Kategorier for den stakkels studerende

Rasmus Villemoes

24. november 2004

Indhold

Indledning

Denne note er mest skrevet for at lappe på hvad jeg betragter som et stort hul i den matematiske almendannelse folk får. I mange kurser, især på anden del, kan forelæsere næsten ikke dy sig for at sige frække ord såsom “kategori” og “funktor”, benytte sig af “funktorielle egenskaber” eller kaste et diagram op på tavlen og kalde det for en “universel egenskab”. Det underforstås at folk selv finder ud af hvad disse ord betyder hvis de mener at have brug for det.

Min personlige erfaring er, at mange ting bliver meget pænere når man ser dem i den rette abstrakte kontekst. Således synes jeg også det er synd, at man aldrig officielt får at vide hvad kategoriteori går ud på. Selv hvis folk ønsker at finde ud af dette, er det svært at vide hvor man skal lede. Det er mit håb at i det mindste denne tvivl nu kan udryddes, og at svaret bliver “i nærværende note”. Dels er den forfattet på dansk og dels har jeg i mange af eksemplerne taget udgangspunkt i den viden som man har med fra førstedelskurserne; herunder især Algebra 1 og Geometri 1. Andre eksempler er nært knyttet til kurserne Topologi 1 og Introduktion til Algebraisk Topologi, og det er da også den implicitte brug af kategoribegreber i disse kurser som har ansporet mig til at skrive dette.

Vigtige ord er fremhævet første gang de optræder, og ordet står desuden i margen, så det skulle være forholdsvis let at finde en definition. Jeg har også lavet et forhåbentlig brugbart indeks bagest i noten.

Jeg bør nok advare om, at nogle ord er selvopfundne i den forstand, at jeg ikke kender en gængs betegnelse på dansk for det pågældende begreb. Blandt andet derfor har jeg inkluderet en terminologiliste.

Om navnet på noten: Indtil videre er „Kategorier for den stakkels studerende“ kun en arbejdstitel. Det er en plathed baseret på titlen på [ML98].

Disclaimer: Dette er et „udkast“ til hvad der godt kunne risikere at udvikle sig til et større projekt. Nuværende versionsnummer er 1.0β. Indtil videre er noten ikke (det vil sige langt fra) færdigskrevet, og den læses derfor “på eget ansvar”. Den til enhver tid nyeste (offentligt tilgængelige) udgave af noten kan findes på `http://home.imf.au.dk/burner/matematik.xhtml`.

Jeg modtager selvfølgelig gerne kommentarer, kritik og rettelser; du kan fx sende en mail til `burner@imf.au.dk`.

På et tidspunkt vil der blive skrevet et eller flere ekstra kapitler, hvori følgende buzzwords vil blive behandlet: Funktorkategorier, produkt, koprodukt, kerner, grænser, universelle egenskaber, dualitet, adjungerede funktorer, additive og abelske kategorier, Yonedas lemma og meget andet.

Jeg håber du får noget ud af læsningen. Spørgsmål til emnet er naturligvis velkomne, men jeg garanterer ikke at jeg er i stand til at svare.

God fornøjelse, Rasmus Villemoes

Kapitel 1

Kategorier

1.1 Motivation

I de første par år af et matematikstudie støder man på massevis af matematiske objekter. Her tænkes på begreber som vektorrum, grupper, ringe, legemer, topologiske rum, regulære flader etc.

Alle disse objekter er mængder, som er udstyret med en vis ekstra *struktur*, og for hver af disse typer objekter betragter man typisk afbildninger som i en eller anden grad *respekterer* denne struktur. Hvis fx ens objekter er vektorrum (over legemet $\mathbb{F}$) er man interesseret i de $\mathbb{F}$-lineære afbildninger, fordi disse netop bevarer den lineære struktur.

Hvis de objekter man interesserer sig for er grupper er man interesseret i gruppehomomorfier (fordi disse netop er dem der bevarer gruppestrukturen), og hvis man taler om topologiske rum taler man samtidig om kontinuerte afbildninger (fordi "strukturen" her består i at vide hvilke mængder der er åbne). Hvis ens objekter er regulære flader kunne man interessere sig for de glatte afbildninger mellem dem.

Man kan også bemærke, at hvis A er et vektorrum, er identitetsafbildningen Id_A faktisk en lineær afbildning $A \to A$. Dette er naturligvis trivielt, men ikke desto mindre værd at lægge mærke til. Tilsvarende er identitetsafbildningen $\mathrm{Id}_X \colon X \to X$ en kontinuert afbildning fra et topologisk rum X til sig selv, og man ser hurtigt at i alle de ovenfor givne eksempler er identitetsafbildningen i alle tilfælde en strukturbevarende *selv*afbildning.

Man bør også bemærke, at hvis fx A, B og C er tre vektorrum og $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ er lineære afbildninger, så er også den sammensatte afbildning $g \circ f \colon A \to C$ en lineær afbildning. Tilsvarende er sammensætning af gruppehomomorfier igen en gruppehomomorfi, sammensætning af kontinuerte afbildninger igen en kontinuert afbildning etc.

1.2 Definition

De ovenstående observationer kan vi bruge som motivation for følgende definition.

kategori
objekt
morfi
pil
sammensætning
komposition

Definition 1.2.1 (Kategori). En *kategori* $\mathcal{C}$ er en samling af visse *objekter* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, og for hvert par A, B af objekter en mængde $\mathrm{Mor}(A, B)$ af *morfier* (eller *pile*) fra A til B. Ydermere skal følgende aksiomer være opfyldt:

(K0) *Sammensætning* (eller *komposition*) af morfier skal være defineret. Altså skal der for alle objekter A, B, C i $\mathcal{C}$ findes en afbildning

$$\circ\colon\ \mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(A, C).$$

Hvis $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ og $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ skriver vi $\circ(g, f)$ som $g \circ f$.

(K1) For alle objekter A, B, C, D i $\mathcal{C}$ og alle morfier $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ og $h \in \mathrm{Mor}(C, D)$ gælder at

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in \mathrm{Mor}(A, D). \tag{1.1}$$

(K2) For ethvert objekt A i $\mathcal{C}$ findes der en morfi $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ således at

$$\mathrm{Id}_A \circ f = f \qquad\qquad \text{og} \qquad\qquad g \circ \mathrm{Id}_A = g \tag{1.2}$$

for alle objekter B, C og for alle morfier $f \in \mathrm{Mor}(B, A)$ og $g \in \mathrm{Mor}(A, C)$.

(K3) For alle objekter A, B, C, D i $\mathcal{C}$ gælder at

$$\mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(C, D) \neq \emptyset \implies A = C \text{ og } B = D. \tag{1.3}$$

eller ækvivalent hermed

$$A \neq C \text{ eller } B \neq D \implies \mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(C, D) = \emptyset. \tag{1.4}$$

Bemærkning 1.2.2. Aksiom (K3) kan virke noget besynderligt, men der er en udmærket begrundelse for at medtage det: Hvis nemlig $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ er en morfi i kategorien $\mathcal{C}$, må f altså være et element i en eller anden mængde $\mathrm{Mor}(A, B)$, hvor A og B er objekter i $\mathcal{C}$. Men aksiom (K3) fortæller et der er *netop* én sådan mængde, for hvis $f \in \mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(C, D)$ er $A = C$ og $B = D$.

domæne

Derfor har enhver morfi f et veldefineret *domæne* $\mathrm{dom}(f)$ og et veldefineret *kodomæne* $\operatorname{kod}(f)$. Sammensætning $g \circ f$ af de to morfier f og g er altså defineret hvis og kun hvis $\operatorname{kod}(f) = \operatorname{dom}(g)$. I så fald er kodomæne

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom}(f) \qquad \text{og} \qquad \operatorname{kod}(g \circ f) = \operatorname{kod}(g). \tag{1.5}$$

En morfi f hvis domæne og kodomæne er ens kaldes en *endomorfi*; eventuelt en endomorfi af det pågældende objekt. Mængden $\operatorname{Mor}(A, A)$ af endomorfier af A betegnes også med $\operatorname{End}(A)$. endomorfi

1.3 De første eksempler

Før vi kommenterer yderligere på definitionen giver vi en række eksempler på kategorier.

Eksempel 1.3.1. Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, og lad $\mathbb{F}\mathbf{Vect}$ betegne kategorien hvor vi som objekter tager vektorrum over $\mathbb{F}$, og hvor mængden af morfier fra $\mathbb{F}$-vektorrummet A til $\mathbb{F}$-vektorrummet B er mængden af $\mathbb{F}$-lineære afbildninger fra A til B. Afbildningen $\operatorname{Mor}(B, C) \times \operatorname{Mor}(A, B) \to \operatorname{Mor}(A, C)$ er den sædvanlige sammensætning af afbildninger. Det er vigtigt at bemærke, at dette *kun* går godt fordi sammensætning af lineære afbildninger faktisk igen producerer en lineær afbildning, så vi faktisk står med et element i $\operatorname{Mor}(A, C)$.

Da sammensætning af afbildninger er associativ er (K1) klart opfyldt. Som tidligere bemærket er identitetsafbildningen på et vektorrum en lineær afbildning, og derfor er også (K2) opfyldt. Endelig er (K3) trivielt opfyldt, da der er tale om afbildninger mellem mængder.

Bemærkning 1.3.2. Det kan måske være nyttigt at minde læseren om, at to funktioner ikke er ens bare fordi de har den samme forskrift. De to funktioner $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ defineret ved

$$f(x) = g(x) = e^x$$

for $x \in \mathbb{R}$ er *ikke* den samme funktion. Fx er g surjektiv mens f ikke er surjektiv. Derfor er udtrykket "funktionen $x \mapsto e^x$" meningsløst. Derimod kan man snakke om "funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $x \mapsto e^x$".

Nu vi er ved det kan vi lige så godt opridse den *rigtige* definition af en funktion f fra X til Y. Det er en tripel $f = (X, F, Y)$ hvor X og Y er to mængder, og F er en vis delmængde af $X \times Y$ med følgende egenskab:

$$\forall x \in X \exists!\, y \in Y \colon (x, y) \in F. \tag{1.6}$$

At f er en funktion fra X til Y skriver vi normalt $f\colon X \to Y$, og $f(x)$ betegner så det entydigt bestemte element i Y således at $(x, f(x)) \in F$.

En funktion er altså næsten entydigt bestemt ved sin graf. Ordet næsten er nødvendigt, fordi selvom domænet X kan genskabes udelukkende ud fra kendskab til F, kan kodomænet Y ikke.

Vi bemærker specielt, at hvis X er den tomme mængde $\emptyset$, er $X \times Y = \emptyset$ for en vilkårlig mængde Y. Der findes da netop en delmængde af $X \times Y$ (nemlig $\emptyset$), og denne delmængde opfylder (1.6). Så der er netop en funktion fra den tomme mængde til en vilkårlig given mængde. Tilsvarende, hvis $Y = \emptyset$ er $X \times Y = \emptyset$, og derfor findes der kun en funktion fra X til Y hvis X også er tom.

Eksempel 1.3.3. Lad **Grp** betegne kategorien hvor objekterne er grupper og morfierne er gruppehomomorfier. Komposition af morfier er den sædvanlige sammensætning af afbildninger. Igen skal man vide, at sammensætning af gruppehomomorfier giver en gruppehomomorfi for at få dette til at virke. Som ovenfor kontrolleres aksiomerne (K1)–(K3) let.

Eksempel 1.3.4. Lad **Top** betegne kategorien hvor objekterne er topologiske rum og morfierne er kontinuerte afbildninger. Da tilbagetræk har den nydelige egenskab at $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ bliver sammensætning af kontinuerte afbildninger kontinuert, og således ser man at også **Top** faktisk er en kategori.

Eksempel 1.3.5. Lad **Ab** betegne kategorien hvor objekterne er *abelske* grupper, og morfierne er gruppehomomorfier. Dette er et eksempel på en
delkategori *delkategori* af **Grp**.

Generelt får man en delkategori ved simpelthen at se bort fra nogle af objekterne og/eller morfierne. Dette skal naturligvis være på en sådan måde, at de tilbageværende objekter og morfier i sig selv udgør en kategori. Et andet eksempel på en delkategori er $\mathbb{F}\mathbf{Vect}_f$, kategorien af endeligdimensionale $\mathbb{F}$-vektorrum (f'et står for finite) og lineære afbildninger. Man kan også producere delkategorier ved at betragte en lidt mindre klasse af morfier, fx ved at lade objekterne være topologiske rum og morfierne være de kontinuerte afbildninger som er homotopiækvivalenser. Bemærk at sammensætning af homotopiækvivalenser er en homotopiækvivalens, så dette udgør en kategori.

Eksempel 1.3.6. Lad n være et positivt helt tal. Så betegner $\mathbf{Open}_n^C$ kategorien hvis objekter er åbne delmængder $U \subseteq \mathbb{R}^n$, og morfierne $\mathrm{Mor}(U, V)$ er de kontinuerte afbildninger $U \to V$. Hvis n ikke fastholdes får man kategorien $\mathbf{Open}^C$, hvis objekter er åbne delmængder af et eller andet Euklidisk rum, og morfierne er de kontinuerte afbildninger. Det øvre indeks C antyder i begge tilfælde at vi betragter kontinuerte afbildninger som morfierne. Vi lader $\mathbf{Open}_n^S$ og $\mathbf{Open}^S$ betegne delkategorierne hvis objekter er de samme som i henholdsvis $\mathbf{Open}_n^C$ og $\mathbf{Open}^C$, men hvor morfierne er glatte afbildninger (S for smooth).

