set at man kommer langt ved at se på real- og imaginærdel hver for sig.

Hvis man skal nævne et par resultater fra Kapitel 2 må det være De Moivres formel (Sætning 2.20) og de i beviset herfor indgående trigonometriske additionsformler (Sætning 2.17).

6 Tip en 15'er

Her har du en chance for at teste din forståelse for det gennemgåede pensum. Det er naturligvis tilladt at bruge bogen ved udfyldelse af skemaet. Spørgsmålene varierer en del i sværhedsgrad, og der er ikke gjort noget forsøg på at ordne dem efter denne. Den rigtig flittige studerende skriver et argument ned for de påstande man mener er sande, og et modeksempel eller et modbevis til de påstande man ikke mener holder. En facitliste præsenteres engang i det nye år.

Nr.	Påstand	Sand	Falsk
1	Hvis en følge af rationale tal er konvergent, er grænseværdien et rationelt tal		
2	Produktet af to rationelle tal er et rationelt tal		
3	Hvis en følge af hele tal er konvergent, er grænseværdien et helt tal		
4	Hvis en følge indeholder en konvergent delfølge, er følgen selv konvergent		
5	En strengt voksende funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ antager ikke en mindsteværdi		
6	Hvis en funktion antager sin maksimumsværdi, er funktionen kontinuert		
7	En endelig, ikke-tom delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ har et infimum, og dette er element i A		
8	Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergente, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent		
9	En kontinuert funktion $(0,1) \to \mathbb{R}$ er begrænset		
10	Hvis $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert i 0, findes der et $r > 0$ så f er kontinuert på intervallet $(-r, r)$		
11	Hvis en funktion antager sin største- og mindsteværdi i samme punkt, er funktionen kontinuert		
12	En Cauchy-følge er monoton		
13	Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er absolut konvergente, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent		
14	Hvis $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en konvergent følge, $a_n \in A$ for alle n, og $f\colon A \to \mathbb{R}$ er kontinuert, er $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en konvergent følge		
15	Hvis $f\colon A \to \mathbb{R}$ er kontinuert og ikke har nogen nulpunkter, har f konstant fortegn		

7 Besvarelse af fadølsopgave

Til en TØ så vi på følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ givet ved

$$a_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Elementære overvejelser viste at $0 \leq a_n \leq 1$ for alle n, og følgen er derfor begrænset. Ydermere er $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} > 0$, og følgen er derfor voksende. Altså er den konvergent jf. hovedsætningen om monotone talfølger. Fadølsopgaven gik på at bevise, at grænseværdien er $a = \log 2$.

Vi skal bruge dobbeltuligheden

$$\log(m+1) - \log(m) \leq \frac{1}{m} \leq \log(m) - \log(m-1) \tag{7.1}$$

for alle naturlige tal $m \geq 2$. At dette er sandt kan fx ses ved at observere, at for $m-1 \leq x \leq m$ er $1/m \leq 1/x$, og integralet $\int_{m-1}^{m} 1/x\, dx = \log(m) - \log(m-1)$ er derfor større end integralet af den konstante funktion $1/m$ over samme interval. Tilsvarende har vi for $m \leq x \leq m+1$ at $1/x \leq 1/m$, hvilket giver den venstre ulighed.

Summerer vi nu (7.1) for $m = n+1, \ldots, 2n$ får vi i midten a_n, mens de yderste summer bliver teleskoperende, og vi opnår

$$\log(2n+1) - \log(n+1) = \log\frac{2n+1}{n+1} \leq a_n \leq \log(2n) - \log(n) = \log 2. \tag{7.2}$$

For $n \to \infty$ har vi at $\frac{2n+1}{n+1}$ går mod 2, og af klemmelemmaet følger så at a_n går mod $\log 2$ for $n \to \infty$.

