

## Note 3

Dette bliver den første og eneste note i andet kvarter. Til gengæld bliver den lang. Der er tale om en samling besvarelser af TØ-opgaver og afleveringsopgaver, krydret med alskens kommentarer og moralske opsange.

Den opmærksomme rus vil bemærke, at jeg aldrig har udleveret en Note 2. Det skyldes at den stadig er under udarbejdelse (den hvor jeg formulerer og beviser den såkaldte Kinesiske Restklassesætning).

### Afleveringsopgaver

I dette afsnit finder du mine forslag til besvarelser af afleveringsopgaverne i det forgangne kvarter. Der er naturligvis sjældent netop en rigtig måde at løse en given opgave på, og i visse tilfælde giver jeg derfor også et alternativt løsningsforslag.

**Aflevering 1.** *Bevis ved induktion, at hvis  $r \geq -1$ , så gælder Bernoullis ulighed*

$$(1 + r)^n \geq 1 + nr \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

*Hvor i beviset bruger man oplysningen  $r \geq -1$ ?*

*Løsningsforslag.* Vi ønsker at bruge induktion. Basistilfældet  $n = 1$  er trivielt, idet

$$(1 + r)^1 = 1 + r = 1 + 1 \cdot r,$$

så antag nu at (1) holder for  $n$ . Vi har nu at

$$\begin{aligned} (1 + r)^{n+1} &= (1 + r)^n(1 + r) \\ &\geq (1 + nr)(1 + r) \\ &= 1 + nr + r + nr^2 \\ &= 1 + (n + 1)r + nr^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)r, \end{aligned}$$

hvor den første ulighed følger af induktionsantagelsen (1) og det faktum at  $1 + r \geq 0$ , og den anden ulighed følger af at  $nr^2 \geq 0$ . Således er det vist at (1) holder for alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Man bemærker at (1) tillige trivielt holder for  $n = 0$ . △

Bemærk den klare opdeling i formulering (og dermed antagelser) og besvarelse (og dermed deduktioner). I jeres afleveringer er der intet krav om at I kopierer opgaveteksten, og hvis I gør det bør I holde den klart adskilt fra jeres besvarelse.

**Aflevering 2.** (a) Find modulus og en værdi af argumentet til tallet  $(1 + i)^6$ .

(b) Skriv  $(1 + i)^6$  på formen  $x + iy$ .

(c) Find modulus og en værdi af argumentet til tallet  $(-\sqrt{3} + i)^4$ .

(d) Skriv  $(-\sqrt{3} + i)^4$  på formen  $x + iy$ .

Løsningsforslag. (a) Vi har at  $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , så ifølge Korollar 2.21 er  $|(1 + i)^6| = |1 + i|^6 = \sqrt{2}^6 = 2^3 = 8$ . Man indser let geometrisk at et argument til tallet  $1 + i$  er  $\pi/4$ , så jf. samme korollar er  $6 \cdot \pi/4 = 3\pi/2$  en værdi af argumentet til  $(1 + i)^6$ .

(b) Fra udregningerne i (a) følger let at  $(1 + i)^6 = 8 \cdot (\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2) = -8i$ .

(c) Vi har at  $|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ , så  $|(-\sqrt{3} + i)^4| = |-\sqrt{3} + i|^4 = 2^4 = 16$ . En værdi  $v$  af argumentet til  $-\sqrt{3} + i$  skal opfylde

$$\tan v = \frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

og heraf følger at  $v$  må være på formen  $-\frac{\pi}{6} + n\pi$  for et  $n \in \mathbb{Z}$ . Imidlertid ser man geometrisk at det kun er tallene svarende til en ulige værdi af  $n$  der faktisk er argumenter til  $-\sqrt{3} + i$  (de øvrige er argumenter til  $\sqrt{3} - i$ ), så et argument er  $\frac{5\pi}{6}$ . Heraf følger så som i (a) at et argument til  $(-\sqrt{3} + i)^4$  er  $4 \cdot \frac{5\pi}{6} = 10\pi/3$ .

