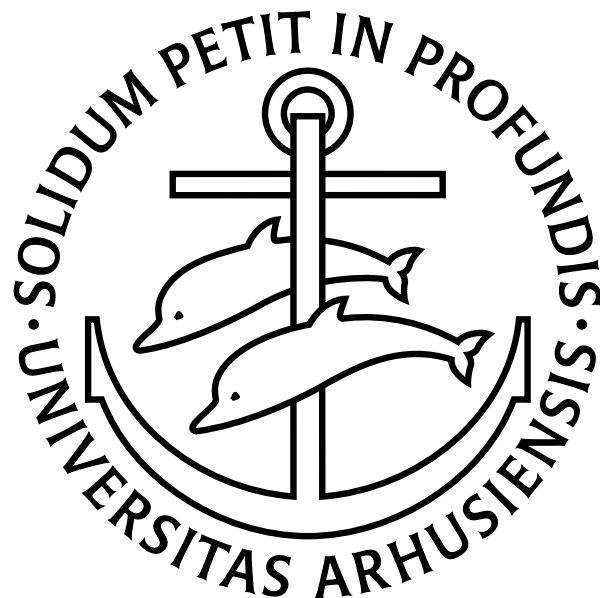


FROBENIUS' SÆTNING
OG
LIE-GRUPPER

THE FROBENIUS THEOREM AND LIE GROUPS



BACHELORPROJEKT I MATEMATIK
RASMUS VILLEMOES — 20013320

VEJLEDER: JØRGEN TORNEHAVE
8. OKTOBER 2004

INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG
AARHUS UNIVERSITET

Kolofon

Frobenius' sætning og Lie-grupper – et bachelorprojekt.

Skrevet af Rasmus Villemoes under vejledning af Jørgen Tornehave, Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet, Danmark.

Dette dokument er skrevet i L^AT_EX 2_ε ved hjælp af dokumentklassen memoir. Figurer er lavet ved hjælp af METAPOST, og diagrammer er lavet ved hjælp af pakken xy. Blandt andre benyttede makropakker er AMS-pakkerne amsmath, amssymb, amsfonts, og amsthm; de uundværlige pakker inputenc, fontenc, babel og graphicx. Brødteksten er sat med Computer Modern Roman 12 punkt. Andre fonte og symboler kommer fra pakkerne bbm, euscript, stmaryrd, soul og url. Endelig er en til danske forhold modificeret version af fancyref-pakken benyttet.

Kildefiler og kompilerede PostScript- og pdf-udgaver af projektet er at finde på <http://home.imf.au.dk/burner/>. Enhver skal føle sig velkommen til at benytte disse filer; for eksempel som skabelon til eget bachelorprojekt eller lignende. Det er tilstræbt at kommentere kildekoden, men skulle der alligvel være spørgsmål kan forfatteren kontaktes via email på adressen burner@imf.au.dk.

Indhold

Forord	iii
Notation og terminologi	v
1 Flow af vektorfelter	1
1.1 Differentialligninger	1
1.2 Integralkurver	2
1.3 Flow	6
1.3.1 Kommutativitet	8
1.3.2 Relaterede vektorfelter	8
1.3.3 Lie-derivation	9
2 Frobenius' sætning	13
2.1 Motivation	13
2.2 Definitioner	14
2.3 Forberedelser	16
2.4 Folieringer	19
3 Lie-grupper	23
3.1 Definitioner og egenskaber	23
3.1.1 Venstreinvariante vektorfelter	24
3.1.2 Lie-algebraen hørende til en Lie-gruppe	25
3.1.3 \mathcal{L} er en funktor	27
3.2 Første anvendelse	28
3.3 Anden anvendelse	31
3.3.1 Diverse fakta	31
3.3.2 Formulering	32
3.3.3 Bevis for Sætning 3.10	33
Litteratur	43

Forord

I et studie af differentialgeometri støder man før eller siden på begrebet Lie-grupper. En Lie-gruppe kombinerer på smukkeste vis det bedste fra algebra og geometri, nemlig den pæne opførsel af grupper og de behageligheder som glathed af afbildninger medfører. Til en Lie-gruppe kan man knytte et algebraisk objekt kaldet en Lie-algebra; denne indeholder tilstrækkelig meget information til at man i hvert fald delvist kan rekonstruere sin Lie-gruppe fra den. Konstruktionen af Lie-algebraen fra Lie-gruppen opfører sig desuden pænt (funktorielt).

Det er derfor naturligt at spørge, om der også er en sammenhæng mellem delstrukturerne af de to objekter, altså henholdsvis Lie-undergrupper og Lie-delalgebraer. Svaret viser sig at være et klart “ja”, og sammenhængen er sågar (i en passende forstand) næsten en bijektion. Det er blandt andet i eftersøgningen af denne sammenhæng, at Frobenius’ sætning viser sit værd.