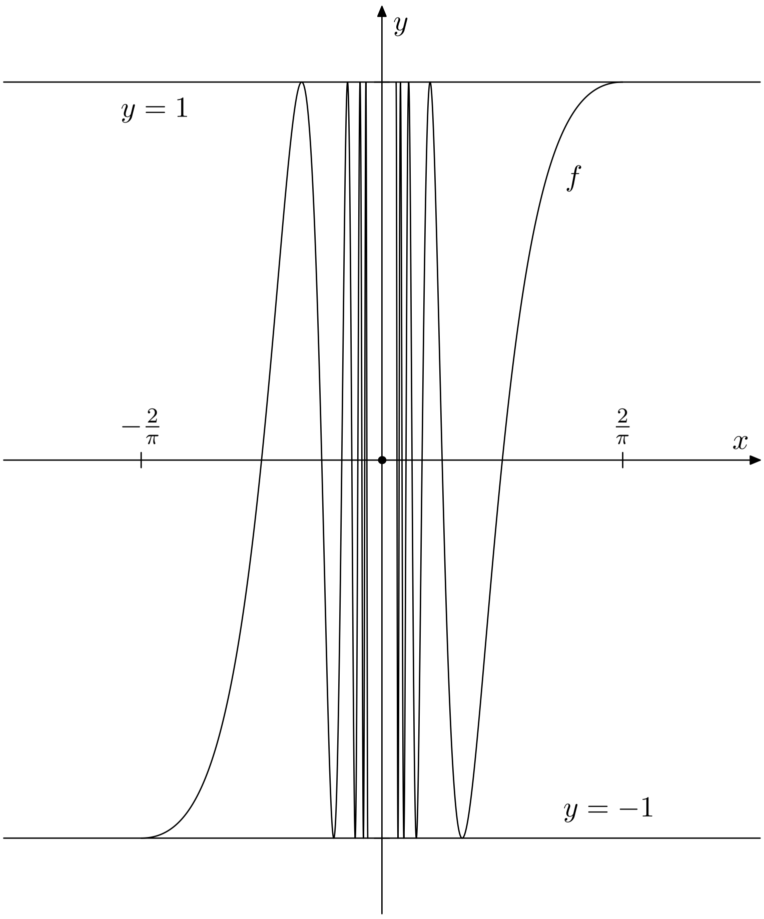
8 Udvalgt TØ-opgave

Der har været nogle TØ-opgaver, som fortjener en ekstra omtale og en grundigere behandling end vi har gjort til øvelserne. Desværre kunne jeg ikke nå mere end en enkelt af disse, og vi må derfor ved lejlighed snakke om de øvrige opgaver.

Opgave 155 På figurerne 1 og 2 nedenfor er indtegnet de ønskede grafer. På mængden $\mathbb{R} - \{0\}$ kan vi tænke på f som sammensætningen af de to kontinuerte funktioner $x \mapsto \frac{1}{x}$ og $y \mapsto \sin y$, og den sammensatte funktion er derfor kontinuert på $\mathbb{R} - \{0\}$.

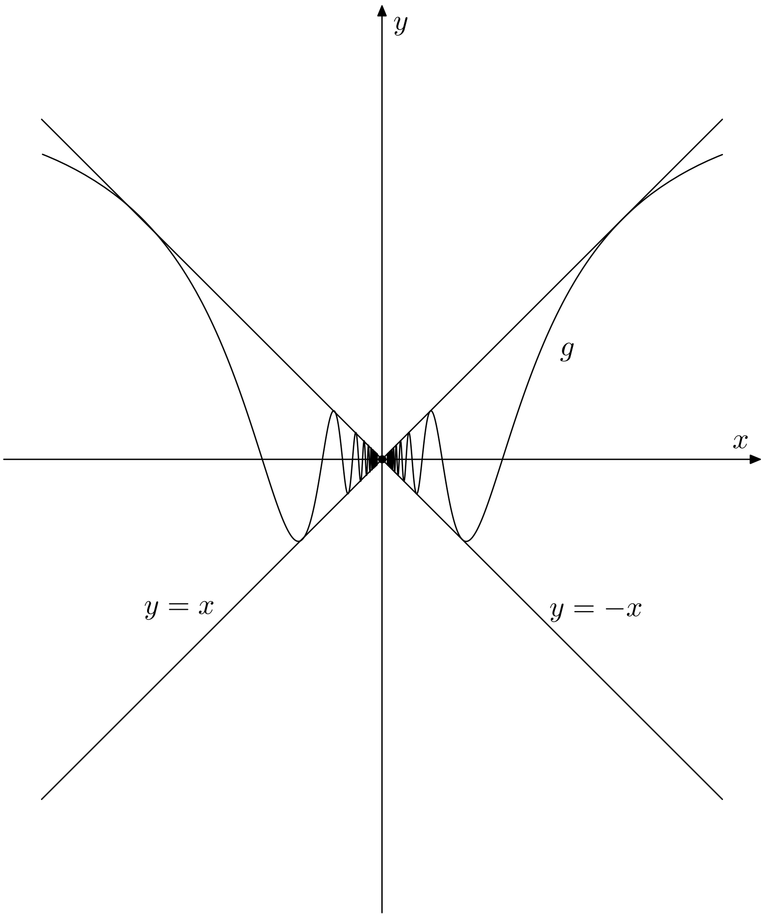
For at vise, at f ikke er kontinuert i 0, vil vi vise at f ikke er følgekontinuert i 0. Til det formål er det tilstrækkeligt at producere en følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ som konvergerer mod 0, men for hvor følgen af funktionsværdier $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ikke konvergerer mod $f(0) = 0$. Tegningen sandsynliggør, at det endda er muligt at finde en sådan følge for hvilken $f(x_n)$ er konstant lig 1, og en sådan vil vi derfor søge.