(d) Vi har at  $(-\sqrt{3} + i)^4 = 16 \cdot (\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3}) = -8 - 8\sqrt{3}i$ .

△

Det sværeste for folk i denne opgave var at få skrevet ordentligt ned hvordan man var nået frem til et argument for  $(-\sqrt{3} + i)^4$ . Man skal bare gøre sig klart, at tangensligningen (2) ikke alene bestemmer et argument.

**Aflevering 3.** Lad  $\omega$  betegne tallet  $\omega = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ .

(a) Vis, at  $\omega$  og  $\omega^2$  er femte enhedsrødder.

(b) Vis, at

$$\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

(c) Vis tilsvarende, at

$$\omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 = 0.$$

(d) Vis, at  $\omega + \omega^{-1}$  og  $\omega^2 + \omega^{-2}$  er rødder i polynomiet  $t^2 + t - 1$ .

(e) Vis, at  $\omega + \omega^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ , og udled at  $\cos \frac{2\pi}{5} = (\sqrt{5} - 1)/4$ .

*Løsningsforslag.* (a) Vi har jf. de Moivres formel at  $\omega^5 = \cos(5 \cdot \frac{2\pi}{5}) + i \sin(5 \cdot \frac{2\pi}{5}) = 1$ , så  $\omega$  er en femte enhedsrod. Altså er  $(\omega^2)^5 = (\omega^5)^2 = 1^2 = 1$ , så også  $\omega^2$  er en femte enhedsrod.

(b) Fra (a) har vi at  $0 = \omega^5 - 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1)$ , og idet  $\omega \neq 1$  følger det ønskede af nulreglen.

Tilsvarende har vi at  $0 = (\omega^2)^5 - 1 = (\omega^2 - 1)(\omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1)$ , og  $\omega^2 - 1 \neq 0$ , så vi må have at  $\omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 = 0$ .

Her kan man alternativt observere at

$$\begin{aligned} \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 &= \omega^5 \omega^3 + \omega^5 \omega + \omega^4 + \omega^2 + 1 \\ &= \omega^3 + \omega + \omega^4 + \omega^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

jf. det netop viste og at  $\omega^5 = 1$ .

(c) Hvis man benytter vinket er opgaven let. Lad os i stedet bruge hovedet: Ved indsættelse fås

$$\begin{aligned} (\omega + \omega^{-1})^2 + \omega + \omega^{-1} - 1 &= \omega^2 + \omega^{-2} + 2 + \omega + \omega^{-1} - 1 \\ &= \omega^2 + \omega^5 \omega^{-2} + \omega + \omega^5 \omega^{-1} + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

idet  $\omega^5 = 1$ . Alternativt kunne man betragte udtrykket  $\omega^2(\omega^{-2} + \omega^{-1} + 1 + \omega + \omega^2)$  og konstatere at det giver 0, hvorfor parentesens må være 0. Under alle omstændigheder ser man at  $\omega + \omega^{-1}$  er en rod.

På helt tilsvarende vis indsættes  $\omega^2 + \omega^{-2}$ , og enten ved at gange visse led med  $\omega^5 = 1$  eller ved at gange hele udtrykket med  $\omega^4 \neq 0$  indser man at også denne er en rod.

(d) Vi har, idet  $|\omega| = 1$ , at  $\omega^{-1} = \bar{\omega}$ , så  $\omega + \omega^{-1} = 2 \operatorname{Re} \omega = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ . Rødderne i polynomiet  $t^2 + t - 1$  er

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Idet  $2 \cos \frac{2\pi}{5}$  er positiv, og i (c) er vist at være rod, må vi have at

$$2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

hvilket viser det ønskede.

△

**Aflevering 4.** Lad  $A$  og  $B$  være to ikke-tomme, opad begrænsede delmængder af  $\mathbb{R}$ . Bevis at

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},$$

altså at  $\sup(A \cup B)$  er det største af de to tal  $\sup A$  og  $\sup B$ .