Eksempel 1.3.7. Som det sidste eksempel i denne omgang lader vi **Sets** betegne kategorien, hvis objekter er mængder, og hvor morfierne $\mathrm{Mor}(A, B)$ simpelthen er alle afbildninger $A \to B$.

Du har måske hørt, at begrebet „mængden af alle mængder“ ikke giver mening. Med indførelsen af kategorier løser man i en vis forstand dette problem, for det giver fin mening at snakke om kategorien af alle mængder.

Bemærkning 1.3.8. Når man taler om en kategori skal man både specificere hvilke objekter og hvilke morfier der er tale om. Men ofte er der en underforstået klasse af morfier som giver mening i konteksten, og man nøjes derfor til tider med at angive objekterne. Fx vil "kategorien af grupper" betyde det samme som "kategorien af grupper med gruppehomomorfier som morfier", altså kategorien **Grp** defineret ovenfor.

Der vil senere blive givet mange flere eksempler på kategorier, men i første omgang vil vi se på nogle af de ting man generelt kan sige om sådanne. Lad ikke det abstrakte sprog skræmme dig. Når du læser nedenstående bør du have et af eksemplerne i tankerne. Allerførst skal vi dog lige indføre et uhyre nyttigt værktøj, som I vel egentlig godt kender i forvejen.

1.4 Diagrammer

Da en kategori er helt bestemt ved sine objekter, pilene mellem disse (husk at pil er et synonym for morfi) og hvordan disse sammensættes, viser det sig overordentligt nyttigt at støtte sig til *diagrammer*. Et diagram er simpelthen et antal objekter forbundet med pile, som repræsenterer morfier mellem objekterne. For eksempel er diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[r, "n"] \arrow[d, "k"] & E \\ C \arrow[r, "h"'] & A \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

et diagram. Objekterne er A, B, C og E, og morfierne f, g, h, k, m og n er repræsenteret ved pile.

Ofte specificerer man ikke eksplicit at $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$, men lader dette fremgå af et diagram. Vi vedtager at $A \xrightarrow{f} B$ og $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ betyder det samme. Også skrivemåden $f\colon A \to B$ vil til tider blive benyttet.

Det fremgår af diagrammet (1.7), at

$$
\begin{array}{lll}
f \in \mathrm{Mor}(A,B) & g \in \mathrm{Mor}(A,C) & h \in \mathrm{Mor}(C,A) \\
k \in \mathrm{Mor}(B,A) & m \in \mathrm{Mor}(A,E) & n \in \mathrm{Mor}(B,E).
\end{array}
$$

kommutativt diagram

Et diagram er *kommutativt* hvis det hver gang man har to veje fra et objekt til et andet gælder, at de tilhørende sammensatte morfier er ens. Således er (1.7) kommutativ hvis

$$h \circ g = k \circ f \quad \text{og} \tag{1.8}$$

$$m \circ k = n. \tag{1.9}$$

Ganske vist er der også tre veje fra det øverste A til E, nemlig $m \circ h \circ g$, $m \circ k \circ f$ og $n \circ f$. Men hvis (1.8) og (1.9) er opfyldt, er det let at se at disse tre morfier må være ens (øvelse).

Diagrammet (1.7) kan vi se som “en firkant hvorpå der er klistret en trekant”. Alle diagrammer er på denne måde opbygget af mindre diagrammer, og et diagram er kommutativt hvis og kun hvis hver trekant, firkant etc. som det er opbygget af er kommutativ (**overvej dette!**).

Bemærk at jeg ovenfor implicit udnyttede aksiomet (K0) fra Definition 1.2.1, der fortæller at skrivemåden $m \circ h \circ g$ er utvetydig.

1.4.1 Aksiomerne som diagrammer

Mange ting kan udtrykkes udelukkende ved hjælp af (kommutative) diagrammer. Som et første eksempel vil vi demonstrere hvordan aksiomerne (K0)–(K2) nydeligt kan beskrives ved hjælp af diagrammer.

Lad A, B, C være tre objekter i en kategori $\mathcal{C}$, og lad $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$ være to morfier. Aksiom (K0) kræver altså, at der findes en morfi $g \circ f$ i $\mathrm{Mor}(A,C)$. Alternativt kunne man kræve at der findes netop én morfi $h \in \mathrm{Mor}(A,C)$ som gør dette diagram kommutativt.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}
\tag{1.10}
$$

Bemærk ordet *netop* i den foregående sætning. Det gør at det er forsvarligt at betegne denne morfi med $g \circ f$.

Aksiomet (K1) kan illustreres således: Lad A, B, C og D være objekter og f, g, h tre morfier. Så er diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dr, "h"] & \\
& B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h\circ g"'] & & D
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

kommutativt.

Det tredje aksiom fortæller, at der for ethvert objekt A skal findes en endomorfi h af A således at diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
& A \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
\tag{1.12}
$$

er kommutativt for alle objekter B, C og for alle morfier $B \xrightarrow{f} A$, $A \xrightarrow{g} C$. Vi vil om lidt vise, at h er entydigt bestemt ud fra disse krav, så derfor kan man roligt betegne denne med Id_A og kalde den *identiteten på* A.

1.5 Morfier og objekter

I dette afsnit præsenteres en række fakta, som mest har teoretisk interesse. Resultaterne og deres beviser er dog ikke særlig indviklede, og det kan være instruktivt at nærlæse beviserne. Undervejs indføres også en del terminologi, som man bør kende.

Først viser vi som lovet, at identitetsmorfien er veldefineret.

Lemma 1.5.1. *Lad A være et objekt i en kategori $\mathcal{C}$. Så findes netop én endomorfi af A som passer ind i* (1.12).

Bevis. Eksistensen følger af aksiomet (K2). Antag derfor nu, at der findes to morfier $h, h' \in \mathrm{Mor}(A, A)$ som passer ind i (1.12). Specielt har vi, at de to diagrammer

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h'"] \arrow[dr, "h'"'] & A \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "h'"] & \\
& A \arrow[r, "h'"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h"'] & A \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, "h"] & \\
& A \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}
\tag{1.13}
$$

er kommutative. Men heraf kan vi aflæse, at

$$h' = h \circ h' = h \tag{1.14}$$

hvor det første lighedstegn følger fra kommutativiteten af den venstre trekant i det første diagram, og det andet lighedstegn følger af kommutativiteten af den højre trekant i det andet diagram. □

1.5.1 Isomorfier

isomorfi

En morfi $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ kaldes en *isomorfi* hvis der findes en morfi $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ således at $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ og $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Dette kan repræsenteres ved at kræve at diagrammet

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{Id}_B"] \end{tikzcd} \tag{1.15}$$

invers

er kommutativt. En morfi g med denne egenskab kaldes en *invers* til f. To objekter A, B kaldes *isomorfe* hvis der findes en isomorfi i $\mathrm{Mor}(A, B)$. I så fald skriver vi $A \cong B$. Man kan også finde på at dekorere pilen fra A til B med en tilde, så $A \xrightarrow{\sim} B$ betyder at A og B er isomorfe.

Overvej nøje i hvert af eksemplerne i afsnit 1.3, at denne definition giver mening (i betydningen: stemmer overens med normal sprogbrug). For eksempel kaldes to vektorrum jo isomorfe, hvis der findes en lineær afbildning mellem dem, som har en lineær afbildning som invers.

En isomorfi i kategorien **Top** er en kontinuert afbildning som har en kontinuert invers. En sådan kaldes (som bekendt) normalt for en homeomorfi, men jeg vil i resten af noten fastholde den generelle kategoriteoretiske terminologi. Tilsvarende kaldes en isomorfi i **Sets** normalt blot for en bijektion, men jeg vil kalde to mængder isomorfe hvis der findes en bijektion mellem dem.

I alle de eksempler der foreløbig er givet på kategorier ved vi, at en isomorfi har netop én invers. Dette er ikke nogen tilfældighed.

Lemma 1.5.2. *Lad $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ være en isomorfi. Så findes der netop én invers morfi til f.*

Bevis. Lad $g, g' \in \mathrm{Mor}(B, A)$ være to inverse morfier til f. Så har vi at

$$g = g \circ \mathrm{Id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathrm{Id}_A \circ g' = g', \tag{1.16}$$

hvor vi udelukkende har benyttet aksiomerne (K1) og (K2). □

Dette lemma betyder, at det for en isomorfi f giver mening at snakke om *den* inverse morfi, som vil blive betegnet f^{-1}.

Ligeledes er vi vant til, at isomorfi af de betragtede objekter er en ækvivalensrelation. Dette har også almen gyldighed.

Lemma 1.5.3. *Lad $\mathcal{C}$ være en kategori. Så gælder for alle objekter A, B, C at*

(1) $A \cong A$.

(2) $A \cong B \implies B \cong A$

(3) $A \cong B$ *og* $B \cong C$ *medfører* $A \cong C$.

Øvelse 1.5.4. Vis Lemma 1.5.3. Vær omhyggelig med at retfærdiggøre hvert trin.

1.5.2 Mono- og epimorfier

Hvis vi svækker kravet til g i (1.15) ovenfor får vi følgende definitioner: Lad $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$. En morfi $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ kaldes en *venstreinvers* til f hvis $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Tilsvarende kaldes en morfi $h \in \mathrm{Mor}(B, A)$ for en *højreinvers* til f hvis $f \circ h = \mathrm{Id}_B$. venstreinvers højreinvers

Øvelse 1.5.5. Formuler dette i termer af kommutative diagrammer.

Øvelse 1.5.6. Vis ved eksempler at venstre- og højreinverse ikke nødvendigvis er entydigt bestemte. Vær omhyggelig med at specificere hvilke objekter og morfier du betragter.

En isomorfi er altså en morfi $A \to B$ således at der findes en morfi $B \to A$ der virker både som venstre- og højreinvers. Men faktisk behøver vi ikke a priori kræve at de venstre- og højreinverse er ens.

Lemma 1.5.7. *Lad $f\colon A \to B$ være en morfi, og antag at f har både venstre- og højreinverse. Så er f en isomorfi.*

Bevis. Antagelserne betyder, at der findes $g, h \in \mathrm{Mor}(B, A)$ så $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ og $f \circ h = \mathrm{Id}_B$. Men så er

$$g = g \circ \mathrm{Id}_B = g \circ f \circ h = \mathrm{Id}_A \circ h = h \tag{1.17}$$

og det betyder at $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Altså er g en invers til f, som derfor er en isomorfi. □

automorfi

En endomorfi som samtidig er en isomorfi kaldes for en *automorfi*. Mængden af automorfier af et objekt A betegnes $\mathrm{Aut}(A)$, og er altså en delmængde af $\mathrm{End}(A)$.

Øvelse 1.5.8. Vis at $\mathrm{Aut}(A)$ er en gruppe med hensyn til kompositionen $\circ$.

Vi kan svække antagelserne i Lemma 1.5.7 en smule.

Lemma 1.5.9. *Lad $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ være en morfi, og antag at der findes $g, h \in \mathrm{Mor}(B, A)$ så $h \circ f$ og $f \circ g$ er automorfier af henholdsvis A og B. Så er f en isomorfi.*

Bevis. Da $h \circ f$ er en isomorfi findes der specielt en venstreinvers h' til $h \circ f$. Altså er $h' \circ (h \circ f) = \mathrm{Id}_A$. Men så er $h' \circ h$ en venstreinvers til f. På tilsvarende vis indses at f har en højreinvers, og ifølge det foregående lemma er f derfor en isomorfi. □

Se i øvrigt Eksemplerne 1.6.7 og 2.2.9 for en anvendelse af dette lemma.

parallel

Diagrammet $A \rightrightarrows B$ motiverer brugen af ordet *parallel* om to morfier med samme domæne og kodomæne. En morfi $f\colon A \to B$ kaldes en

monomorfi

monomorfi hvis det for alle parallelle morfier $g_1, g_2\colon C \to A$ gælder at

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \implies g_1 = g_2. \tag{1.18}$$

epimorfi

Helt tilsvarende kaldes en morfi $f\colon A \to B$ for en *epimorfi*, hvis det for alle parallelle pile $g_1, g_2\colon B \to C$ gælder at

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \implies g_1 = g_2. \tag{1.19}$$

Til tider dekorerer man pilene i et diagram for at angive, at en morfi er mono eller epi. En monomorfi angives ved at sætte en krog på halen, og en epimorfi ved at fordoble pilehovedet:

$$A \hookrightarrow B \qquad\qquad A \twoheadrightarrow B$$

Øvelse 1.5.10. Vis at en morfi som har en højreinvers er en epimorfi. Vis tilsvarende at en morfi som har en venstreinvers er en monomorfi. Gælder det omvendte?

split epi

split mono

En epimorfi som faktisk har en højreinvers kaldes *split epi*, og en monomorfi som har en venstreinvers kaldes *split mono*.

Det kan være nyttigt at fordøje de netop indførte begreber i nogle konkrete kategorier*. Hvad vil det for eksempel sige, at en morfi i **Grp** er en monomorfi?

*Begrebet "konkret kategori" vil i næste kapitel få en mere, ja konkret, betydning...

Lad $f: G \to H$ være en monomorfi i **Grp**. Så gælder det altså at for alle grupper K og alle gruppehomomorfier $g_1, g_2: K \to G$ at hvis $f \circ g_1 = f \circ g_2$ så er $g_1 = g_2$.