At $f(x) = 1$ vil sige at $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ for et $n \in \mathbb{Z}$. Vi sætter derfor $x_n = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}$ for $n \in \mathbb{N}$, og det er let at se at denne følge går mod 0 for $n \to \infty$. Samtidig har vi pr. konstruktion at $f(x_n) = 1$, og følgen $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ er derfor konvergent, men med grænseværdi 1. Dette viser, at f ikke er følgekontinuert i 0 og derfor ikke kontinuert i 0.



Figur 1: Grafen for f samt linjerne med ligningerne $y = \pm 1$.

Betragter vi nu funktionen $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $g(x) = xf(x)$ ser vi med samme argument som før, at g er kontinuert på $\mathbb{R} - \{0\}$. Vi har desuden for ethvert $x \in \mathbb{R}$ at $|g(x)| \leq |x|$. Kontinuitet i 0 følger nu direkte fra definitionen, for hvis $\varepsilon > 0$ er givet, sætter vi $\delta = \varepsilon$. Så får vi, at hvis $|x - 0| = |x| < \delta$, er $|g(x) - g(0)| = |g(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$. $\square$



Figur 2: Grafen for g samt linjerne med ligningerne $y = \pm x$.

9 Afleveringsopgaver

I det følgende er der forslag til besvarelse af efterårskvarterets afleveringsopgaver, krydret med kommentarer.

Aflevering 1 (Opgave 62). *Bevis ved induktion, at hvis $r \geq -1$ er et reelt tal, så gælder* Bernoullis ulighed

$$(1+r)^n \geq 1 + rn \tag{9.1}$$

for $n \in \mathbb{N}$. $\diamond$

Besvarelse. Udsagnet (9.1) er trivielt rigtigt for $n = 1$ (endda for $n = 0$). Antag derfor nu (9.1). Så er

$$\begin{aligned}(1+r)^{n+1} &= (1+r)^n \cdot (1+r) \geq (1+rn) \cdot (1+r) \\ &= 1 + (n+1)r + nr^2 \geq 1 + (n+1)r\end{aligned}$$

hvor første ulighedstegn følger af induktionsantagelsen og antagelsen om at $1 + r \geq 0$, og det andet ulighedstegn følger fordi nr^2 er ikke-negativ. Dette færdiggør induktionsskridtet og dermed beviset. $\square$

Aflevering 2 (Opgave 42). *Lad* $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *betegne enhedscirklen i* $\mathbb{C}$*, og lad mængderne* A, B, C, D *være defineret ved*

$$A = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z_1 \in E \exists z_2 \in E \colon w = z_1 + z_2\}, \tag{9.2}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \mid \forall z_1 \in E \forall z_2 \in E \colon w = z_1 + z_2\}, \tag{9.3}$$

$$C = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z_1 \in E \forall z_2 \in E \colon w = z_1 + z_2\}, \tag{9.4}$$

$$D = \{w \in \mathbb{C} \mid \forall z_1 \in E \exists z_2 \in E \colon w = z_1 + z_2\}. \tag{9.5}$$

Giv konkrete beskrivelser af A, B, C *og* D. $\diamond$

Før vi kommer til et forslag til en besvarelse af denne opgave er det på sin plads med et par generelle kommentarer.

Mængdekonstruktioner

Ofte har man en mængde X, og interesserer sig for en vis delmængde af X, nemlig delmængden bestående af de elementer som har en vis egenskab. For at gøre livet lettere for sig selv og andre har man indført en særlig notation for dette:

$$\{x \in X \mid P(x)\} \tag{9.6}$$

Dette generelle udtryk skal læses: "Mængden af de $x \in X$ som har egenskaben P". Udtrykket $P(x)$ kan være mere eller mindre kompliceret, men det vigtige er at det er et udsagn hvis sandhedsværdi afhænger af x. Et par eksempler illustrerer hvordan man kan bruge denne notation:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon n > x\}$$

Den første er simpelthen mængden af positive reelle tal (alle tal x med den egenskab at $x > 0$); den anden mængde er $\mathbb{R} - \{0\}$, thi ethvert reelt tal som ikke er 0 har et positivt kvadrat. Den tredje mængde er løsningsmængden (inden for $\mathbb{R}$) til ligningen $ax^2 + bx + c = 0$, også kendt som mængden af rødder i polynomiet $ax^2 + bx + c$. Hvis $a \neq 0$ og $b^2 - 4ac \geq 0$ ved vi fra gymnasiet at mængden består af et eller to tal, og at den faktisk blot er mængden $\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\}$. Den sidste af de ovenfor nævnte mængder består af de reelle tal x for hvilke der eksisterer et naturligt tal n som er større end x. Bemærk at n godt kan afhænge af x, og Arkimedes' Princip (Sætning 3.16) fortæller at denne mængde faktisk er hele $\mathbb{R}$.