*Løsningsforslag.* Vi bemærker indledningvis, at forudsætningerne sikrer at  $\sup A$  og  $\sup B$  findes. Idet vi har at

$$\forall x \in A: x \leq \sup A \quad \text{og} \quad \forall x \in B: x \leq \sup B$$

må vi have at

$$\forall x \in A \cup B: x \leq \max\{\sup A, \sup B\}. \quad (3)$$

Således er mængden  $A \cup B$  opad begrænset (og tydeligvis ikke-tom), og derfor findes  $\sup(A \cup B)$ . Desuden følger af (3) at  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ .

Idet  $A \subseteq A \cup B$  og  $B \subseteq A \cup B$  følger af Opgave 70 at

$$\sup A \leq \sup(A \cup B) \quad \text{og} \quad \sup B \leq \sup(A \cup B),$$

men så er  $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$ . Dette viser at  $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup(A \cup B)$ .

Hvis man vil undgå at referere til Opgave 70 kan man gøre som følger (egentlig er det stort set bare et bevis for resultatet i Opgave 70): Da  $\sup(A \cup B)$  er en øvre grænse for  $A \cup B$  er det specielt en øvre grænse for  $A$  og en øvre grænse for  $B$ . Derfor er  $\sup(A \cup B) \geq \sup A$  og  $\sup(A \cup B) \geq \sup B$ , hvilket netop var hvad vi brugte ovenfor.  $\triangle$

**Aflevering 5.** Lad talfølgen  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  være defineret ved

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}.$$

(a) Vis, at den er begrænset.

(b) Vis, at den er konvergent.

*Løsningsforslag.* (a) Vi ser at det  $n$ 'te element i følgen er givet ved en sum af netop  $n$  positive led, hver mindre end  $1/n$ . Derfor gælder for ethvert  $n \in \mathbb{N}$  at  $0 < a_n < n \cdot 1/n = 1$ . Således er følgen begrænset.

- (b) Da en monoton og begrænset reel talfølge er konvergent er det jf. (a) nok at vise at følgen er monoton. Differensen mellem to på hinanden følgende elementer i følgen er

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{j=n+2}^{2n+2} \frac{1}{j} - \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

så følgen er altså (strengt) voksende. Hovedsætning om monotone talfølger fortæller så at følgen er konvergent.

Hvis man virkelig er ivrig prøver man at finde grænseværdien. Jeg fortalte til TØ hvordan man eventuelt kunne gribe dette an, og lad mig her kort opridse argumentet: Arealbetragtninger (tegn!) giver at

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{j} \leq \int_{j-1}^j \frac{1}{x} dx$$

for alle  $j \geq 2$ . Summeres denne dobbeltulighed fra  $j = n + 1$  til  $2n$  fås, jf. indskudsreglen " $\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$ ", at

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq a_n \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx.$$

Venstresiden er  $\log(2n+1) - \log(n+1) = \log \frac{2n+1}{n+1}$ , mens højresiden er konstant  $\log(2n) - \log(n) = \log(\frac{2n}{n}) = \log 2$ . Idet  $\frac{2n+1}{n+1} \rightarrow 2$  for  $n \rightarrow \infty$  og  $\log$  er kontinuert, fås at venstresiden går mod  $\log 2$  for  $n \rightarrow \infty$ . Men så følger af Klemmelemmaet (Opgave 90) at  $a_n \rightarrow \log 2$  for  $n \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

**Aflering 6.** Lad funktionerne  $f$  og  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  være kontinuerte, lad  $c \in (a, b)$ , og lad  $h$  være den ved

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & a \leq x < c, \\ g(x) & c \leq x \leq b \end{cases}$$

definerede funktion  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

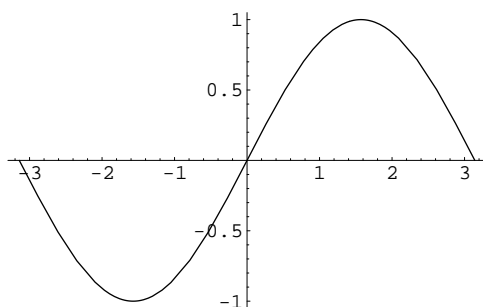
- (a) Lad  $f$  og  $g$  være funktionerne  $f(x) = \sin x$  og  $g(x) = \cos x$ . Skitser graferne for  $f$ ,  $g$  og  $h$  på intervallet  $[a, b] = [-\pi, \pi]$ , dels for  $c = 0$  og dels for  $c = \pi/4$ .