Hvis specielt $K = \ker(f) \subset G$ er kernen af f og vi sætter $g_1: K \to G$ til at være inklusionsafbildningen og g_2 til at være 0-afbildningen (altså den afbildning der sender alting til det neutrale element i G) ser man let, at $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Begge afbildninger er nemlig 0-afbildningen fra K til H. Men da f var antaget at være en monomorfi medfører dette, at $g_1 = g_2$. Dette må igen betyde, at $K = \{0\}$, og endelig konkluderer vi at f er injektiv.

Øvelse 1.5.11. Vis omvendt, at en injektiv gruppehomomorfi er en monomorfi i **Grp**.

Øvelse 1.5.12. Vis at monomorfierne i **Sets** præcis er injektionerne, og at dette igen præcis er de afbildninger som har en venstreinvers.

Vis helt analogt, at epimorfierne i **Sets** præcis er surjektionerne, og at dette præcis er de afbildninger som har en højreinvers.

Øvelse 1.5.13. Giv et eksempel på en epimorfi i **Grp** som *ikke* har en højreinvers.

I alle de eksempler der indtil nu er givet på kategorier, har objekterne alle været en mængde som har en eller anden ekstra struktur. I almindelighed behøver objekterne dog ikke være mængder, og begreberne "injektiv" og "surjektiv" kan man derfor ikke umiddelbart generalisere til alle kategorier, da definitionerne indeholder referencer til elementer i mængderne. Som Øvelse 1.5.12 ovenfor viser, kan man tænke på monomorfier og epimorfier som en slags generalisation. Det er dog ikke rigtigt, at en epimorfi er surjektiv bare fordi ens kategori består af objekter med underliggende mængder. Eksemplet bygger på en lidt mindre kategori end **Top**.

Eksempel 1.5.14. Lad **Haus** betegne kategorien hvor objekterne er Hausdorff topologiske rum og morfierne er kontinuerte afbildninger. Så er inklusionsafbildningen $i: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ en morfi i **Haus** ($\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ gives deres sædvanlige topologi).

Det påstås nu, at i både er en epi- og monomorfi. Lad Y være et vilkårligt Hausdorff topologisk rum, og lad $g_1, g_2: \mathbb{R} \to Y$ være to kontinuerte afbildninger. Antag at $g_1 \circ i = g_2 \circ i: \mathbb{Q} \to Y$. Da således g_1 og g_2 stemmer overens på en tæt delmængde af det topologiske rum $\mathbb{R}$ (nemlig $\mathbb{Q}$) må $g_1 = g_2$. Argumentet er som følger: Antag der er et $x \in \mathbb{R}$ så $g_1(x) \neq g_2(x)$. Da Y er Hausdorff findes disjunkte åbne omegne $U_1 \ni g_1(x)$ og $U_2 \ni g_2(x)$. Da g_1 og g_2 er kontinuerte er $g_1^{-1}(U_1)$ og $g_2^{-1}(U_2)$ åbne omegne af x, og snittet $U = g_1^{-1}(U_1) \cap g_2^{-1}(U_2)$ er så også en åben omegn af x. Da $\mathbb{Q}$ er tæt i $\mathbb{R}$ findes der et $y \in U \cap \mathbb{Q}$. Men det betyder at $g_1(y) = g_2(y) \in U_1 \cap U_2$ i strid med at U_1 og U_2 er disjunkte. Derfor må vi have at $g_1 = g_2$. Altså er i en epimorfi.

Det overlades til læseren at vise, at i også er en monomorfi.

bimorfi

Man kan altså godt have en morfi som både er epi og mono uden at være invertibel. I øvrigt kaldes en morfi som både er epi og mono for en *bimorfi*. En isomorfi er en bimorfi, men det omvendte er ikke altid tilfældet.

1.5.3 Faktorisering

Ofte har man brug for at udtrykke, at det er muligt at skrive en morfi som en sammensætning af to andre morfier. Begrebet forklares bedst ved et eksempel.

faktorisere igennem

Lad $\varphi\colon G \to H$ være en gruppehomomorfi. Man viser i Algebra 1 (Sætning 2.5.1), at φ *faktoriserer igennem* projektionen $\pi\colon G \to G/\ker\varphi$, altså at der findes en gruppehomomomorfi $\widetilde{\varphi}\colon G/\ker\varphi \to H$ sådan at

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/\ker\varphi \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.20}$$

kommuterer.

Man kan bemærke, at da π altid er surjektiv (og dermed en epimorfi i **Grp**) og den inducerede afbildning $\widetilde{\varphi}$ altid er injektiv (og dermed en monomorfi i **Grp**) siger man, at enhver gruppehomomorfi faktoriserer igennem en epimorfi og en monomorfi.

Generelt siger man altså, at en morfi $A \xrightarrow{f} B$ faktoriserer igennem en morfi $A \xrightarrow{g} C$, hvis der findes en morfi $C \xrightarrow{h} B$ så $h \circ g = f$.

1.5.4 Universelle objekter

Ovenfor brugte jeg uden videre ordet "0-afbildningen" uden at redegøre for det rimelige i den bestemte endelse. Vi er vant til, at vi når som helst talen er om "algebraiske objekter" (hermed menes grupper, ringe, vektorrum og lignende) har et trivielt objekt, fx 'den' trivielle gruppe $\{e\}$, nulvektorrummet $\{0\}$ etc. Derudover har vi altid én "triviel" morfi fra et objekt til et andet, som vi normalt bare kalder 0-afbildningen.

Hvis vi skal generalisere dette til kategorier, kan vi naturligvis ikke gøre dette i termer et neutralt element for en eller anden algebraisk operation på objekterne (fx +). Man bliver nødt til at formulere sig i termer af objekterne og de morfier der er til og fra objektet. Med andre ord skal vi finde en *universel egenskab* som de relevante objekter besidder. universel egenskab

De definitioner vi søger er derfor

Definition 1.5.15. Et objekt F i en kategori $\mathcal{C}$ kaldes *frastødende* hvis der for ethvert objekt A i $\mathcal{C}$ findes præcis en morfi $F \longrightarrow A$. Et objekt T kaldes *tiltrækkende* hvis der for ethvert objekt B i $\mathcal{C}$ findes præcis en morfi $B \longrightarrow T$. Et objekt som både er frastødende og tiltrækkende kaldes *universelt*. frastødende tiltrækkende universelt

Man kan også finde på at kalde et frastødende objekt for *initielt*, mens et tiltrækkende objekt kaldes *terminerende*. Et universelt objekt kaldes også et *nulobjekt*. initielt terminerende nulobjekt

Man bemærker specielt, at den *eneste* endomorfi af et frastødende, tiltrækkende eller universelt objekt A er identiteten Id_A (hvorfor?).

Alle grupper med netop et element (neutralelementet) er isomorfe. Noget tilsvarende gælder generelt.

Lemma 1.5.16. *Lad F og F' være to frastødende objekter. Så er F og F' isomorfe via en entydigt bestemt isomorfi.*

Bevis. Antagelsen betyder, at der findes netop en pil $f\colon F \to F'$ og netop en pil $g\colon F' \to F$. Sammensætningen $g \circ f$ er en pil fra F til F. Men da F var antaget at være frastødende findes der kun én sådan pil, og denne må være Id_F.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[loop left, "\mathrm{Id}_F"] \arrow[r, shift left, "f"] & F' \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{Id}_{F'}"] \end{tikzcd} \tag{1.21}$$

Altså er $g \circ f = \mathrm{Id}_F$. På tilsvarende vis ser man, at $f \circ g = \mathrm{Id}_{F'}$. Altså er f en isomorfi, og den eneste mulige. □

Man udtrykker dette ved at sige, at *frastødende objekter er entydigt bestemte op til entydig isomorfi.*

Øvelse 1.5.17. Vis at tiltrækkende objekter er entydigt bestemte op til entydig isomorfi. Vis at universelle objekter er entydigt bestemte op til entydig isomorfi.

Ofte refererer man til et nulobjekt i bestemt form og siger for eksempel nulvektorrummet. Den foregående øvelse viser, at dette er nogenlunde forsvarligt at gøre.

I en kategori med et universelt objekt Z findes der for ethvert par af objekter A, B netop en morfi $A \to Z \to B$. Denne kaldes *nulmorfien* fra A til B. nulmorfien

Øvelse 1.5.18. Vis at nulmorfien fra A til B i en kategori med et universelt objekt er veldefineret. Vis med andre ord at diagrammet

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[d] \\ Z_2 \arrow[r] & B \end{tikzcd} \tag{1.22}$$

er kommutativt, når Z_1 og Z_2 er universelle objekter.

Øvelse 1.5.19. Vis at en sammensætning af en nulmorfi og en hvilken som helst anden morfi giver en nulmorfi.

I **Sets** er den tomme mængde $\emptyset$ frastødende (jf. Bemærkning 1.3.2), mens enhver mængde der består af et enkelt element er tiltrækkende. Derfor findes der ikke nogen universelle objekter i **Sets**. I næste afsnit skal vi indføre en søsterkategori til **Sets** hvori der findes universelle objekter. I **Grp** er $\{e\}$ universelt, og i $\mathbb{F}$**Vect** er $\{0\}$ universelt.

Begrebet “universel egenskab” blev ganske kort nævnt umiddelbart før Definition 1.5.15. Løst sagt er en universel egenskab en hvilken som helst beskrivelse af et objekt, som bestemmer dette objekt entydigt op til entydig isomorfi. Vi vil senere vise, at det Cartesiske produkt $X \times Y$ af to mængder X og Y faktisk er entydigt bestemt op til entydig isomorfi. Vi vil med andre ord fremvise en universel egenskab som $X \times Y$ besidder. Tilsvarende vil vi vise, at det frie produkt $G * H$ af to grupper G og H er entydigt bestemt op til entydig isomorfi.

1.6 Flere eksempler

Tiden er inde til at give endnu en omgang eksempler på kategorier. Vi nævner samtidig hvorvidt kategorien har tiltrækkende eller frastødende objekter.

Eksempel 1.6.1. Betragt kategorien **Sets**$_*$, hvis objekter er par (A, x_0), hvor A er en mængde og x_0 er et element i A. Man kalder gerne **Sets**$_*$ for “kategorien af mængder med basispunkt”. Morfierne $(A, x_0) \to (B, y_0)$ i **Sets**$_*$ er de basispunktbevarende funktioner $A \to B$, altså alle funktioner $f : A \to B$ med $f(x_0) = y_0$. Overvej hvorfor dette bliver en kategori. I denne kategori er objekterne $(\{x_0\}, x_0)$ universelle. Nulmorfierne er de konstante afbildninger som sender alt i basispunktet.

Eksempel 1.6.2. Tilsvarende kan vi udstyre topologiske rum med et basispunkt. Det giver den vigtige kategori **Top**$_*$ som består af par (X, x_0)

hvor X er et topologisk rum (som vi jo egentlig burde skrive (X, τ) hvor X er en mængde og $\tau \subseteq 2^X$ er en topologi på X) og $x_0 \in X$ er et element i X kaldet basispunktet. Morfierne er de basispunktbevarende kontinuerte afbildninger.

Igen er alle objekter på formen $(\{x_0\}, x_0)$ universelle. Dette er dog ikke helt oplagt, men kræver et par (nemme) overvejelser. For det første er der kun én mulig topologi på en singletonmængde, og denne topologi er på en gang den diskrete og den trivielle (hvorfor?). Det er således utvetydigt at snakke om "det topologiske rum $\{x_0\}$". For ethvert topologisk rum med basispunkt (Y, y_0) er der netop en mulig afbildning $\{x_0\} \to Y$ og en mulig afbildning $Y \to \{x_0\}$. Disse bliver kontinuerte, da en afbildning fra et diskret topologisk rum altid er kontinuert (hvorfor?), og da en afbildning ind i et topologisk rum med den trivielle topologi altid er kontinuert (hvorfor?).

I de eksempler der hidtil er givet på frastødende eller tiltrækkende objekter har der været tale om et ret trivielt eksempel; i alle tilfælde har der været tale om $\emptyset$ eller en mængde med et enkelt element. Vi skal nu give et mere interessant eksempel.

Eksempel 1.6.3. Lad **Rng** betegne kategorien hvis objekter er ringe (med enhed 1), og hvis morfier er de 1-bevarende ringhomomorfier. Man viser i Algebra 1, at $\mathbb{Z}$ er frastødende i denne kategori. Det er Sætning 3.3.3 i min udgave af Algebra 1-noterne (om den entydige ringhomomorfi $\mathbb{Z} \to R$). Man kunne måske fra de foregående eksempler have den mistanke, at nulringen $\{0\}$ er universel, men dette ville så være en modstrid med Lemma 1.5.16. Men nulringen er ikke frastødende:

En let overvejelse viser, at hvis R er en ring hvori $0 = 1$, så består R kun af dette ene element. Hvis nemlig $x \in R$ er et vilkårligt element er $0 = 0 \cdot x = 1 \cdot x = x$. Derfor findes der ikke ringe med mere end et element hvori $0 = 1$. Men det betyder igen, at hvis R er en ikke-triviel ring findes der ingen ringhomomorfier $\{0\} \to R$ (fordi 0 både skal afbildes i 0 og 1, hvilket er absurd). Da der findes ringe med mere end et element (!), betyder ikke-eksistensen af morfier fra nulringen til disse ringe at nulringen ikke er frastødende.