Visse delmængder af de reelle tal er specielt vigtige, og man har derfor indført både en særlig notation og et særligt ord for dem, nemlig *intervaller*. Hvis $a < b$ er to reelle tal definerer vi følgende:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \tag{9.7}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \tag{9.8}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Intervallet (9.7) kaldes *det åbne interval* fra a til b, og (9.8) kaldes *det lukkede interval* fra a til b.

Nogle gange tillader man i stedet for a at skrive symbolet $-\infty$, og i stedet for b at skrive symbolet ∞. I disse tilfælde definerer vi fx

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \qquad \text{og} \qquad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}.$$

At vise lighed mellem mængder

Hvis man skal vise at to mængder R og S er ens, skal man normalt vise at R er en delmængde af S, og at S er en delmængde af R. I symboler vil dette sige, at for at vise $R = S$ skal man vise $R \subseteq S$ og $S \subseteq R$. For at vise inklusionen $R \subseteq S$ skal man vise, at ethvert element i R også er element i S; i symboler at $x \in R \implies x \in S$.

Når man skal gøre dette, skal man altså tage et vilkårligt element x i R, og ud fra snedige deduktioner konkludere at x faktisk er element i S. Et sådant bevis bør altid starte med at man gør sig klart hvad det faktisk vil sige for x at være element i R, for det er den eneste information man har at arbejde med.

Hvis R og S begge er givet på formen (9.6), altså fx $R = \{x \in X \mid P(x)\}$ og $S = \{x \in X \mid Q(x)\}$ betyder det at $x \in R$ altså hverken mere eller mindre end at $P(x)$ er sand. Når man skal vise at noget er element i S skal man vise at betingelsen Q er opfyldt for dette element. Dette er temmelig abstrakt, men behandlingen af mængden A i besvarelsen nedenfor skulle gerne illustrere hvad der menes.

Hvis man ønsker at vise at en mængde R er tom dur ovennævnte fremgangsmåde ikke helt. Man skal i stedet blot vise, at hvis der er et element $x \in R$ fører dette til en modstrid. Hvis den blotte eksistens af et element i R fører til en modstrid, må det nødvendigvis være fordi der ikke er nogle elementer deri, og $R = \varnothing$.

Besvarelse (af Aflevering 2). Vi ser på mængden $A = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z_1 \in E \exists z_2 \in E\colon w = z_1 + z_2\}$. Denne mængde består altså af de komplekse tal w for hvilke der eksisterer $z_1 \in E$ og $z_2 \in E$ hvis sum er w. Man får hurtigt en idé om at sådanne w må have en længde der er mindre eller lig 2, og lidt ekstra overvejelse giver at alle sådanne w faktisk bør kunne skrives som en sum af to enhedsvektorer.

Vi formoder altså at $A = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 2\}$ og ønsker at vise dette. Til dette formål skal vi som nævnt ovenfor vise to inklusioner, og vi starter med at vise $\subseteq$.

Lad derfor nu $w \in A$ være givet. Vi skal vise at $|w| \leq 2$, for det er præcis hvad det vil sige at være element i mængden på højre side. Vores viden, at $w \in A$, fortæller at der må findes $z_1, z_2 \in E$ med den egenskab at $w = z_1 + z_2$. Men dette giver os en mulighed for at vurdere på $|w|$, fordi jf. trekantuligheden er

$$|w| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$$

da jo z_1 og z_2 er enhedsvektorer. Dette viser den første inklusion.

For at vise den anden inklusion skal vi lade $w \in \mathbb{C}$ være et vilkårligt tal med $|w| \leq 2$, og vi ønsker at vise at $w \in A$. Vi skal derfor producere (vise eksistensen af) to enhedsvektorer z_1, z_2 med $w = z_1 + z_2$. Betragt Figur 3 nedenfor. Det grå område repræsenterer mængden $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 2\}$, og w illustrerer et vilkårligt element heri. Cirklen med radius 1 og w som centrum er indtegnet, og det ene skæringspunkt med E kaldes z_1 (på figuren det øverste skæringspunkt). Da har vi klart at $z_1 \in E$. Vi sætter nu $z_2 = w - z_1$, og da $|z_2|$ er afstanden mellem w og z_1 bliver z_2 også en enhedsvektor. Altså har vi som ønsket to enhedsvektorer z_1, z_2 som opfylder $w = z_1 + z_2$. En geometrisk overvejelse viser i øvrigt at vi også kan definere z_2 som det andet skæringspunkt mellem cirklen og E.