(b) Lad nu  $f, g$  være vilkårlige. Vis, at hvis  $f(c) = g(c)$ , så er  $h$  kontinuert.

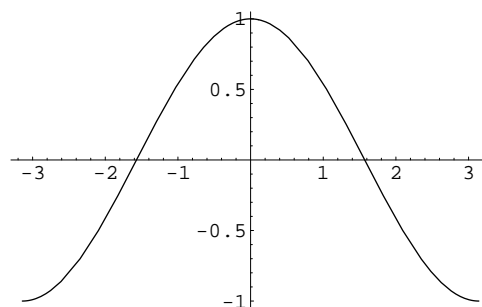
(c) Vis, at hvis  $f(c) \neq g(c)$ , så er  $h$  diskontinuert.

Før vi kommer til besvarelsen vil jeg gøre et par bemærkninger: For det første er det *funktioner* som kan være kontinuerte, ikke funktionsværdier. Det hedder altså “ $f$  er kontinuert” og ikke “ $f(x)$  er kontinuert”. For det andet skal man læse det sidste ord i opgaveformuleringen med de rigtige briller. Vi har defineret hvad det vil sige for en funktion at være kontinuert i et punkt, og vi kalder funktionen kontinuert hvis den er kontinuert i ethvert punkt i dens definitionsmængde (“kontinuert overalt”). Derfor kan ordet diskontinuert læses på to måder: Enten som “ikke kontinuert”, altså “ikke kontinuert i ethvert punkt”, altså “diskontinuert i mindst et punkt”; eller som “diskontinuert overalt” i betydningen “diskontinuert i ethvert punkt”. Det er naturligvis den førstnævnte betydning der her er relevant, men vær opmærksom på at bogen kun definerer hvad der forstås ved “diskontinuitet i et punkt” (som betyder det oplagte).

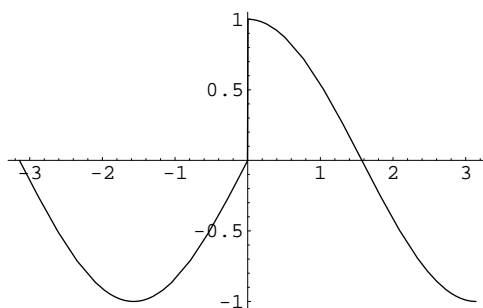
*Løsningsforslag.* (a) Mere eller mindre kunstfærdige skitser af graferne for  $f$ ,  $g$ ,  $h_0$  og  $h_{\pi/4}$  ses nedenfor.



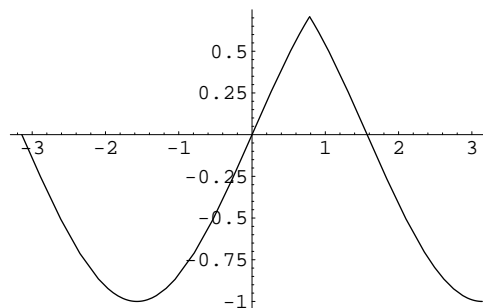
(a) Grafen for  $f$ .



(b) Grafen for  $g$ .



(c) Grafen for  $h$  for  $c = 0$ .



(d) Grafen for  $h$  for  $c = \pi/4$ .