Derimod er nulringen tiltrækkende, fordi afbildningen $R \to \{0\}$ er en ringhomomorfi for enhver ring R.

Ganske som i **Grp** gælder det, at en morfi i **Rng** er mono hvis og kun hvis den er injektiv.

Det næste eksempel bygger på en generalisering af begrebet vektorrum. Da det ikke er sikkert at læseren er stødt på ordet *modul* tidligere, giver vi først en definition af dette.

Definition 1.6.4. Lad R være en ring med enhed 1. Et (venstre) R-modul er en abelsk gruppe $(M,+)$ sammen med en afbildning $R \times M \to M$, skrevet $(x,v) \mapsto x.v$ således at

(M1) $(ab).v = a.(b.v)$

(M2) $1.v = v$

(M3) $(a+b).v = a.v + b.v$

(M4) $a.(v+w) = a.v + a.w$

for alle $a,b \in R$ og $v,w \in M$.

I tilfældet hvor R er et legeme stemmer denne definition helt overens med definitionen af et vektorrum over R. Man kan derfor passende tænke på moduler som en generalisation af vektorrum.

En R-modulhomomorfi $f\colon M \to N$ er en R-lineær gruppehomomorfi. Skrevet helt ud betyder det, at

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(v) + f(w) \\ f(a.v) &= a.f(v) \end{aligned}$$

for alle $v,w \in M$ og alle $a \in R$.

Med disse definitioner frisk i hukommelsen iler vi videre med det næste eksempel.

Eksempel 1.6.5. Lad R være en fastholdt ring. Så betegner R-**Mod** kategorien hvis objekter er R-moduler, og hvis morfier er R-modulhomomorfier. Det overlades til læseren at kontrollere, at dette faktisk er en kategori. Nulmodulet $\{0\}$ er universelt i denne kategori.

Kategorien $\mathbb{Z}$-**Mod** af moduler over de hele tal $\mathbb{Z}$ er udgangspunktet for en senere diskussion af et meget vigtigt begreb, nemlig ækvivalens af kategorier. Vi vil vise, at $\mathbb{Z}$-**Mod** i passende forstand er den samme kategori som **Ab**. I samme boldgade vil vi vise, at hvis $\mathbb{F}$ er et legeme er $\mathbb{F}$-**Mod** og $\mathbb{F}$**Vect** de samme kategorier.

Eksempel 1.6.6. Det er ikke alle kategorier hvor objekterne "bare" er mængder med en eller anden struktur og morfierne er de strukturbevarende afbildninger mellem disse mængder. Som et ret simpelt eksempel på dette lader vi $\mathbb{F}$ være et legeme, og $\mathcal{C}$ være kategorien hvis objekter er tripler (V_1, V_2, f), hvor V_1 og V_2 er vektorrum over $\mathbb{F}$ og f er en lineær afbildning $V_1 \to V_2$. Man kunne også sige at objekterne i $\mathcal{C}$ er diagrammer i $\mathbb{F}$**Vect** af formen $V_1 \xrightarrow{f} V_2$. Dette synspunkt viser sig senere at være nyttigt.

Morfierne fra (V_1, V_2, f) til (W_1, W_2, g) er par (φ_1, φ_2) af lineære afbildninger $\varphi_i \colon V_i \to W_i$, som gør diagrammet

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & W_1 \arrow[d, "g"] \\ V_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & W_2 \end{tikzcd} \tag{1.23}$$

kommutativt.

Komposition af morfier er naturligvis defineret komponentvis: Lad $A = (V_1, V_2, f)$, $B = (W_1, W_2, g)$ og $C = (U_1, U_2, h)$ være tre objekter, og $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $(\theta_1, \theta_2) \in \mathrm{Mor}(B, C)$ to morfier. Så defineres

$$(\theta_1, \theta_2) \circ (\varphi_1, \varphi_2) = (\theta_1 \circ \varphi_1, \theta_2 \circ \varphi_2).$$

At dette faktisk bliver en morfi fra A til C kan umiddelbart ses af dette diagram

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & W_1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "g"] & U_1 \arrow[d, "h"] \\ V_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & W_2 \arrow[r, "\theta_2"'] & U_2 \end{tikzcd} \tag{1.24}$$

da både det venstre og det højre kvadrat er kommutative.

En meget skarp læser vil observere, at dette teknisk set ikke udgør en kategori! Årsagen er, at en hvilken som helst morfi $(\varphi_1, \varphi_2) \colon (V_1, V_2, f) \to (W_1, W_2, g)$ også er en morfi $(V_1, V_2, 0) \to (W_1, W_2, 0)$, og aksiom (K3) er derfor ikke opfyldt. For at reparere dette kan vi definere en morfi til at være en kvadrupel $(\varphi_1, \varphi_2, f, g)$ med φ_i som ovenfor. Normalt benytter man dog en simplere notation og husker på, at man bruger diverse tricks for at gøre morfi-mængderne disjunkte. (Dette eksempel og dets formulering er kraftigt inspireret af tilsvarende eksempler i [Jan04]).

Eksempel 1.6.7. En kategori som spiller en fundamental rolle i algebraisk topologi er **Toph**. Dens objekter er topologiske rum, og morfierne $X \to Y$ er *homotopiklasser* af kontinerte afbildninger. Altså er

$$\mathrm{Mor}(X, Y) = \big\{[f] \mid f \colon X \to Y \text{ kontinuert}\big\} \tag{1.25}$$

hvor $[f]$ betegner homotopiklassen som f tilhører, altså mængden

$$[f] = \big\{g \colon X \to Y \mid f \simeq g\big\}. \tag{1.26}$$

Dette er en kategori fordi der findes en veldefineret sammensætning af homotopiklasser: Hvis $[f] \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ og $[g] \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$, giver det mening at sætte $[g] \circ [f] = [g \circ f]$, hvor $g \circ f$ betegner den sædvanlige sammensatte afbildning $X \to Z$. Antag nemlig at $[f] = [f']$ og $[g] = [g']$, altså at $f \simeq f'$ og $g \simeq g'$. Vi skal så vise at $[g \circ f] = [g' \circ f']$. Antagelserne betyder at der findes homotopier $F\colon X \times I \to Y$, $G\colon Y \times I \to Z$ med $F(-, 0) = f$, $F(-, 1) = f'$, $G(-, 0) = g$, $G(-, 1) = g'$. Afbildningen $H\colon X \times I \to Z$ defineret ved

$$H(x, t) = G(F(x, t), t) \tag{1.27}$$

er så en kontinuert afbildning, og en efterregning viser at det faktisk er en homotopi fra $g \circ f$ til $g' \circ f'$. Derfor er $[g \circ f] = [g' \circ f']$.

Det overlades til læseren at kontrollere de øvrige kategoriaksiomer.

Identitetsmorfien knyttet til et topologisk rum X ses let at være $[\mathrm{Id}_X]$, homotopiklassen indeholdende identitetsafbildningen på X. En isomorfi i **Toph** er (pr. definition) en homotopiklasse $[f] \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ således at der findes en homotopiklasse $[g]$ med $[g] \circ [f] = [g \circ f] = [\mathrm{Id}_X]$ og $[f] \circ [g] = [f \circ g][\mathrm{Id}_Y]$. Men det betyder, at $[f]$ en isomorfi i **Toph** præcis hvis f er en homotopiækvivalens mellem de topologisk rum X og Y!

Kapitel 2

Funktorer

2.1 Motivation og definition

Indtil nu har vi set hvordan man kan opfatte mange af de kendte matematiske objekter og afbildninger mellem dem som realisationer af en meget generel definition. Det ville være svært at studere grupper, hvis man ikke også studerede gruppehomomorfier, og det ville være svært at arbejde med topologiske rum hvis man ikke også arbejdede med de kontinuerte afbildninger.

Et godt eksempel på dette er Opgave II.27 i [Lau03]. Man bliver bedt om at "bestemme" gruppen $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Pointen er, at det er muligt at definere grupper, undergrupper, normale undergrupper og kvotientgrupper uden på noget tidspunkt at definere en gruppehomomorfi. Til gengæld har man ikke nogen anelse om hvordan gruppen G ser ud. Det er først når man indser at determinantafbildningen

$$\det\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$$

er en gruppehomomorfi med kerne $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ at man finder ud af, at G faktisk, i passende forstand, bare "er" gruppen $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.

Moralen må være, at vi for at værdsætte kategoribegrebet skal finde på en slags afbildninger mellem kategorier. Disse afbildninger skal bevare strukturen på kategorien. I en gruppe udgøres strukturen er multiplikationen $\cdot$, i et topologisk rum udgøres strukturen af de åbne mængder. I en kategori udgøres strukturen af morfierne og hvordan disse sammensættes. En smule overvejelse viser, at den definition vi søger er

Definition 2.1.1. Lad $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være to kategorier. En *funktor* F fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ er en "funktion", som opfylder følgende aksiomer: funktor

(F1) Til ethvert objekt A i $\mathcal{C}$ er der tilordnet et objekt $F(A)$ i $\mathcal{D}$.

(F2) Til enhver morfi $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ i $\mathcal{C}$ er der tilordnet en morfi
$$F(f) \in \mathrm{Mor}(F(A), F(B)). \tag{2.1}$$

(F3) For ethvert objekt A i $\mathcal{C}$ er $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$.

(F4) For $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ er
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f). \tag{2.2}$$

Det første aksiom fortæller, at vi for hvert objekt i $\mathcal{C}$ skal have et objekt i $\mathcal{D}$, mens det andet fortæller at vi for hver pil mellem to objekter i $\mathcal{C}$ skal have en pil mellem de tilsvarende objekter i $\mathcal{D}$. Det tredje aksiom udtrykker, at en funktor respekterer identitetsmorfierne, mens det fjerde udtrykker, at en funktor bevarer komposition af morfier.

Som al anden ny matematik kan denne definition virke noget abstrakt ved første øjekast, men heldigvis ligger der masser af eksempler lige for. Før vi når så langt vil jeg dog rette op på den hvide løgn jeg lige har fortalt.

kovariant funktor

I virkeligheden findes der to slags funktorer. Den type som er defineret ovenfor kaldes en *kovariant funktor*. Hvis vi modificerer (2.1) og (2.2) til for $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ at kræve

(F2′) $$F(f) \in \mathrm{Mor}(F(B), F(A)) \tag{2.3}$$

(F4′) $$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \tag{2.4}$$

kontravariant funktor

får vi definitionen af en *kontravariant funktor*. Ligesom dens kovariante fætter giver en kontravariant funktor altså for hvert objekt i $\mathcal{C}$ et objekt i $\mathcal{D}$, og for hver pil mellem to objekter i $\mathcal{C}$ en pil mellem de tilsvarende objekter i $\mathcal{D}$. Men pilen vender den anden vej! Aksiomet (F4′) er blot en nødvendig modifikation af (F4) der tager højde for dette.

induceret morfi

Hvis F er en funktor (enten ko- eller kontravariant) kaldes $F(f)$ for den *inducerede morfi*, eller eventuelt *den af f inducerede morfi*. Det viser sig ofte at være lidt tungt at slæbe rundt på navnet på funktoren, så man betegner ofte $F(f)$ med f_* hvis F er kovariant, og med f^* hvis F er kontravariant. Det kræver dog, at det er klart fra konteksten hvilken funktor der er i spil.

Et par slogans som det kan være nyttigt at huske er: En kovariant funktor bevarer pilenes retning; en kontravariant funktor vender alle pile om.

Betydningen af disse slogans kan ses i de følgende diagrammer, hvor F betegner en kovariant funktor og G betegner en kontravariant funktor.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \quad \overset{F}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"'] & F(B) \arrow[d, "g_*"] \\ & F(C) \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \quad \overset{G}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} G(A) & G(B) \arrow[l, "f^*"'] \\ & G(C) \arrow[ul, "(g\circ f)^*"] \arrow[u, "g^*"'] \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Bemærk, at diagrammerne til højre faktisk er kommutative, fordi

$$(g \circ f)_* = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = g_* \circ f_* \tag{2.7}$$
$$(g \circ f)^* = G(g \circ f) = G(f) \circ G(g) = f^* \circ g^* \tag{2.8}$$

ifølge aksiomerne (F4) og (F4′).

Det gælder generelt, at hvis man har et kommutativt diagram, og anvender en funktor på dette diagram får man igen et kommutativt diagram (**overvej dette!**).

En funktor F er altså defineret på både objekter og morfier. Vi vil bruge ordet *objektfunktionen* om tilordningen $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, og ordet objektfunktionen
morfifunktionen om tilordningen $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$. Vi vil bruge betegnelsen F om begge dele, da det aldrig burde give anledning til forvirring. morfifunktionen

Som et eksempel illusterer vi aksiomet (F3) ved det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \arrow[d, "F"] \\ \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathrm{Mor}(\mathcal{D}), \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

hvor det venstre F betegner objektfunktionen og det højre F betegner morfifunktionen. Id er den “funktion” som til et objekt A tilordner identitetsmorfien Id_A.