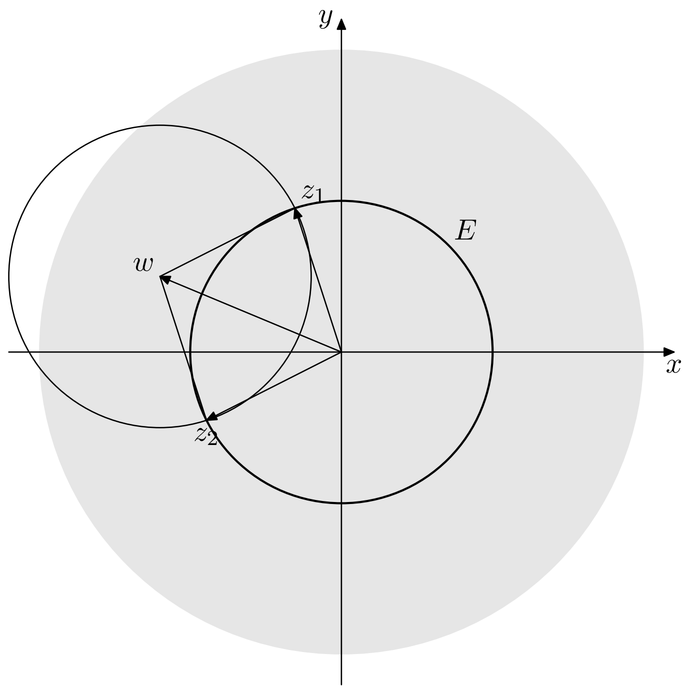
Det eneste problem er nu at indse, at cirklen med centrum i w og radius 1 altid vil skære E i mindst ét punkt. Dette tager vi for geometrisk oplagt. (I det tilfælde hvor $w = 0$ er der uendeligt mange skæringspunkter; i så fald tager vi bare $z_1 = 1$, $z_2 = -1$. I det tilfælde hvor $|w| = 2$ er der ét skæringspunkt, og vi sætter z_1 og z_2 til at være dette skæringspunkt).

Mængden $B = \{w \in \mathbb{C} \mid \forall z_1 \in E \forall z_2 \in E \colon w = z_1 + z_2\}$ består af de $w \in \mathbb{C}$ med den egenskab, at for et vilkårligt valg af $z_1, z_2 \in E$ har vi at $w = z_1 + z_2$. Specielt konkluderer vi om et sådant w at $w = 1 + 1 = -1 - 1$, og da dette er umuligt er mængden B tom.

Bemærk hvordan jeg har brugt den viden jeg har til rådighed om at $w \in B$: Da w har egenskaben „$\forall z_1 \in E \forall z_2 \in E \colon w = z_1 + z_2$“ kan jeg frit vælge z_1 og z_2 således at konklusionen $w = z_1 + z_2$ holder. Dette bruger jeg til at vælge nogle ikke særlig fantasifulde værdier af z_1 og z_2, og konkluderer at w både er lig 2 og -2, hvilket er en umulighed.

Mængden $C = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z_1 \in E \forall z_2 \in E \colon w = z_1 + z_2\}$ behandles på stort set samme måde. Hvis der er et $w \in C$ må der, hørende til dette w, være et z_1 med egenskaben „$\forall z_2 \in E : w = z_1 + z_2$“. Fra dette konkluderer vi at $w = z_1 + 1 = z_1 - 1$, hvilket er umuligt.

Se nu endelig på $D = \{w \in \mathbb{C} \mid \forall z_1 \in E \exists z_2 \in E \colon w = z_1 + z_2\}$. Et w i D har den egenskab, at for en vilkårlig enhedsvektor z_1 skal der findes



Figur 3: At finde z_1 og z_2.

en enhedsvektor z_2 så $w = z_1 + z_2$. Et geometrisk argument fortæller at „D består af de punkter, som cirklerne med centrum i punkter på E og radius 1 har til fælles", og man ser hurtigt at denne mængde blot består af det ene komplekse tal 0. Vores formodning er altså at $D = \{0\}$.

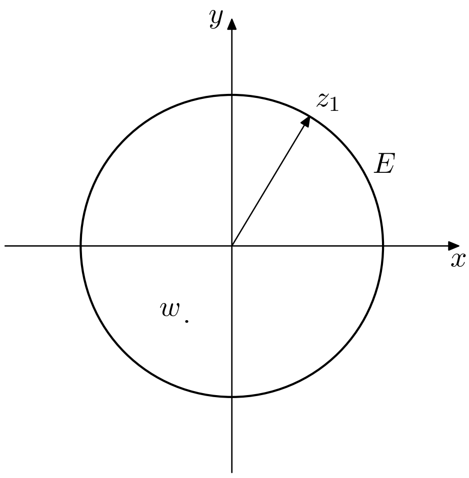
Her er det lettest at vise $\supseteq$ først, altså at vise at 0 er et element i D. Vi skal altså bevise

$$\forall z_1 \in E \exists z_2 \in E : 0 = z_1 + z_2.$$

Lad derfor $z_1 \in E$ være givet. Vi skal finde et z_2 som opfylder betingelsen $0 = z_1 + z_2$, og vi er derfor tvunget til at sætte $z_2 = -z_1$. Heldigvis er det således, at når $z_1 \in E$ vil også $-z_1 \in E$, så z_2 opfylder betingelsen $z_2 \in E$, og summen af de to er klart 0. Dette viser $\supseteq$.