- (b) Vi skal vise at  $h$  er kontinuert i ethvert punkt af sin definitionsmængde  $[a, b]$ . Inspireret af graferne ovenfor er det eneste potentielt problematiske punkt formentlig  $c$ , men lad os for en god ordens skyld også vise kontinuiteten i de andre punkter. Lad  $\varepsilon > 0$  være givet og  $x_0 \in [a, b] - \{c\}$ , og antag for bestemthed at  $x_0 \in [a, c)$ . Da  $f$  er kontinuert i  $x_0$  findes et  $\delta' > 0$  så

$$\forall x \in [a, b]: |x - x_0| < \delta' \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Lad nu  $\delta = \min\{\delta', |c - x_0|\}$ . At jeg ikke blot kan vælge  $\delta'$  skyldes, at  $\delta'$  jo kun tager hensyn til opførslen af  $f$ , og hvis  $x$  tilfældigvis ligger inden for en afstand af  $\delta'$  fra  $x_0$ , men på den anden side af  $c$ , kan jeg ikke længere være sikker på at  $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ . Men med ovenstående valg virker dette  $\delta$ : Lad nemlig  $x \in [a, b]$  være vilkårligt. Vi skal vise at hvis  $|x - x_0| < \delta$  så er  $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ . Idet  $|x - x_0| < \delta$  har vi at  $x \in [a, c)$ , så  $h(x) = f(x)$  og  $h(x_0) = f(x_0)$ . Men så følger af valget af  $\delta'$  at  $|h(x) - h(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Tilfældet hvor  $x \in (c, b]$  er helt tilsvarende. Lad os derfor vise kontinuitet i  $c$ . Lad  $\varepsilon > 0$  være givet. Idet  $f$  og  $g$  er kontinuerte i  $c$  findes  $\delta', \delta'' > 0$  med egenskaberne

$$\forall x \in [a, b]: |x - c| < \delta' \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad (4)$$

$$\forall x \in [a, b]: |x - c| < \delta'' \implies |g(x) - g(c)| < \varepsilon. \quad (5)$$

Lad nu  $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ . Vi skal vise at

$$\forall x \in [a, b]: |x - c| < \delta \implies |h(x) - h(c)| < \varepsilon, \quad (6)$$

så lad  $x \in [a, b]$  være givet, og antag at  $|x - c| < \delta$ . Hvis  $x < c$  har vi fra (4) (idet jo  $|x - c| < \delta'$ ) at  $|h(x) - h(c)| = |f(x) - f(c)| < \varepsilon$ , og tilsvarende fås at hvis  $x \geq c$  fra (5) at  $|h(x) - h(c)| = |g(x) - g(c)| < \varepsilon$ . Dette viser at (6) er opfyldt for det valgte  $\delta$ , og derfor er  $h$  kontinuert i  $c$  og således overalt.

- (c) Den letteste måde at afvise kontinuitet i tilfældet hvor  $f(c) \neq g(c)$  er ved følgekaraktærisationen af kontinuitet. Hvis nemlig  $h$  var kontinuert i  $c$  ville der om enhver talfølge  $x_n$  der konvergerer mod  $c$  gælde, at  $h(x_n)$  konvergerer mod  $h(c)$ . Betragt derfor talfølgen  $x_n = c - \frac{1}{n}$ . Bemærk at  $x_n$  ikke nødvendigvis tilhører intervallet  $[a, b]$  for alle  $n$ , men at det gælder for alle store nok  $n$  (dvs. for alle  $n$  større end et vist  $N$ ). Vi har at  $h(x_n) = f(x_n)$ , og da  $f$  er kontinuert i  $c$  vil følgen af funktionsværdier konvergere mod  $f(c)$ . Men da en følge højst kan have en grænseværdi, og da  $h(c) = g(c)$ , viser dette at  $h$  ikke er følgekontinuert i  $c$ , og dermed ikke kontinuert i  $c$ .

Alternativt kunne man tage betingelsen af kontinuitet i  $c$  og negere denne. Det går som følger: At  $h$  ikke er kontinuert i  $c$  vil sige

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in [a, b]: |x - c| < \delta \wedge |h(x) - h(c)| \geq \varepsilon. \quad (7)$$

Jeg påstår at  $\varepsilon = |f(c) - g(c)|/2 > 0$  virker. Lad derfor  $\delta > 0$  være vilkårligt. Vi skal så vise at der findes et  $x \in [a, b]$  så  $x$  er  $\delta$ -tæt på  $c$ , og så funktionsværdien i  $x$  afviger mindst  $\varepsilon$  fra  $h(c)$ .