Bemærkning 2.1.2. I almindelighed (og i hvert fald i de fleste af de kategorier vi hidtil er stødt på) er der ***alt*** for mange objekter og morfier til at $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ og $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ på nogen måde kan udgøre mængder i streng mængdeteoretisk forstand. Der findes ingen "mængde af alle mængder", ingen "mængde af alle $\mathbb{R}$-vektorrum" og ingen "mængde af alle grupper". Pilene i diagrammet (2.9) skal derfor ikke ses som afbildninger mellem mængder, men lidt løsere som "tilordninger". I samme ånd kan vi opfatte dom og kod som tilordninger $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

En streng aksiomatisk introduktion til kategoriteori ville være al for teknisk, og stringens er ikke førsteprioriteten i denne note. I stedet appelleres til læserens intuition og sunde fornuft.

Den interesserede læser henvises til [ML98].

2.2 Eksempler på funktorer

Før vi udforsker generelle egenskaber ved funktorer, bør der gives en række eksempler som læseren kan have i tankerne.

Eksempel 2.2.1 (Fundamentalgruppen). Fundamentalgruppen π_1 er en kovariant funktor fra kategorien af topologiske rum med basispunkt $\mathbf{Top}_*$ til kategorien af grupper $\mathbf{Grp}$. Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ der knyttes til et topologisk rum X med basispunkt x_0 består af homotopiklasser $[\alpha]$ af løkker α i x_0, hvor der med "en løkke i x_0" menes en kontinuert afbildning $\alpha\colon [0,1] \to X$ med $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Gruppemultiplikationen defineres ved konkatenation af repræsentanter; altså $[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$.

Funktoren π_1 virker på en basispunktbevarende kontinuert afbildning $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ved at $\pi_1(f)([\alpha]) = f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Da f er basispunktbevarende er $f \circ \alpha$ faktisk en løkke i y_0.

Der er selvfølgelig mange ting der skal kontrolleres, før man kan tillade sig at kalde π_1 en funktor. Fx skal man kontrollere, at $\pi_1(X, x_0)$ er en gruppe (multiplikationen er veldefineret samt de sædvanlige gruppeaksiomer). Se [Hat02, Proposition 1.3] for dette. Man skal også kontrollere, at f_* er en veldefineret afbildning $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, og at det er en gruppehomomorfi. Dette gøres på ganske få linjer i afsnittet "Induced Homomorphisms" i [Hat02, side 34]. Endelig skal de to funktoraksiomer kontrolleres, men det er ganske trivielt. For en god ordens skyld gør vi det alligevel.

Vi har at $(\mathrm{Id}_{(X,x_0)})_*([\alpha]) = [\mathrm{Id}_{(X,x_0)} \circ \alpha] = [\alpha]$, så $(\mathrm{Id}_{(X,x_0)})_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$, og aksiomet (F3) er derfor opfyldt. Tilsvarende finder vi, at

$$\begin{aligned}(g \circ f)_*([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] \\ &= [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= g_*([f \circ \alpha]) \\ &= g_*(f_*([\alpha])) \\ &= (g_* \circ f_*)([\alpha]),\end{aligned}$$

så $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Derfor er også (F4) opfyldt.

Eksempel 2.2.2 (Dualt vektorrum). Der er en kontravariant funktor $\mathrm{Dual}\colon \mathbb{F}\mathbf{Vect} \to \mathbb{F}\mathbf{Vect}$ som til et $\mathbb{F}$-vektorrum V knytter dets duale vektorrum $\mathrm{Dual}(V) = V^*$. Husk på, at V^* betegner mængden af lineære afbildninger $V \to \mathbb{F}$. Det er et $\mathbb{F}$-vektorrum på den oplagte måde, nemlig $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ og $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$ for $f, g \in V^*$, $\lambda \in \mathbb{F}$ og $v \in V$. Det er en god øvelse at tjekke, at $f + g$ og λf faktisk bliver lineære afbildninger fra V til $\mathbb{F}$.

Jeg påstod at Dual er kontravariant. Altså skal der for en $\mathbb{F}$-lineær afbildning $\varphi\colon V \to W$ produceres en $\mathbb{F}$-lineær afbildning $\mathrm{Dual}(\varphi) = \varphi^*\colon W^* \to V^*$. Denne defineres ved at for et element $f \in W^*$ er $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Kontrollér, at dette faktisk bliver en $\mathbb{F}$-lineær afbildning fra V til $\mathbb{F}$, og altså et element i V^*.

De to funktoraksiomer er nemme at tjekke. Da $(\mathrm{Id}_V)^*(f) = f \circ \mathrm{Id}_V = f$ er $(\mathrm{Id}_V)^* = \mathrm{Id}_{V^*}$, og hvis $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\theta} V_3$ er to lineære afbildninger har vi for $f \in V_3^*$ at

$$(\theta \circ \varphi)^*(f) = f \circ \theta \circ \varphi = \varphi^*(f \circ \theta) = \varphi^*(\theta^*(f))$$

så $(\theta \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \theta^*$.

Da Dual „gør det samme“ ved et vektorrum og en lineær afbildning (nemlig „sætter en stjerne øverst til højre“) kan man også finde på at skrive funktoren Dual som $-^*$, hvis man vil spare plads og forvirre læseren.

Bemærkning 2.2.3. Et faktum som vi skal bruge senere er følgende: Hvis V har endelig dimension (fx n), så har også V^* dimension n. Hvis nemlig $e_1, \ldots, e_n$ er en basis for V, udgør de n funktioner $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ defineret ved

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} \tag{2.10}$$

(og udvidet ved linearitet) en basis for V^* (vis det). Basen (ε_i) for V^* kaldes den duale basis. Afbildningen $V \to V^*$ som er defineret ved $e_i \mapsto \varepsilon_i$ (og udvidet ved linearitet) er altså en isomorfi, *men fordi denne afbildning afhænger af et valg af basis for V er den i passende forstand ikke naturlig!*

Eksempel 2.2.4 (Potensmængde). Der findes en funktor

$$\mathcal{P}\colon \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets},$$

som til en mængde X knytter dens potensmængde $\mathcal{P}(X) = 2^X$, mængden af alle delmængder af X. Denne funktor kan faktisk både gøres ko- og kontravariant!

Den bliver kovariant hvis man for en funktion $f\colon X \to Y$ sætter

$$\mathcal{P}(f) = f_*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$

til at være den funktion, som for en delmængde A af X giver billedet af A under f. Vi sætter altså

$$f_*(A) = \{f(x) | x \in A\} \subseteq Y.$$

Denne mængde betegnes sædvanligvis blot med $f(A)$.

Tilsvarende kan vi gøre $\mathcal{P}$ kontravariant, hvis vi for en funktion $f\colon X \to Y$ sætter $\mathcal{P}(f) = f^*$ til at være den funktion, som for en delmængde B af Y giver tilbagetrækket af B under f. Altså sættes

$$f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X.$$

Denne mængde betegnes sædvanligvis blot med $f^{-1}(B)$, og det er normalt overladt til læseren selv at skelne mellem de tilfælde hvor f^{-1} betegner den inverse funktion til f (som ikke altid findes), og de tilfælde hvor f^{-1} betegner funktionen $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ defineret ovenfor.

Øvelse 2.2.5. Bevis at $\mathcal{P}$ bliver en funktor i begge tilfælde. Vis i særdeleshed at tilbagetræk har den „nydelige egenskab“ som blev brugt i Eksempel 1.3.4.

Eksempel 2.2.6 (Glemsomme funktorer). Der er en funktor $\mathrm{FG}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Sets}$ som til en gruppe G knytter $\mathrm{FG}(G)$, som er G betragtet kun som mængde. Bogstaverne FG står for "forget", fordi FG så at sige "glemmer" at G har en gruppestruktur. Den virker på morfier ved at $\mathrm{FG}(f)$ simpelthen er den samme afbildning som f, men som afbildning på de underliggende mængder.

Det er oplagt at FG er en kovariant funktor. Man kan konstruere masser af andre glemsomme funktorer; fx $\mathbf{Vect} \to \mathbf{Ab}$ (glem den skalare multiplikation), $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab}$ (glem multiplikationen), $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}$ (glem basispunktet), $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ (glem at gruppen er abelsk), $\mathbf{Fld}_p \to \mathbf{Rng}$ (glem at der er tale om et legeme), og naturligvis er der i de fleste af de indtil videre givne eksempler på kategorier en glemsom funktor ind i **Sets**.

Det kan virke bizart, at glemsomme funktorer skulle have nogen interesse. Ikke desto mindre spiller de en rolle visse steder i resten af noten.

Eksempel 2.2.7. Det næstsidste eksempel i denne omgang er en kovariant funktor. Hvis G er en gruppe betegner $[G, G]$ kommutatorundergruppen; undergruppen af G frembragt af alle elementer på formen $ghg^{-1}h^{-1}$. Man kan kontrollere, at $[G, G]$ faktisk altid vil være en normal undergruppe, og at kvotientgruppen $G/[G, G]$ er en abelsk gruppe. I øvrigt er $[G, G]$ den mindste normale undergruppe af G således at kvotientgruppen $G/[G, G]$ er abelsk.

Objektfunktionen af funktoren $\mathrm{Ab}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ defineres derfor ved $\mathrm{Ab}(G) = G/[G, G]$.

Hvis $f\colon G \to H$ er en gruppehomomorfi, ønsker vi at definere en afbildning $\mathrm{Ab}(f)\colon G/[G, G] \to H/[H, H]$. Til det formål skal vi lige bruge et nemt lemma først.

Lemma 2.2.8. *Lad G og M være to grupper, $\varphi\colon G \to M$ en gruppehomomorfi og $G' \subseteq G$ en normal undergruppe. Så findes en gruppehomomorfi $\widetilde{\varphi}\colon G/G' \to M$ som gør diagrammet*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & M \\ G/G' \arrow[ur, dotted, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

kommutativt, hvis og kun hvis $G' \subseteq \ker \varphi$.

Bevis. Overlades til læseren. □

For at vende tilbage til eksemplet observerer vi, at

$$f(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)f(g_1)^{-1}f(g_2)^{-1}, \tag{2.12}$$

(f afbilder kommutatorer til kommutatorer) og vi har derfor at $f([G, G]) \subseteq [H, H]$ og dermed at $[G, G] \subseteq \ker(\pi \circ f)$. Vi kan derfor ifølge lemmaet finde en afbildning $\mathrm{Ab}(f) = \widetilde{f}$ som opfylder at $\pi \circ f = \widetilde{f} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[d, "\pi"] \\ G/[G,G] \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & H/[H,H] \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

Det er let at overbevise sig om, at der kun kan findes et sådant $\widetilde{f}$, så $\mathrm{Ab}(f)$ derfor bliver veldefineret.

At $\mathrm{Ab}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ faktisk er en funktor overlades til læseren at kontrollere. Det er i al væsentlighed bare et spørgsmål om at få skrevet de rigtige diagrammer op.

Eksempel 2.2.9. Der findes en kovariant funktor $[\,-\,]\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Toph}$. På objekter virker den som identiteten, og til en morfi f tilordner den homotopiklassen $[f]$ hørende til f. En genlæsning af Eksempel 1.6.7 kan måske være til en hjælp.

En opgave (0.11) i [Hat02] lyder: Lad X og Y være topologiske rum og $f\colon X \to Y$ en kontinuert afbildning. Antag der findes $g, h\colon X \to Y$ så $h \circ f$ og $f \circ g$ er homotopiækvivalenser. Vis at f er en homotopiækvivalens.

Denne opgave er fuldstændig triviel, hvis vi udnytter bemærkningerne sidst i Eksempel 1.6.7, Lemma 1.5.9 og det at $[\,-\,]$ er en funktor: Pr. antagelse har vi nemlig at $[h \circ f] = [h] \circ [f]$ og $[f \circ g] = [f] \circ [g]$ er automorfier i **Toph**, men så er $[f]$ en isomorfi, hvilket jo igen betyder at f er en homotopiækvivalens.

2.3 Grundlæggende egenskaber

Indtil nu har vi kun givet definitionen på de to typer funktorer, og givet en række eksempler. Dette er naturligvis langt fra tilfredsstillende, og vi vil derfor i det følgende opridse et par basale resultater som følger direkte af definitionen. Undervejs indfører vi en ny omgang terminologi.

Det første resultat er samtidig et af de vigtigste. I sin korte form lyder det simpelthen: *En funktor bevarer isomorfier.* Skrevet helt ud betyder det at vi har

Lemma 2.3.1. *Lad $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være to kategorier, og F en funktor fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$. Lad $f\colon A \to B$ være en isomorfi i $\mathcal{C}$. Så er $F(f)$ en isomorfi i $\mathcal{D}$.*

Bevis. Antag for bestemtheds skyld at F er kovariant. Det kontravariante tilfælde overlades til læseren. Vi skal altså vise, at $F(f)$ er en isomorfi fra $F(A)$ til $F(B)$. Vi ved pr. antagelse, at f er en isomorfi, så der findes en morfi $g\colon B \to A$ i $\mathcal{C}$ med $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ og $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Anvender vi funktoren F på disse identiteter får vi

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)} \tag{2.14}$$
$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\mathrm{Id}_B) = \mathrm{Id}_{F(B)}\,. \tag{2.15}$$

Dette viser at $F(g)$ er en invers til $F(f)$, og $F(f)$ er derfor en isomorfi mellem $F(A)$ og $F(B)$.