Vi vil nu vise $D \subseteq \{0\}$, altså at $w \in D \implies w = 0$ (at være element i en etpunktsmængde er jo det samme som at være lig elementet deri). Dette vil vi gøre ved kontraponering; så vi vil vise at $w \neq 0 \implies w \notin D$. Se på Figur 4. Da $w \neq 0$ findes der en enhedsvektor z_1 „modsat" w (vi kan faktisk definere z_1 ved formlen $z_1 = -\frac{w}{|w|}$). Hvis der skulle findes et z_2 så $w = z_1 + z_2$ skulle vi altså sætte $z_2 = w - z_1 = w + \frac{w}{|w|}$, men så får vi

$$|z_2| = |w + \tfrac{w}{|w|}| = |w(1 + \tfrac{1}{|w|})| = |w|(1 + \tfrac{1}{|w|}) > 1,$$



Figur 4: At vise $D = \{0\}$.

så z_2 kan ikke være en enhedsvektor. Dette viser at $w \neq 0 \implies w \notin D$, og vi konkluderer at $D = \{0\}$. $\square$

Aflevering 3 (Opgave 55). *Idet $a, b \in \mathbb{C}$ er givne, betragtes fjerdegradsligningen*

$$z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0. \tag{9.9}$$

(a) Bevis, at et komplekst tal z opfylder (9.9), hvis og kun hvis $z + z^{-1}$ er rod i andengradspolynomiet $t^2 + at + (b-2)$.

(b) Find samtlige komplekse løsninger til (9.9) i det tilfælde hvor $a = -1 - \sqrt{2}$ og $b = 2 + \sqrt{2}$. $\diamond$

Besvarelse. Først observerer vi at 0 oplagt ikke er rod i det givne fjerdegradspolynomium. Omskrivningen

$$\begin{aligned} z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 &= z^2(z^2 + z^{-2} + az + az^{-1} + b) \\ &= z^2((z + z^{-1})^2 + a(z + z^{-1}) + b - 2) \end{aligned}$$

viser tydeligt, at hvis z er løsning til (9.9) (og z^{-1} derfor giver mening jf. ovenstående), så er $z + z^{-1}$ rod i andengradspolynomiet. Omvendt kan man også aflæse, at hvis z har den egenskab at $z + z^{-1}$ er rod i andengradspolynomiet, så er z rod i fjerdegradspolynomiet.

At finde de komplekse løsninger til (9.9) er derfor ækvivalent til at finde de komplekse tal z for hvilke $z + z^{-1}$ er rod i $t^2 + at + b - 2$. For de givne værdier af a og b bliver dette $t^2 + (-1 - \sqrt{2})t + \sqrt{2}$, og dette andengradspolynomium har diskriminanten $(-1 - \sqrt{2}^2 - 4\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$, og rødderne er derfor givet ved

$$t = \frac{1+\sqrt{2} \pm (\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Vi skal altså nu finde de komplekse tal z for hvilke $z + z^{-1} = 1$ eller $z + z^{-1} = \sqrt{2}$. Den første af disse ligninger omskrives til $z^2 - z + 1 = 0$, og dette andengradspolynomium har diskrimanten $1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$, og løsningerne til ligningen er derfor

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \tag{9.10}$$

Den anden ligning omskrives tilsvarende til $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$, og vi finder diskriminanten $2 - 4 = -2 = (\sqrt{2}i)^2$. Løsningerne her er altså

$$z = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i. \tag{9.11}$$

Tilsammen beskriver (9.10) og (9.11) samtlige løsninger til (9.9). □

Aflevering 4 (Opgave 77). *Lad A og B være to ikke-tomme, opad begrænsede delmængder af $\mathbb{R}$. Bevis at*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \tag{9.12}$$

altså at $\sup(A \cup B)$ *er det største af de to tal* $\sup A$ *og* $\sup B$. ◇

Besvarelse. Lad os først indse at $\sup(A \cup B)$ overhovedet har en mening; altså at der findes et reelt tal som fortjener navnet „den mindste øvre grænse for foreningsmængden af A og B“. Vi vil med andre ord først vise, at $A \cup B$ er ikke-tom og opad begrænset, for det er netop de to kriterier der skal være opfyldt for at man kan tale om supremum.