Idet  $f$  er kontinuert i  $c$  kan vi vælge et  $\delta' > 0$  så

$$\forall x \in [a, b]: |x - c| < \delta' \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Lad  $d = \min(\delta, \delta')$  og  $x = c - d/2$ . Så er  $x$  i hvert fald  $\delta$ -tæt på  $c$ . Tilbage er at vise uligheden  $|h(x) - h(c)| \geq \varepsilon$ . Idet  $x < c$  har vi

$$|h(x) - h(c)| = |f(x) - g(c)| \geq |f(c) - g(c)| - |f(c) - f(x)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

hvor den første ulighed følger af trekantsuligheden  $|f(c) - f(x)| + |f(x) - g(c)| \geq |f(c) - g(c)|$ .

△

Nu følger en besvarelse af en afleveringsopgave som I ikke har haft mulighed for at aflevere. Jeg inkluderer besvarelsen for fuldstændighedens skyld, og fordi begrebet "åben mængde" er helt ufatteligt vigtigt (I aner ikke *hvor* vigtigt!). Argumentet er ikke svært, idet det er af den type hvor der i hvert trin stort set kun er en ting at gøre. Man skal blot gøre sig klart hvad ens antagelser er og hvad man skal vise.

**Aflevering 7.** Lad  $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$  være en samling af åbne mængder i  $\mathbb{R}^n$ . Vis, at foreningsmængden

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

er åben.

*Løsningsforslag.* Jeg minder om, at en delmængde  $V$  af  $\mathbb{R}^n$  siges at være åben, hvis der for ethvert punkt  $x$  i  $V$  findes et positivt tal  $\delta$ , så den åbne kugle  $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta\}$  med radius  $\delta$  og centrum i  $x$  er helt indeholdt i  $V$ . Med kvantorer skrives dette

$$\forall x \in V \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R}^n: \|y - x\| < \delta \implies y \in V. \quad (8)$$

Vi skal altså vise at betingelsen (8) er opfyldt for  $A$ , så lad  $x \in A$ . Pr. definition af  $A$  betyder det, at der findes et  $\alpha \in I$  så  $x \in U_\alpha$ . Nu er  $x$  altså et punkt i en åben mængde, så pr. antagelse findes der et tal  $\delta > 0$  så  $B_\delta(x) \subseteq U_\alpha$ . Men da  $U_\alpha \subseteq A$  følger at  $B_\delta(x) \subseteq A$ , så det fundne  $\delta$  virker for  $x \in A$ . △

## TØ-opgaver

Her følger et bredt udsnit af TØ-opgaver som vi enten ikke nåede eller som jeg synes I fortjener en skriftlig besvarelse af. Opgaveformuleringerne må I slå op i bogen.

*Opgave 58.* Lad  $P$  være et polynomium af grad  $n$  med reelle koefficienter, dvs.

$$P(z) = a_n z^n + \dots a_1 z + a_0$$

hvor  $a_i \in \mathbb{R}$  for  $i = 0, 1, \dots, n$ . Antag at  $z$  er en rod, dvs. at

$$P(z) = 0. \tag{9}$$

Vi skal vise at  $\bar{z}$  også er en rod. Ved at konjugere ligningen (9) fås

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} &= \overline{P(z)} \\ &= \overline{a_n z^n + \dots a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \bar{z}^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 \\ &= P(\bar{z}) \end{aligned}$$

ifølge regneregler for kompleks konjugering og det at den kompleks konjugerede af et reelt tal er det samme reelle tal. Her står at læse at  $\bar{z}$  er en rod i  $P$ .  $\triangle$

*Opgave 90.* Antag at  $a_n$ ,  $x_n$  og  $b_n$  er reelle talfølger, som opfylder at  $a_n \leq x_n \leq b_n$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Antag desuden at  $a_n$  og  $b_n$  er konvergente med samme grænseværdi  $c$ . Vi vil nu vise at  $x_n$  er konvergent med grænseværdi  $c$ .