Dette leder mig frem til en beskrivelse af strukturen af dette projekt. Det første afsnit er en kort gennemgang af nogle konventioner og begreber som vil blive benyttet. I Kapitel 1 begynder det egentlige projekt. Her bevises en række af de lemmaer og propositioner, som er nødvendige for at give et komplet bevis for Frobenius’ sætning. Visse dele er af forholdsvis teknisk karakter, og man kan formentlig uden store tab springe over de mest uindbydende udregninger.

I Kapitel 2 skal disse mange teknikaliteter bringes i anvendelse. Man kommer dog ikke udenom at skulle indføre endnu en hoben termer, men når dette er gjort, er vejen lagt til at bevise projektets første hovedresultat, Frobenius’ sætning. Kapitlet slutter med en diskussion af to eksempler på såkaldte folieringer af torussen.

I det tredje og sidste kapitel defineres det endeligt hvad en Lie-gruppe er, og forskellige basale egenskaber ved disse præsenteres. Derefter er det tid til at bringe Frobenius’ sætning i anvendelse. Den første anvendelse må nok siges at være standardeksemplet på en anvendelse af Frobenius’ sætning. Det er her, der findes en bijektiv korrespondance mellem Lie-delalgebraer på den ene side og *sammenhængende* Lie-undergrupper på den anden. Her-

efter diskuteres forskellige umiddelbare konsekvenser af dette; i særdeleshed varmes der op til den anden anvendelse.

Denne er af en lidt anden karakter end den første. Ideen med anvendelsen er at vise, at “tilstrækkeligt små” undergrupper af diffeomorfigruppen af en mangfoldighed kan gives en struktur som en Lie-gruppe. Oven i købet er denne Lie-gruppestruktur af en sådan natur, at virkningen af gruppen på mangfoldigheden bliver glat, og pointen er at dette indirekte giver en metode til at studere mangfoldigheden. Så langt når vi dog ikke.

Jeg vil gerne benytte lejligheden til at takke Christian Zickert og Søren Galatius for at gennemlæse store dele af det færdige projekt og efterfølgende kommentarer samt for mange udbytterige samtaler over en pizza.

Endelig skal der lyde en stor tak til min vejleder, Jørgen Tornehave, for tålmodig venten på færdiggørelsen af projektet, for at svare på mine til tider naive spørgsmål og ikke mindst for at foreslå et emne der har bragt mig vidt omkring i litteraturen og givet mig indsigter jeg formentlig ikke ville have opnået ellers.

Århus, oktober 2004

Rasmus Villemoes

The last thing one knows when writing a book is what to put first.
— Blaise Pascal (1623–1662)

Notation og terminologi

I dette korte afsnit vil jeg gøre rede for noget af den notation og de konventioner, som vil blive brugt igennem hele projektet. For det første vil der med ordene “mangfoldighed”, “vektorfelt”, “funktion” etc. altid menes glatte sådanne, med mindre andet fremgår af sammenhængen. Hvis X er et vektorfelt på en mangfoldighed M , vil både X_p og $X(p)$ blive brugt om værdien af vektorfeltet i punktet p ; sidstnævnte især i situationer hvor X i forvejen har et index.

En mangfoldighed kræves både at være Hausdorff og andentællelig som topologisk rum.

TM vil som sædvanligt blive brugt om tangentbundtet til mangfoldigheden M (den disjunkte forening af tangentrummene T_pM), og funktoregenskaber ved T vil uden yderligere kommentar blive benyttet. Her opfattes T som en kovariant funktor fra kategorien af (glatte) mangfoldigheder og (glatte) afbildninger til kategorien af (glatte) vektorbundter og vektorbundtshomomorfier (fiberrespekterende, fibervist lineære glatte afbildninger). Differentialet af en glat funktion $f: M \rightarrow N$ i punktet $p \in M$ betegnes $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.

Inspireret af [Lee] benyttes $\mathcal{T}M$ om vektorrummet af glatte snit af TM , altså vektorrummet af glatte vektorfelter på M . Dette er i modsætning til den øvrige (fortrinsvis ældre) litteraturs brug af $\mathfrak{X}M$ eller $\mathcal{X}M$ om det samme.

$C^\infty(M)$ bruges om ringen (og vektorrummet) af glatte afbildninger $M \rightarrow \mathbb{R}$. Det sædvanlige samspil mellem $C^\infty(M)$ og $\mathcal{T}M$ underforstås: $\mathcal{T}M$ er et modul over ringen $C^\infty(M)$ og samtidig Lie-algebraen af derivationer af $C^\infty(M)$.

Jeg bruger bevidst ordene Lie-undergruppe og Lie-delalgebra, selvom disse retteligt burde kaldes under-Lie-grupper* og del-Lie-algebraer.