Bemærk hvordan aksiomerne (F3) og (F4) er skræddersyet til dette bevis. ☐

Bemærkning 2.3.2. Dette lemma er især nyttigt i sin kontraponerede form: Hvis $F(A)$ og $F(B)$ ikke er isomorfe objekter i $\mathcal{D}$, er A og B ikke isomorfe i $\mathcal{C}$. Algebraisk topologi er et langt stykke hen af vejen et spørgsmål om at konstruere funktorer fra kategorier af geometriske objekter (topologiske rum, CW-komplekser, glatte mangfoldigheder etc.) til kategorier af algebraiske objekter (grupper, vektorrum etc.), fordi man på denne måde får en række værktøjer til at afgøre hvorvidt to geometriske objekter er "ens". Eksempler herpå er fundamentalgruppen π_1 (og generaliseringen homotopigrupper π_n), homologi-grupperne H_n samt de Rham-kohomologivektorrummene H^n. Det er umiddelbart klart, at jo flere sådanne funktorer man har til rådighed, jo bedre chance har man for at skelne ikke-homeomorfe (eller ikke-homotopiækvivalente) rum fra hinanden. Hvis for eksempel n og m er to forskellige hele tal større end 1, er S^n og S^m ikke homotopiækvivalente. Det kan man ikke afgøre ved hjælp af fundamentalgruppen (den er triviel i begge tilfælde), men så snart man har hele arsenalet af homologigrupper H_* til rådighed afslører det sig straks.

Det kan være givtigt at gennemgå hvert af eksemplerne i Afsnit 2.2 og overbevise sig om, at lemmaet holder i hvert tilfælde. Hvorfor er det fx rigtigt, at en bijektion på mængder inducerer en bijektion på potensmængderne (i både det ko- og kontravariante tilfælde)? Hvorfor inducerer en gruppeisomorfi en isomorfi af abeliniseringerne af de to grupper? Hvorfor inducerer en isomorfi i **Top** (= en homeomorfi) en isomorfi i **Toph** (= en homotopiklasse repræsenteret ved en homotopiækvivalens)?

2.4 Typer af funktorer

Man kan spørge, hvornår det modsatte af Lemma 2.3.1 gælder. En funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ som opfylder, at f er en isomorfi i $\mathcal{C}$ hvis blot $F(f)$ er en isomorfi i $\mathcal{D}$ kaldes en *konservativ funktor*. Fx viser man i Algebra 1 at en bijektiv gruppehomomorfi er en gruppeisomorfi. Altså er FG: **Grp** → **Sets** en konservativ funktor. Derimod er den glemsomme funktor **Top** → **Sets** ikke konservativ, da der findes kontinuerte afbildninger som er bijektioner på de underliggende mængder (og altså isomorfier i **Sets**), men som ikke har en invers morfi i **Top** (altså ikke har en kontinuert afbildning som invers). konservativ funktor

Øvelse 2.4.1. Er den glemsomme funktor $\mathbf{Top}_*$ → **Top** konservativ? Hvis (X, x_0) og (Y, y_0) er to topologiske rum med basispunkt, og X og Y er isomorfe i **Top**, er (X, x_0) og (Y, y_0) så isomorfe i $\mathbf{Top}_*$?

Givet tre kategorier $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ og to funktorer $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ kan man definere den *sammensatte funktor* $G \circ F$. Det er en funktor fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{E}$ som virker på objekter A og pile f på den oplagte måde, sammensat funktor

$$(G \circ F)(A) = G(F(A)) \qquad \text{og} \qquad (G \circ F)(f) = G(F(f)).$$

Øvelse 2.4.2. Vis at $G \circ F$ er en funktor fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{E}$. Forklar hvornår $G \circ F$ er kovariant og hvornår den er kontravariant.

identitetsfunktor

På enhver kategori $\mathcal{C}$ findes der en funktor $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ fra $\mathcal{C}$ til sig selv, kaldet *identitetsfunktoren* på $\mathcal{C}$. Det overlades til læserens fantasi at gætte hvordan denne er defineret.

isomorfi af kategorier

invers funktor

En funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kaldes en *isomorfi af kategorier* hvis der findes en *invers funktor* til F, altså en funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ så $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ og $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.

Isomorfi af kategorier er et meget stærkt begreb. Faktisk er det lidt for stærkt til vores formål, så vi vil introducere nogle lidt svagere begreber som viser sig nyttige. Dette sker dog først i det næste afsnit om naturlige transformationer.

2.4.1 Troværdighed og fuldskab

troværdig

En funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ siges at være *troværdig*, hvis det for alle objekter A og B i $\mathcal{C}$ og alle parallelle pile $f_1, f_2\colon A \to B$ gælder, at

$$F(f_1) = F(f_2) \implies f_1 = f_2. \tag{2.16}$$

Med andre ord er F troværdig, hvis det for alle objekter A, B i $\mathcal{C}$ gælder, at funktionen $F_{A,B}\colon \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(F(A), F(B))$ er injektiv.

fuld

Tilsvarende kaldes F *fuld*, hvis der for alle objekter A, B i $\mathcal{C}$ og alle morfier $g \in \mathrm{Mor}(F(A), F(B))$ findes en morfi $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ så $F(f) = g$. Sagt på en anden måde er F fuld, hvis $F_{A,B}$ er surjektiv for alle objekter A, B.

(I de foregående to afsnit skal kodomænet for funktionen $F_{A,B}$ selvfølgelig udskiftes med $\mathrm{Mor}(F(B), F(A))$ hvis F er kontravariant).

Øvelse 2.4.3. Vis at sammensætningen af to troværdige funktorer er troværdig. Vis at sammensætningen af to fulde funktorer er fuld.

Øvelse 2.4.4. Lad $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være en funktor.

Vis, at hvis der findes en kategori $\mathcal{E}$ og en funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ så $G \circ F$ er troværdig, så er F troværdig.

Vis tilsvarende, at hvis der findes en kategori $\mathcal{B}$ og en funktor $H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ så $F \circ H$ er fuld, så er F fuld.

Den engelsk glose for troværdig er “faithful”, og glosen for fuld er “full”. På engelsk kalder man derfor en funktor som både er troværdig og fuld for “fully faithful”. Jeg vælger sammentrækningen “fuldt troværdig”.

Eksempel 2.4.5. De glemsomme funktorer **Top** $\to$ **Sets**, **Grp** $\to$ **Sets**, **Rng** $\to$ **Sets** og $\mathbb{F}$**Vect** $\to$ **Sets** er alle troværdige. Man kan udtrykke dette ved at sige at "en gruppehomomorfi er bestemt ved dens virkning på de underliggende mængder", og tilsvarende i de andre tilfælde. Ingen af disse funktorer er fulde; fx er det langt fra alle afbildninger $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som er gruppehomomorfier.

Fundamentalgruppen π_1 er ikke en troværdig funktor fra $\mathbf{Top}_*$ til **Grp**. Fx inducerer to homotope kontinuerte afbildninger den samme gruppehomomorfi.

Troværdige funktorer kan benyttes til at eftervise at en morfi er mono eller epi. Mere specifikt har vi følgende lemma.

Lemma 2.4.6. *Lad $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være en kovariant, troværdig funktor og f en morfi i $\mathcal{C}$. Så gælder, at hvis $F(f)$ en monomorfi, så er også f en monomorfi. Tilsvarende, hvis $F(f)$ er en epimorfi, så er f en epimorfi.*

Bevis. Antag $F(f)$ er en monomorfi. Lad g_1 og g_2 være to parallelle pile i $\mathcal{C}$ for hvilke $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Så er

$$F(f) \circ F(g_1) = F(f \circ g_1) = F(f \circ g_2) = F(f) \circ F(g_2)$$

men dette medfører (fordi $F(f)$ er en monomorfi i $\mathcal{D}$) at $F(g_1) = F(g_2)$, og da F var antaget at være troværdig betyder det at $g_1 = g_2$. Beviset er helt analogt i tilfældet hvor $F(f)$ er en epimorfi. $\square$

Da den glemsomme funktor **Top** $\to$ **Sets** er troværdig og kovariant, giver dette et nemt bevis for den del af Eksempel 1.5.14 der blev overladt til læseren: Man skulle vise at inklusionsafbildningen $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ er en monomorfi i **Top**. Men i er injektiv som afbildning mellem mængderne $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$, og dermed en monomorfi i **Sets**. Så fortæller lemmaet ovenfor at i er en monomorfi i **Top**. Bemærk at i er en epimorfi i **Top** men ikke i **Sets**, så man kan ikke nødvendigvis konkludere den anden vej.

Øvelse 2.4.7. Antag i stedet at F er kontravariant i Lemma 2.4.6. Hvad kan man så konkludere?

Læseren har måske spurgt sig selv om, hvilke kategorier der som **Top**, $\mathbb{F}$**Vect** og **Grp** kan siges at bestå af „mængder med en vis ekstra struktur“. Et delvist svar på dette er givet i den følgende definition.

Definition 2.4.8. En kategori $\mathcal{C}$ kaldes for en *konkret kategori* hvis der findes en (kovariant) troværdig funktor $\mathcal{C} \to$ **Sets**. konkret kategori

Kombinerer man denne definition med Lemma 2.4.6 ser man, at i en konkret kategori er enhver morfi som er en injektion på de underliggende mængder en monomorfi, og enhver morfi som er en surjektion på de underliggende mængder er en epimorfi. Som vi har set er det omvendte ikke tilfældet (i Eksempel 1.5.14 så vi en epimorfi som ikke er surjektiv).

inklusionsfunktor

fuld delkategori

Hvis $\mathcal{S}$ er en delkategori af $\mathcal{C}$ findes der en oplagt kovariant funktor $\mathcal{S} \to \mathcal{C}$, *inklusionsfunktoren*. Denne er altid troværdig (øvelse). En delkategori kaldes *fuld* hvis inklusionsfunktoren er en fuld funktor. En fuld delkategori er således helt bestemt ved sine objekter (fordi morfierne $A \to B$ i delkategorien er det samme som morfierne $A \to B$ i "den store" kategori). Fx udgør **Ab** en fuld delkategori af **Grp**, og $\mathbf{Sets}_f$ (kategorien af endelige mængder og afbildninger mellem disse) er en fuld delkategori af **Sets**. Derimod udgør $\mathbf{Open}^S$ ikke en fuld delkategori af $\mathbf{Open}^C$, da der findes kontinuerte afbildninger som ikke er glatte.

tæt funktor

tæt delkategori

En funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kaldes *tæt* hvis objektfunktionen er „essentielt surjektiv" i følgende forstand: Ethvert objekt D i $\mathcal{D}$ er isomorf til et objekt på formen $F(C)$, hvor $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Tilsvarende kaldes en delkategori *tæt* hvis inklusionsfunktoren er en tæt funktor.

2.5 Naturlige transformationer

Givet to topologiske rum X og Y kan man betragte dem som „ens" ved hjælp af to forskellige begreber. Man kan bruge homeomorfi (altså isomorfi i kategorien **Top**) som målestok, men ofte viser det sig nyttigt at betragte X og Y som ens hvis de blot er *homotopiækvivalente*. Homotopiækvivalens er et svagere begreb end homeomorfi (i betydningen at hvis to rum er homeomorfe er de også homotopiækvivalente, men det omvendte er ikke tilfældet).

Man får definitionen af homotopiækvivalens fra definitionen af homeomorfi ved så at sige kun at kræve eksistensen af en invers „op til homotopi", også kaldet en homotopiinvers. Der findes en analogi til dette inden for kategoriteori, så vi vil nu gå på jagt efter en definition af hvad man skal forstå ved at to funktorer er „homotope". Vi starter med det meget vigtige begreb naturlig transformation.

naturlig transformation

Definition 2.5.1. Lad F og G være to funktorer fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$. Ved en *naturlig transformation* τ fra F til G (notation $\tau\colon F \rightsquigarrow G$) forstås en „funktion", som til ethvert objekt A i $\mathcal{C}$ tilordner en morfi $\tau_A = \tau A\colon F(A) \to G(A)$, således at enhver morfi $f\colon A \to B$ i $\mathcal{C}$ giver anledning til et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau B"'] & G(B). \end{tikzcd} \tag{2.17}$$

Morfierne τA kaldes *komponenterne* af τ. Uformelt kan man tænke på τ som en tilordning $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ således at diagrammerne komponenter

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "F"'] & \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \arrow[d, "\mathrm{dom}"] \\ & \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "G"'] & \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \arrow[d, "\mathrm{kod}"] \\ & \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \end{tikzcd} \tag{2.18}$$

samt diagrammet (2.17) kommuterer for alle morfier $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$.

Hvis τ er en naturlig transformation, hvis komponenter alle er isomorfier i $\mathcal{D}$ kaldes τ for en *naturlig isomorfi*. To funktorer F og G kaldes naturligvis *naturligt isomorfe* hvis der findes en naturlig isomorfi $\tau\colon F \rightsquigarrow G$. I et sådant tilfælde vil vi skrive $\tau\colon F \cong G$ eller blot $F \cong G$. Det er naturlig isomorfi af funktorer som skal spille den kategoriteoretiske analog til homotopi af afbildninger. naturlig isomorfi naturligt isomorfe

Lemma 2.5.2. *Lad $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være funktorer. Hvis τ er en naturlig isomorfi fra F til G, udgør de inverse morfier $(\tau A)^{-1}$ komponenterne af en naturlig transformation fra G til F, som vi vil betegne τ^{-1}.*

Bevis. For et objekt A i $\mathcal{C}$ sætter vi $\tau^{-1}A = (\tau A)^{-1}$. Vi skal så kontrollere, at diagrammet

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "\tau^{-1}A"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ G(B) \arrow[r, "\tau^{-1}B"'] & F(B) \end{tikzcd} \tag{2.19}$$

kommuterer for alle objekter A, B i $\mathcal{C}$ og alle morfier $f\colon A \to B$. Da τ er en naturlig transformation fra F til G ved vi, at

$$G(f) \circ \tau A = \tau B \circ F(f) \tag{2.20}$$

og da τA og τB er isomorfier følger heraf at

$$(\tau B)^{-1} \circ G(f) = F(f) \circ \tau(A)^{-1} \tag{2.21}$$

men det betyder præcis at (2.19) kommuterer. $\square$

Det er umiddelbart klart, at τ^{-1} også bliver en naturlig isomorfi (fordi alle komponenterne $\tau^{-1}A = (\tau A)^{-1}$ er isomorfier med inverse τA).