Til det formål ser vi simpelthen på afstanden  $|x_n - c|$ . Lad  $\varepsilon > 0$  være givet. Ved et par anvendelser af trekantsuligheden og den indbyrdes beliggenhed af  $a_n$ ,  $x_n$  og  $b_n$  får vi

$$|x_n - c| \leq |x_n - a_n| + |a_n - c| \leq |b_n - a_n| + |a_n - c| \leq |b_n - c| + |c - a_n| + |a_n - c|.$$

Vi kan nu vælge et  $N$  så stort at  $n \geq N$  medfører at  $|b_n - c| < \varepsilon/3$  og  $|a_n - c| < \varepsilon/3$ . Så er  $|x_n - c| < \varepsilon$ , og  $\varepsilon$  var vilkårlig viser dette at  $x_n \rightarrow c$  for  $n \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

*Opgave 100.* Lad  $a_n$  være en talfølge, og lad følgen  $b_n$  være defineret ved at det  $n$ 'te element  $b_n$  er gennemsnittet af de første  $n$  elementer i  $a$ -følgen, altså

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Antag  $a_n \rightarrow 0$  for  $n \rightarrow \infty$ . Vi skal vise at  $b_n$  også går mod  $a$  for  $n \rightarrow \infty$ . Lad  $\varepsilon > 0$  være givet.

Vælg først et  $N'$  så stort at  $k \geq N' \implies |a_k| < \varepsilon/2$ . For et hvilket som helst tal  $n > N'$  kan vi nu skrive

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N'}}{n} + \frac{a_{N'+1} + \cdots + a_n}{n}.$$

Ved hjælp af trekantsuligheden får vi så at

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N'}}{n} \right| + \left| \frac{a_{N'+1} + \cdots + a_n}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N'}}{n} \right| + \frac{|a_{N'+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \\ &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N'}}{n} \right| + \frac{(n - N')\varepsilon/2}{n} \\ &\leq \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N'}}{n} \right| + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Idet summen  $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N'}$  er uafhængig af  $n$ , kan vi vælge et  $N''$  så stort at for alle  $n \geq N''$  bliver den første brøk mindre end  $\varepsilon/2$ . Altså får vi for alle  $n \geq N = \max(N', N'')$  at

$$|b_n| < \varepsilon$$

hvilket var hvad der skulle vises.

Del (b) besvares let som følger: Idet vi sætter  $x_n = a_n - a$  får vi at  $x_n$  er en følge som konvergerer mod 0. Idet

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{na + x_1 + \cdots + x_n}{n} = a + \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

ser vi at  $b_n - a$  jf. første del af opgaven konvergerer mod 0. Men så konvergerer  $b_n = b_n - a + a$  mod  $a$ .  $\triangle$

*Opgave 115.* Lad  $x_n$  være en reel talfølge. Antag at  $x_n$  er voksende og ubegrænset. Vi skal vise at  $x_n$  divergerer mod  $+\infty$ .

Antagelserne betyder, skrevet med kvantorer, at

$$\forall n \in \mathbb{N}: x_n \leq x_{n+1} \tag{10}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: |x_n| \geq M. \tag{11}$$

Vi skal vise at

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \implies x_n \geq M. \tag{12}$$

Lad  $M \in \mathbb{R}$  være givet. Først bemærker vi, at da  $x_n$  er voksende er følgen nedad begrænset (af  $x_1$ ), så da følgen er ubegrænset må den være ubegrænset opad. Specielt er følgen positiv fra et vist trin. Vi kan bruge (11) ovenfor til at finde et  $N \in \mathbb{N}$  så  $x_N \geq M$ . Så har vi, for et vilkårligt  $n \geq N$ , at  $x_n \geq x_N \geq M$ , så dette  $N$  opfylder betingelsen i (12).  $\triangle$

*Opgave 124.* Lad  $a_n$  være en monoton reel talfølge. Antag  $a_n$  har en konvergent delfølge. Vi skal vise at følgen  $a_n$  er konvergent.