At $A \cup B$ er ikke-tom er klart, når både A og B er ikke-tomme. Det svære er derfor at komme med et godt bud på en øvre grænse, men i lyset af det vi skal vise gætter vi på, at $\max\{\sup A, \sup B\}$ er en øvre grænse for $A \cup B$: Lad $x \in A \cup B$ være vilkårlig. Vi skal vise at $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Hvis $x \in A$ er $x \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ pr. definition af supremum, og tilsvarende i det tilfælde hvor $x \in B$.

Dette viser at $\max\{\sup A, \sup B\}$ er en øvre grænse for $A \cup B$, og derfor giver $\sup(A \cup B)$ mening. Men da $\sup(A \cup B)$ pr. definition er *den mindste* øvre grænse har vi samtidig vist at $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

Da $A \cup B$ er opad begrænset og A og B er ikke-tomme delmængder, giver Opgave 70 at $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ og $\sup B \leq \sup(A \cup B)$. Men disse to uligheder giver at $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$, og dette sammenholdt med den ovenfor viste ulighed viser identiteten (9.12). □

Aflevering 5 (Opgave 100). *Lad a_n være en talfølge, og lad talfølgen b_n være defineret ved*

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Det n'te element i b-følgen er altså det aritmetiske gennemsnit af de første n elementer i a-følgen.

(a) Vis, at hvis $a_n \to 0$ for $n \to \infty$, så gælder også $b_n \to 0$ for $n \to \infty$.

(b) Vis, at hvis $a_n \to a$ for $n \to \infty$, så gælder også $b_n \to a$ for $n \to \infty$. ◇

Besvarelse. At b-følgen går mod 0 betyder med symboler at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |b_n| < \varepsilon. \tag{9.13}$$

Lad derfor ε være givet. Der findes, da $a_n \to 0$ for $n \to \infty$, et $M \in \mathbb{N}$ med den egenskab, at $|a_n| < \varepsilon/2$ for alle $n \geq M$. For $n \geq M$ kan vi derfor vurdere $|b_n|$ ved hjælp af trekantuligheden

$$\begin{aligned} |b_n| &= \left|\frac{a_1 + \cdots + a_M}{n} + \frac{a_{M+1} + \cdots + a_n}{n}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_1 + \cdots + a_M}{n}\right| + \frac{|a_{M+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \\ &< \frac{|a_1 + \cdots + a_M|}{n} + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Det sidste ulighedstegn følger af at der er $n - M \leq n$ led i tælleren som hver er mindre end $\varepsilon/2$. Vi kan nu vælge $N \geq M$ så stor at det første led er mindre end $\varepsilon/2$ for $n \geq N$, og dette er altså det ønskede N.

I det generelle tilfælde, hvor $a_n \to a$ for $n \to \infty$ sætter vi $x_n = a_n - a$. Så indses det let at $x_n \to 0$ for $n \to \infty$. Vi får desuden at

$$b_n = \frac{a + x_1 + \cdots + a + x_n}{n} = a + \frac{x_1 + \ldots x_n}{n},$$

og da $x_n \to 0$ følger af det ovenfor viste at $(x_1 + \cdots + x_n)/n \to 0$ for $n \to \infty$, og heraf ser vi altså at $b_n \to a$ for $n \to \infty$. □

Vi ved at et *nødvendigt* kriterie for at en række $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent er, at følgen af led b_n konvergerer mod 0 for $n \to \infty$. Vi ved også, at dette ikke er et *tilstrækkeligt* kriterie, fx fordi den såkaldte *harmoniske række*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

er divergent. Næste afleveringsopgave demonstrerer nogle ekstra antagelser om leddene der kan sikre konvergens.

Aflevering 6 (Opgave 142). *Antag rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er* alternerende, *altså at leddene* a_n *er reelle og skiftevis positive og negative (i denne opgave: positiv for n ulige, negativ for n lige), og at følgen* $|a_n|$ *af numeriske værdier af led er aftagende og konvergent mod* 0*. Lad som sædvanlig* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *betegne den N'te afsnitssum af rækken.*

(a) Bevis at

$$s_{2k} \leq s_{2k-1} \qquad\qquad s_{2k+1} \geq s_{2k}$$

for $k \in \mathbb{N}$.

(b) Bevis at

$$s_{2k-1} \geq s_{2k+1} \qquad\qquad s_{2k} \leq s_{2k+2}$$

for $k \in \mathbb{N}$.

(c) Slut af ovenstående, at følgerne s_{2k-1} *og* s_{2k} *af henholdsvis uligenummererede og ligenummererede afsnitsummer er monotone og begrænsede, og derfor konvergente.*

(d) Bevis at $\lim_{k\to\infty} s_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k}$*, og slut heraf at* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er konvergent.* $\diamond$

Besvarelse. Vi har at $s_{2k} = s_{2k-1} + a_{2k} < s_{2k-1}$ da a_{2k} er negativ. Tilsvarende er $s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} > s_{2k}$ da a_{2k+1} er positiv.