Hvis $F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ er funktorer, og $\tau_1\colon F \rightsquigarrow G$, $\tau_2\colon G \rightsquigarrow H$ er naturlige transformationer, er det klart fra diagrammet

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_1 A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\tau_2 A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_1 B"'] & G(B) \arrow[r, "\tau_2 B"'] & H(B) \end{tikzcd} \tag{2.22}$$

at man ved fastsættelsen $\tau A = (\tau_2 A) \circ (\tau_1 A)$ får en naturlig transformation $\tau\colon F \rightsquigarrow H$. Hvis τ_1 og τ_2 er naturlige isomorfier er τ det også.

Altså er naturlig isomorfi en ækvivalensrelation mellem funktorer.

2.5.1 Eksempler

De første to eksempler er råt og brutalt hugget fra [ML98].

Eksempel 2.5.3. Der er en funktor $-_*$ fra $\mathbf{Fld}_p$ til $\mathbf{Grp}$, som til et legeme L knytter gruppen af enheder L_*, og som til en ringhomomorfi $f\colon L \to K$ knytter restriktionen $f_* = f_{|L_*}$ af f til L_*. Da f respekterer multiplikation vil f_* være en gruppehomomorfi fra L_* til K_*. De fleste steder betegnes gruppen af enheder med en øvre stjerne, men jeg benytter bevidst en nedre stjerne for at holde notationen konsistent (husk at $-_*$ er kovariant).

En anden funktor fra $\mathbf{Fld}_p$ til $\mathbf{Grp}$ er GL_n. Mere specifikt lader vi som sædvanlig $\mathrm{GL}_n(L)$ betegne gruppen af invertible $n \times n$-matricer med indgange fra L. Til en ringhomomorfi $f\colon L \to K$ knytter vi afbildningen $\mathrm{GL}_n f\colon \mathrm{GL}_n(L) \to \mathrm{GL}_n(K)$, som virker på en invertibel matrix A ved at $\mathrm{GL}_n f(A)$ er den matrix der fremkommer ved at anvende f på hver indgang. Det er ikke svært at indse, at $\mathrm{GL}_n f(A)$ er en invertibel matrix med indgange fra K, og at GL_n faktisk er en gruppehomomorfi.

Determinanten er nu en naturlig transformation fra GL_n til $-_*$. Til et legeme L knytter vi nemlig determinantafbildningen $\det_L\colon \mathrm{GL}_n L \to L_*$. Da determinanten er defineret ved den samme formel for alle legemer (og denne formel kun involverer addition og multiplikation), bliver diagrammet

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n L \arrow[r, "\det_L"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n f"'] & L_* \arrow[d, "f_*"] \\ \mathrm{GL}_n K \arrow[r, "\det_K"'] & K_* \end{tikzcd} \tag{2.23}$$

kommutativt for alle legemer L, K og alle ringhomomorfier $f\colon L \to K$.

Eksempel 2.5.4. I Eksempel 2.2.7 defineredes en kovariant funktor **Grp** $\to$ **Ab**. Ved at sammensætte denne med inklusionen af **Ab** i **Grp** får vi altså en funktor $\mathrm{Ab}'\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$. Projektion på faktorgruppen er nu en naturlig transformation fra identitetsfunktoren på **Grp** til Ab'. Til et objekt $G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Grp})$ knytter vi altså gruppehomomorfien $\pi_G\colon G \to G/[G,G]$. At π er naturlig følger faktisk af definitionen af Ab!

Eksempel 2.5.5. Eksempel 2.2.2 viste, at Dual er en kontravariant funktor fra $\mathbb{F}$**Vect** til sig selv. Ordet „dual" gør det naturligt (pun not intended) at formode, at det duale til det duale vektorrum til V er V selv. Dette er faktisk rigtigt hvis vi nøjes med at kigge på endelig-dimensionale vektorrum over $\mathbb{F}$, i den forstand at der findes en naturlig isomorfi fra identitetsfunktoren på $\mathbb{F}\mathbf{Vect}_f$ til funktoren $\mathrm{Dual} \circ \mathrm{Dual}$. Bemærk at $\mathrm{Dual} \circ \mathrm{Dual}$ jævnfør Øvelse 2.4.2 er kovariant.

Hold nu godt fast: Transformationen $\tau\colon \mathrm{Id} \rightsquigarrow \mathrm{Dual} \circ \mathrm{Dual}$ defineres ved, at τ_V er den afbildning fra V til $(V^*)^*$ som for $x \in V$ er evaluering i x; altså $\tau_V(x) = \mathrm{ev}_x$. Dette er faktisk en lineær afbildning fra V^* til grundlegemet $\mathbb{F}$, og dermed et element i $(V^*)^*$.

Nu skal vi kontrollere, at

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\tau_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & (V^*)^* \arrow[d, "(\varphi^*)^*"] \\
W \arrow[r, "\tau_W"'] & (W^*)^*
\end{tikzcd}
\tag{2.24}
$$

er kommutativ for alle $\mathbb{F}$-vektorrum V og W og alle $\mathbb{F}$-lineære afbildninger $\varphi\colon V \to W$. Altså skal vi vise, at for enhver vektor $x \in V$ er $(\tau_W \circ \varphi)(x)$ og $((\varphi^*)^* \circ \tau_V)(x)$ det samme element i $(W^*)^*$, altså den samme lineære afbildning fra W^* til $\mathbb{F}$. Det kan vi gøre ved at lade $g \in W^*$ være et vilkårligt element og evaluere de to afbildninger fra W^* til $\mathbb{F}$ i dette element. Holder man tungen lige i munden finder man på den ene side at

$$
\begin{aligned}
\big((\tau_W \circ \varphi)(x)\big)(g) &= \big(\tau_W(\varphi(x))\big)(g) \\
&= \mathrm{ev}_{\varphi(x)}(g) \\
&= g(\varphi(x)) \\
&= (g \circ \varphi)(x)
\end{aligned}
$$

og på den anden side at

$$\begin{aligned}\big(((\varphi^*)^* \circ \tau_V)(x)\big)(g) &= \big((\varphi^*)^*(\tau_V(x))\big)(g)\\ &= \big((\varphi^*)^*(\mathrm{ev}_x)\big)(g)\\ &= \big(\,\mathrm{ev}_x \circ \varphi^*\big)(g)\\ &= \mathrm{ev}_x(\varphi^*(g))\\ &= \mathrm{ev}_x(g \circ \varphi)\\ &= (g \circ \varphi)(x).\end{aligned}$$

Altså er (2.24) kommutativ. Dette viser at τ er en naturlig transformation.

Det er en naturlig isomorfi, fordi τ_V er en isomorfi for alle V: Lad $x \in \ker(\tau_V)$. Så har vi altså at ev_x er nulafbildningen fra V^* til $\mathbb{F}$, hvilket vil sige at $f(x) = 0$ for alle $f \in V^*$. Men det er ikke svært at indse (gør det), at dette medfører at $x = 0$. Da således $\ker(\tau_V) = \{0\}$ og de to vektorrum V og $(V^*)^*$ har samme (endelige) dimension, må τ_V være en isomorfi.

Bemærkning 2.5.6. Jeg påstod i Bemærkning 2.2.3 at V og V^* ganske vist er isomorfe som vektorrum, men at isomorfien ikke er naturlig. Nu har jeg ganske vist ikke defineret hvad man skulle forstå ved en naturlig isomorfi mellem en kovariant og en kontravariant funktor (som fx identitetsfunktoren og Dual), men det er ikke så svært at lave forskellige krumspring for at få en sådan definition op at stå. Hvad der derimod er svært er at vise, at der ikke findes nogen naturlig isomorfi mellem dem. Men en god tommelfingerregel er, at en hvilken som helst isomorfi som bygger på et valg af basis (eller en anden form for arbitrært valg) ikke er naturlig.

2.5.2 Ækvivalens af kategorier

Jeg har tidligere påstået, at der i passende forstand gælder, at $\mathbb{Z}$-**Mod** og **Ab** er de samme kategorier. Denne passende forstand er vi nu klar til at definere.

ækvivalens af kategorier

Definition 2.5.7. En funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kaldes en *ækvivalens af kategorier*, hvis der findes en funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ med den egenskab, at $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ og $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.

En ækvivalens af kategorier er med andre ord en funktor, som op til naturlig isomorfi har en invers funktor. To kategorier $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kaldes ækvivalente, hvis der findes en ækvivalens af kategorier $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Øvelse 2.5.8. Vis at ækvivalens af kategorier er en ækvivalensrelation.

Lemma 2.5.9. *Kategorierne* $\mathbb{Z}$-**Mod** *og* **Ab** *er ækvivalente.*

Beviset er egentlig ret enkelt, idet det er svært at gætte forkert på hvilke funktorer der skal spille rollen som F og G. Pr. definition er ethvert modul en abelsk gruppe (med noget ekstra struktur), så der findes en glemsom funktor $\mathbb{Z}$-**Mod** $\to$ **Ab**. For at gå den anden vej skal man observere, at der kun er én måde at gøre en abelsk gruppe $(A, +)$ til et $\mathbb{Z}$-modul: Ifølge et af aksiomerne skal vi have $1.a = a$ for alle $a \in A$, og ifølge et andet af aksiomerne medfører dette (efter en let induktion) at $n.a = \underbrace{a + \cdots + a}_{n}$ for alle positive n. Derefter er det klart, at for negative n er $n.a$ det inverse element til $(-n).a$ i A, og dette fastlægger fuldstændig afbildningen $\mathbb{Z} \times A \to A$. Tilbage er at kontrollere at den herved definerede multiplikation faktisk gør A til et $\mathbb{Z}$-modul, men det er ret enkelt. Hermed er objektfunktionen af funktoren **Ab** $\to$ $\mathbb{Z}$-**Mod** defineret. Man skal så kontrollere, at en gruppehomomorfi $f\colon A \to B$ faktisk også er en $\mathbb{Z}$-modulhomomorfi når A og B opfattes som $\mathbb{Z}$-moduler.

Når disse to funktorer er på plads er det ingen sag at tjekke, at der findes naturlige isomorfier til identitetsfunktorerne på de to kategorier.

På helt tilsvarende vis kan man kontrollere, at kategorien $\mathbb{F}$-**Mod** af moduler over et legeme $\mathbb{F}$ er ækvivalent til kategorien $\mathbb{F}$**Vect** af $\mathbb{F}$-vektorrum.

Ækvivalens af kategorier er langt mere nyttigt end isomorfi af kategorier. Fx benytter man ved klassifikationen af endeligt frembragte abelske grupper teorien for endeligt frembragte moduler (se [Jan04]).

Der er også mange eksempler på vigtige kategorier, som er ækvivalente med en „meget mindre" kategori, som derfor er nemmere at studere. Et eksempel på dette er følgende: Lad **Mat**$(\mathbb{R})$ betegne kategorien hvis objekter er de naturlige tal $0, 1, 2, \ldots$, og hvor morfierne $\mathrm{Mor}(n, m)$ er mængden af $m \times n$-matricer med reelle indgange (bemærk rækkefølgen af m og n). Vi vedtager, at der er præcis én $0 \times n$-matrix og præcis én $n \times 0$-matrix for ethvert naturligt tal n. Komposition af morfier $\mathrm{Mor}(m, p) \times \mathrm{Mor}(n, m) \to \mathrm{Mor}(n, p)$ er den sædvanlige matrixmultiplikation. Denne kategori er ækvivalent til $\mathbb{R}$**Vect**$_f$, kategorien af endeligdimensionale vektorrum over $\mathbb{R}$.

Det er let at konstruere en funktor **Mat**$(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$**Vect**$_f$: Til et objekt n knytter vi $\mathbb{R}$-vektorrummet $\mathbb{R}^n$, og til en morfi $A \in \mathrm{Mor}(n, m)$ knytter vi den tilsvarende lineære afbildning $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ repræsenteret ved A (som jo er en $m \times n$-matrix pr. definition).

Jeg vil ikke bevise at dette bliver en ækvivalens af kategorier direkte fra definitionen. I stedet præsenteres følgende sætning, som ofte er nyttig til at vise at noget er en ækvivalens af kategorier.

Sætning 2.5.10. *Lad $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være en funktor. Så gælder, at F er en ækvivalens af kategorier hvis og kun hvis F er fuld, troværdig og tæt.*

Det er oplagt, at funktoren $\mathbf{Mat}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\mathbf{Vect}_f$ defineret ovenfor opfylder de tre betingelser i Sætning 2.5.10.

Et bevis for sætningen overlades til den ivrige læser (eller næste udgave af noten...). I øvrigt kalder [Jan04] en funktor for en ækvivalens af kategorier hvis den er fuld, troværdig og tæt, og nævner så at man „normalt definerer ækvivalens af kategorier på en anden måde". Denne anden måde er Definition 2.5.7.