Idet  $a_n$  er monoton er der tre muligheder: Hvis følgen er begrænset er den konvergent jf. hovedsætning om monotone talfølger. Hvis den er ubegrænset er den divergent mod  $+\infty$  (hvis den er voksende) eller divergent mod  $-\infty$  (hvis den er aftagende); jf. Sætning 4.25. Vi vil vise at disse sidste to tilfælde fører til modstrid. Antag for bestemheds skyld at følgen  $a_n$  er voksende. Jf. sætning 4.27(b) gælder så, at *enhver* delfølge af  $a_n$  er divergent mod  $+\infty$ . Men vi havde jo antaget at der var en konvergent delfølge. Dette strider mod at følgen er ubegrænset; altså må den være begrænset og dermed konvergent.

[Læs gerne ovenstående argument flere gange. Vi viser at følgen er begrænset ved at vise at hvis den var ubegrænset fører det til en modstrid. Altså må følgen være begrænset og på grund af monotonicitet konvergent].  $\triangle$

*Opgave 145.* Lad  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  være en funktion der opfylder funktionalligningen

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

for alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Antag  $f$  er kontinuert i 0. Vi skal vise at så er  $f$  kontinuert overalt.

Først bemærker vi, at hvis  $f(x) = 0$  for bare én værdi af  $x$ , så er  $f(y) = f(y - x + x) = f(y - x)f(x) = 0$  for alle tal  $y$ , og så er  $f$  nulfunktionen der klart er kontinuert. Vi kan altså antage at  $f(x) \neq 0$  for alle tal  $x$ . Så følger af  $f(0 + 0) = f(0)^2$  at  $f(0) = 1$ .

Vi vil vise at  $f$  er kontinuert i  $a \in \mathbb{R}$ . Vi skal derfor vise

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

og vi lader derfor  $\varepsilon > 0$  være givet. For at finde ud af hvordan vi skal vælge  $\delta$  kigger vi på differensen  $f(x) - f(a)$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(a + (x - a)) - f(a)| = |f(a)f(x - a) - f(a)| \\ &= |f(a)||f(x - a) - 1| = |f(a)||f(x - a) - f(0)|. \end{aligned}$$

Lad nu  $\varepsilon' = \varepsilon/|f(a)|$ . Da  $f$  er kontinuert i 0 findes et  $\delta > 0$  så det for alle  $y$  med  $|y| < \delta$  gælder at  $|f(y) - 1| < \varepsilon'$ . Men så har vi jo netop, at hvis  $x$  er et reelt tal med afstand højst  $\delta$  til  $a$ , vil

$$|f(x) - f(a)| = |f(a)||f(x - a) - 1| < |f(a)|\varepsilon' = \varepsilon.$$

Altså er  $f$  kontinuert i  $a$ .  $\triangle$

*Opgave 154.* Dette er endnu en af de opgaver som er af den type hvor man stort set bare skal forstå definitionen til bunds for at kunne regne den.

Lad  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  være en funktion defineret på  $A$ . Lad  $a \in A$  være et punkt hvorom der gælder, at der findes et  $r > 0$  så  $(a - r, a + r) \cap A = \{a\}$ . Vi skal så vise, at  $f$  er kontinuert i  $a$ .

Lad  $\varepsilon > 0$  være givet. Aldeles uafhængigt af dette  $\varepsilon$  lader jeg  $\delta = r$ . Vi skal nu vise

$$\forall x \in A: |x - a| < r \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Men hvis  $x \in A$  og  $|x - a| < r$  betyder antagelsen jo netop at  $x = a$ , så uligheden er trivielt opfyldt idet  $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon!$   $\triangle$

Spørgsmål og kommentarer til ovenstående er naturligvis velkomne. Især trykfejl og forkerte (mangelfulde) argumenter vil jeg gerne have rettet. I ved hvor I kan finde mig eller hvordan jeg ellers kan kontaktes. . .