Lignende argumenter beviser de næste uligheder: For alle k er $a_{2k} + a_{2k+1} \leq 0$, da a_{2k} er negativ, a_{2k+1} er positiv *og* $|a_{2k}| \geq |a_{2k+1}|$. Vi har derfor $s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1} \geq s_{2k-1}$. På helt samme måde indses at størrelsen $a_{2k+1} + a_{2k+2}$ altid er ikke-negativ, og derfor er $s_{2k+2} = s_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2} \geq s_{2k}$.

Følgen s_{2k-1} er således aftagende (og derfor klart opad begrænset, fx af s_1), og følgen s_{2k} er voksende (og derfor klart nedad begrænset, fx af s_2). For ethvert k har vi desuden at $s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k-1}$, hvor første ulighed skyldes det netop skrevne, og anden ulighed er vist ovenfor. Altså er s_2 en nedre grænse for følgen s_{2k-1}. Tilsvarende finder vi at $s_1 \geq s_{2k+1} \geq s_{2k}$ for ethvert k, og derfor er s_1 en øvre grænse for følgen s_{2k}.

Dette viser at følgerne s_{2k-1} og s_{2k} begge er monotone (henholdsvis aftagende og voksende) og begrænsede (opad af tallet $s_1 = a_1$, nedad af tallet $s_2 = a_1 + a_2$). Jf. hovedsætningen 4.17 om monotone talfølger er begge følger derfor konvergente.

Differensfølgen $s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k}$ er derfor også konvergent, og om grænseværdierne gælder sammenhængen

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} - \lim_{k\to\infty} s_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} - s_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = 0.$$

Sidste lighedstegn følger fordi følgen $|a_n| \to 0$ for $n \to \infty$ pr. antagelse, og derfor konvergerer følgen a_n også mod 0, og endelig konvergerer delfølgen a_{2n} derfor også mod 0.

Lad s betegne den fælles grænseværdi for følgerne s_{2k-1} og s_{2k}. Vi ønsker nu at vise, at s_n går mod s for $n \to \infty$. Lad til det formål $\varepsilon > 0$ være givet. Vælg K_1 så $|s_{2k-1} - s| < \varepsilon$ for $k \geq K_1$, og K_2 så $|s_{2k} - s| < \varepsilon$ for $k \geq K_2$. Sæt $N = 2\max(K_1, K_2)$. Vi påstår at dette N afparerer det givne ε, så lad $n \in \mathbb{N}$ være givet, og antag at $n \geq N$. Vi skal så vise at $|s_n - s| < \varepsilon$: Hvis n er ulige, er $n = 2k - 1$ for et $k = (n+1)/2 > N/2 \geq K_1$, og derfor er $|s_n - s| = |s_{2k-1} - s| < \varepsilon$ pr. valg af K_1 og N. Tilsvarende, hvis n er lige, er $n = 2k$ for et $k = n/2 \geq N/2 \geq K_2$, og derfor er $|s_n - s| = |s_{2k} - s| < \varepsilon$ pr. valg af K_2 og N. Dette viser at $s_n \to s$ for $n \to \infty$, og dermed pr. definition at rækken $\sum_{n=1} a_n$ er konvergent med sum s. □

Aflevering 7 (Opgave 196). *Lad U_1 og U_2 være åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$.*

(a) Vis at foreningsmængden $U_1 \cup U_2$ er åben.

(b) Vis at snittet $U_1 \cap U_2$ er åben. ◇

Besvarelse. Dette er et klassisk eksempel på den slags beviser som essentielt kun kan forløbe på en måde, og det *burde* derfor ikke volde nogen problemer, såfremt man har forstået definitionen af *åben mængde* tilstrækkelig godt.

Lad $x \in U_1 \cup U_2$. Det vil sige at $x \in U_1$ eller $x \in U_2$. Hvis $x \in U_1$ findes der, da U_1 er åben, et $r > 0$ så $B_r(x) \subseteq U_1 \subseteq U_1 \cup U_2$. Hvis $x \in U_2$ argumenteres tilsvarende. Altså er $U_1 \cup U_2$ åben.

Lad $x \in U_1 \cap U_2$. Det vil sige at $x \in U_1$ og $x \in U_2$. Der findes derfor $r_1 > 0$ og $r_2 > 0$ så $B_{r_1}(x) \subseteq U_1$ og $B_{r_2}(x) \subseteq U_2$. Sæt $r = \min(r_1, r_2)$. Så er $B_r(x) \subseteq B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x) \subseteq U_1 \cap U_2$. Dette viser at $U_1 \cap U_2$ er åben. □