2.6 Et sidespring til algebraisk topologi

I [Hat02] defineres i forbindelse med beviset for udskæringssætningen (Sætning 2.20) to afbildninger kaldet S og T. Disse er faktisk naturlige transformationer, men før man kan give mening til en sådan påstand, skal vi en gang for alle have banket nogle algebraiske definitioner på plads.

kædekompleks

Definition 2.6.1 (Kædekompleks). Et *kædekompleks* C er en samling af abelske grupper C_n (en for hvert $n \in \mathbb{Z}$), og for hvert $n \in \mathbb{Z}$ en gruppehomomorfi $\partial_n\colon C_n \to C_{n-1}$. Yderligere kræves at $\partial_n \circ \partial_{n+1}\colon C_{n+1} \to C_{n-1}$ er nulafbildningen for alle n. Et kædekompleks kan vi altså tænke på som en uendelig følge af abelske grupper og afbildninger:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{2.25}$$

Ofte er man doven og kalder alle afbildningerne ∂_n for ∂, og lader det fremgå af konteksten hvilken gruppe det pågældende ∂ er defineret på. Den sidste betingelse skriver man således ofte blot som $\partial \circ \partial = 0$. I øvrigt kaldes ∂ for *randafbildningerne*.

randafbildning

kædeafbildning

Definition 2.6.2 (Kædeafbildning). Lad C og D være to kædekomplekser. Ved en *kædeafbildning* f fra C til D forstås en samling af afbildninger f_n, således at diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial"'] & D_n \arrow[r, "\partial"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{2.26}$$

er kommutativt.

Som tidligere bemærket er et sådant diagram kommutativt hvis og kun hvis hvert kvadrat det er opbygget af er kommutativt. Således er $f\colon C \to D$ en kædeafbildning hvis $\partial_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, eller hvis man er doven og dropper indices (som det allerede er gjort delvis i (2.26))

$$\partial \circ f = f \circ \partial. \tag{2.27}$$

Egentlig er det jo snyd at bruge det samme symbol ∂ som betegnelse for en hulens masse forskellige afbildninger (i (2.26) ovenfor bruges det oven i købet i to forskellige kædekomplekser om de respektive randafbildninger), men det er nu engang fast praksis. Den slags bør man vende sig til. Man kan også overveje alternativet: Hvis hvert eneste ∂ skulle være indiceret med en præcis angivelse af domæne og kodomæne, ville alle formler, udregninger og diagrammer hurtigt blive ganske uoverskuelige.

Hvis C er et kædekompleks lader vi Z_n betegne kernen af afbildningen $\partial\colon C_n \to C_{n-1}$, og elementer i Z_n kaldes *cykler* (Z'et kommer fra tysk, Zyklus). Tilsvarende lader vi B_n betegne billedet af afbildningen $\partial\colon C_{n+1} \to C_n$ og elementer i B_n, som altså er billeder af randafbildningen, kaldes *rande* (B for det engelske „boundary“). Betingelsen $\partial \circ \partial = 0$ betyder at

cykel

rand

$$B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n \tag{2.28}$$

for alle n. Hvis der er flere kædekomplekser C, D i spil, vil vi skrive $B_n(C)$, $Z_n(C)$ for undergrupperne af C_n og $B_n(D)$, $Z_n(D)$ for undergrupperne af D_n. Fra ligning (2.27) følger det, at en kædeafbildning sender rande i rande og cykler i cykler.

Øvelse 2.6.3. Vis denne påstand. Vis med andre ord, at hvis $f\colon C \to D$ er en kædeafbildning, og $\alpha \in Z_n(C)$, så vil $f(\alpha) \in Z_n(D)$, og hvis $\beta \in B_n(C)$ vil $f(\beta) \in B_n(D)$.

En følge af abelske grupper og gruppehomomorfier $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3$ kaldes *eksakt* ved A_2 hvis $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$. En følge af formen

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{2.29}$$

kaldes for en *kort eksakt følge* hvis den er eksakt ved A, B og C. Dette er det samme som at kræve at f er injektiv, g er surjektiv, og $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

kort eksakt følge

Hvis A, B, C er kædekomplekser og $i\colon A \to B$, $j\colon B \to C$ er kædeafbildninger kaldes diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2.30}$$

for en *kort eksakt følge af kædekomplekser* hvis søjlerne i diagrammet er korte eksakte følger (for alle n).

Som den skarpe læser måske allerede har indset, udgør kædekomplekser og kædeafbildninger en kategori. Mere specifikt lader vi **CC** betegne kategorien hvis objekter er kædekomplekser og hvis morfier er kædeafbildninger. Detaljerne i dette overlades til læseren (såsom at finde identitetsmorfien Id_C fra et kædekompleks til sig selv, og overbevise sig om at sammensætning af kædeafbildninger giver en kædeafbildning).

homologi

Homologi er i virkeligheden en samling af funktorer defineret på **CC**. For hvert n i $\mathbb{Z}$ findes der nemlig en kovariant funktor $H_n\colon \mathbf{CC} \to \mathbf{Ab}$. For et kædekompleks C defineres $H_n(C)$, kaldet den n'te homologi-gruppe af C, til at være kvotientgruppen $Z_n(C)/B_n(C)$. Denne kvotientgruppe findes på grund af (2.28) og fordi C_n er abelsk er alle undergrupper normale, så kvotienten bliver igen en abelsk gruppe. Elementer i $H_n(C)$ kaldes homologiklasser, og en homologiklasse $[\alpha]$ er altså en sideklasse til $B_n(C)$ repræsenteret ved en cykel $\alpha \in Z_n(C)$.

Til en kædeafbildning $f\colon C \to D$ skal vi knytte en gruppehomomorfi $H_n(f) = f_*\colon H_n(C) \to H_n(D)$. Denne defineres ved at for en homologiklasse $[\alpha] \in H_n(C)$ sætter vi $f_*([\alpha]) = [f(\alpha)]$, altså homologiklassen i $H_n(D)$ repræsenteret ved $f(\alpha)$. Man skal naturligvis tjekke at dette er veldefineret:

For det første er α en cykel (altså et element i $Z_n(C)$), og $f(\alpha)$ er derfor også en cykel jf. Øvelse 2.6.3, så $f(\alpha)$ repræsenterer i hvert fald et element i $H_n(D)$. Hvis $[\alpha] = [\beta]$ betyder det at $\alpha - \beta$ er et element i $B_n(C)$, men så følger af samme øvelse at $f(\alpha - \beta) = f(\alpha) - f(\beta)$ er et element i $B_n(D)$, hvilket igen betyder at $f(\alpha)$ og $f(\beta)$ repræsenterer det samme element i kvotienten $H_n(D) = Z_n(D)/B_n(D)$. Men det betyder netop at f_* er veldefineret.

Man kan bemærke, at den n'te homologigruppe $H_n(C)$ af et kædekompleks C er triviel præcis hvis $Z_n(C) = B_n(C)$, altså hvis

$$\ker(\partial\colon C_n \to C_{n-1}) = \operatorname{Im}(\partial\colon C_{n+1} \to C_n). \tag{2.31}$$

Lidt løst sagt er den n'te homologigruppe derfor et mål for hvor langt kædekomplekset

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{2.32}$$

er fra at være eksakt ved C_n.

Det er naturligvis udmærket at have en hel hærskare af funktorer fra **CC** til **Ab**, men algebraen bliver først rigtig sjov når man indser, at en kort eksakt følge af kædekomplekser giver en lang eksakt følge i homologi. Bag dette slogan gemmer sig det faktum, at hvis $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ er en kort eksakt følge af kædekomplekser, så findes der en lang eksakt følge af homologigrupper

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

hvor afbildningen ∂ er defineret på en snedig måde (som jeg ikke vil komme ind på her; det er en ganske udmærket øvelse i diagramjagt som jeg kun kan opfordre læseren til at udføre). Også i denne situation tillader man sig at benytte det samme symbol om to forskellige afbildninger; det første i_* betyder den af kædeafbildningen i inducerede homomorfi mellem de n'te homologigrupper, altså den afbildning som egentlig hedder $H_n(i)$, mens det andet i_* betyder $H_{n-1}(i)$.

Homologi af topologiske rum er i virkeligheden en sammensætning af to funktorer, nemlig en funktor $C\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{CC}$ og $H_n\colon \mathbf{CC} \to \mathbf{Ab}$: Først knytter man til ethvert topologisk rum X et kædekompleks $C(X)$, og for hver kontinuert afbildning $f\colon X \to Y$ en kædeafbildning $C(f) = f_\#\colon C(X) \to C(Y)$. Da vi ikke er nået til vejs ende endnu bruger vi en firkant $\#$ til at angive den af f inducerede kædeafbildning. Når man så tager homologien $H_n(C(X))$ af kædekomplekset $C(X)$ får man hvad der kaldes den n'te homologigruppe af X. Ofte skriver man blot H_n om den sammensatte funktor $H_n \circ C\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ idet mellemtrinnet med konstruktionen af kædekomplekset er underforstået.

Appendix A

Ordbog

Dansk	**Engelsk**
auto(morfi)	auto(morphism)
epi(morfi)	epi(morphism)
endo(morfi)	endo(morphism)
frastødende	initial *eller* repelling
fuld	full
funktor	functor
identitet	identity
iso(morfi)	iso(morphism)
kategori	category
komposition	composition
konkret kategori	concrete category
konservativ	conservative
kontravariant	contravariant
kovariant	covariant
mono(morfi)	mono(morphism)
morfi	morphism
naturlig transformation	natural transformation
naturlig isomorfi	natural isomorphism
nulobjekt	zero object
objekt	object
pil	arrow
sammensætning	composition
tiltrækkende	terminal *eller* attracting
troværdig	faithful
tæt	dense
ækvivalens	equivalence

Appendix B

Standardkategorier

Sets Mængder; afbildninger mellem mængder. Den tomme mængde er frastødende, alle singletonmængder er tiltrækkende.

Sets$_f$ Endelige mængder; afbildninger mellem disse. Den tomme mængde er frastødende, alle singletonmængder er tiltrækkende.

Sets$_*$ Mængder med specificeret basispunkt; basispunktbevarende afbildninger. Alle singletonmængder er universelle.

Grp Grupper; gruppehomomorfier. Den trivielle gruppe er universel.

Ab Abelske grupper; gruppehomomorfier. Den trivielle gruppe er universel. Ækvivalent med $\mathbb{Z}$-**Mod**.

Rng Ringe (med 1); ringhomomorfier. De hele tal $\mathbb{Z}$ er frastødende; nulringen er tiltrækkende.

CRng Kommutative ringe (med 1); ringhomomorfier. De hele tal $\mathbb{Z}$ er frastødende; nulringen er tiltrækkende.

Fld$_p$ Legemer i karakteristik p; ringhomomorfier. For p primtal er legemet $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ (det endelige legeme med p elementer) frastødende. For $p = 0$ er $\mathbb{Q}$ frastødende.

Top Topologiske rum; kontinuerte afbildninger. Det tomme rum er frastødende, ethvert etpunktsrum er tiltrækkende.

Top$_*$ Topologiske rum med basispunkt; basispunktbevarende kontinuerte afbildninger. Alle etpunktsrum er universelle.

Toph Topologiske rum; homotopiklasser af kontinuerte afbildninger.

Toph$_*$ Topologiske rum med basispunkt; homotopiklasser af basispunkt-bevarende kontinuerte afbildninger.

Haus Hausdorff topologiske rum; kontinuerte afbildninger.

CW CW-komplekser; kontinuerte afbildning.

$\mathbb{F}$**Vect** Vektorrum over legemet $\mathbb{F}$; $\mathbb{F}$-lineære afbildninger. Nulvektorrummet er universelt.

R**-Mod** Venstremoduler over R; R-lineære afbildninger (= R-modulhomomorfier). Nulmodulet er universelt. For R et legeme er denne kategori ækvivalent til R**Vect**.

CC Kædekomplekser; kædeafbildninger. Nulkomplekset er universelt.

Mat($\mathbb{F}$) Objekterne er de naturlige tal $0, 1, 2, \ldots$; morfierne er $m \times n$-matricer med indgange fra $\mathbb{F}$. 0 er universelt.

Appendix C

Gængse funktorer

π_1 Fundamentalgruppen, kovariant. Topologiske rum med basispunkt til grupper.

H_n Den n'te homologigruppe, kovariant. Kædekomplekser til abelske grupper.

$[\,-\,]$ Homotopiklasse af kontinuert afbildning, kovariant. Topologiske rum (kontinuerte afbildninger) til topologiske rum (homotopiklasser af kontinuerte afbildninger).

Dual Dualt vektorrum, kontravariant. Vektorrum over $\mathbb{F}$ til sig selv.

Ab Abelinisering, kovariant. Grupper til abelske grupper.

$\mathcal{P}$ Potensmængde, ko- eller kontravariant alt efter temperament. Mængder til sig selv.

Litteratur

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. ISBN 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.

[Jan04] Jens Carsten Jantzen. *Algebra 2.* Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 2004.

[Lau03] Niels Lauritzen. *Concrete abstract algebra.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003. From numbers to Gröbner bases. ISBN 0-521-53410-0.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, bind 5 af *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, anden udgave, 1998. ISBN 0-387-98403-8.

Indeks