Ordet delmangfoldighed tolkes i den strengeste betydning af ordet: $N \subset M$ siges altså at være en delmangfoldighed hvis N i sig selv er en glat mangfoldighed og inklusionsafbildningen $i: N \rightarrow M$ er glat og en homeomorfi på

*Hvis dette ord udtales tilstrækkelig sjusket høres det som “underlige grupper”!

$i(N)$ med sportopologien. Hvis der er brug for at fremhæve, at N er en delmangfoldighed i denne betydning bruges ordet *indlejret delmangfoldighed*. En immerseret delmangfoldighed er et svagere begreb. Her kræves kun at inklusionsafbildningen er glat som afbildning mellem mangfoldighederne N og M , og at $T_p i: T_p N \rightarrow T_p M$ er injektiv for alle $p \in N$. Ved en immerseret delmangfoldighed $N \subset M$ er der altså to topologier der er relevante. Disse vil blive omtalt som henholdsvis mangfoldighedstopologien og sportopologien (da i er kontinuert er førstnævnte altid finere end sidstnævnte).

En immersion er blot en glat afbildning $N \rightarrow M$ fra en mangfoldighed til en anden hvis differential i ethvert punkt er injektiv. Billedet af N under immersionen er ikke nødvendigvis en immerseret delmangfoldighed i M ; men omvendt gælder at inklusionsafbildningen af en immerseret delmangfoldighed faktisk er en immersion.

Ordet enkeltsammenhængende bruges om et topologisk rum som er kurvesammenhængende og som har triviel fundamentalgruppe.

Such is the advantage of a well constructed language that its simplified notation often becomes the source of profound theories.

— Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

KAPITEL 1

Flow af vektorfelter

I dette kapitel vil jeg redegøre for nogle af de resultater, der vil blive benyttet i Kapitel 2. Visse beviser er forholdsvis tekniske, og det kan derfor måske være en fordel ved første gennemlæsning at springe over disse.

1.1 Differentialligninger

Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ være en åben delmængde, og lad der være givet n glatte funktioner $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$. Vi kan så betragte systemet af differentialligninger

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))\end{aligned}\tag{1.1}$$

eller lidt mere kompakt

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)).\tag{1.2}$$

Et naturligt spørgsmål at stille er, hvornår systemet (1.1) har en løsning. En konsekvens af Hovedsætning 3.1 i [Mad] er følgende.

Sætning 1.1. *Lad $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en glat afbildning fra en åben delmængde U af \mathbb{R}^n . Så gælder:*

- (1) *Givet et punkt $p \in U$ findes der et $\varepsilon > 0$ og en glat funktion*

$$x: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$$

som opfylder (1.2) samt begyndelsesbetingelsen $x(0) = p$.

- (2) *Hvis x og y er to løsninger til (1.2) defineret på intervallerne I og J , og $x(t_0) = y(t_0)$ for et $t_0 \in I \cap J$, så er $x(t) = y(t)$ for alle $t \in I \cap J$.*

Fra Sætning 1.1 ser man nu, at givet et punkt $p \in U$ findes der et maksimalt åbent interval I og en funktion $x: I \rightarrow U$ der opfylder (1.2) samt begyndelsesbetingelsen $x(0) = p$. Intervallet I er maksimal i den forstand, at hvis $y: J \rightarrow U$ er en løsning med $y(0) = p$, så vil $J \subset I$ og $y(t) = x(t)$ for $t \in J$. Som I kan vi nemlig blot vælge foreningsmængden af alle de intervaller J_α for hvilke der findes en løsning $y_\alpha: J_\alpha \rightarrow U$ med $y_\alpha(0) = p$. Afbildningen $x: I \rightarrow U$ defineres så ved

$$x(t) = y_\alpha(t) \text{ hvor } t \in J_\alpha. \quad (1.3)$$

Dette er veldefineret, thi hvis $t \in J_\alpha \cap J_\beta$ har vi at $y_\alpha(t) = y_\beta(t)$, da jo $0 \in J_\alpha \cap J_\beta$ og $y_\alpha(0) = y_\beta(0) = p$.

1.2 Integralkurver

Jeg vil nu vise, hvordan det ovenstående kan benyttes til at finde såkaldte integralkurver af vektorfelter. Lad derfor M være en mangfoldighed af dimension n , $X \in \mathcal{T}M$ et vektorfelt på M , og $p \in M$ et punkt på M . Vi ønsker at finde en kurve $\gamma: I \rightarrow M$ defineret på et passende interval I indeholdende 0, og som opfylder de to betingelser

$$\gamma(0) = p \quad (1.4)$$

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}. \quad (1.5)$$

Desuden kunne vi godt tænke os en slags entydighed; ikke blot af γ , men også en måde at vælge intervallet I .

Lad $(U; x)$ være en koordinatomegn af p . På U kan vi altså skrive X som

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.6)$$

hvor a_i er glatte funktioner på U . Hvis $\gamma(t)$ i disse lokale koordinater skrives $(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ har vi at

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.7)$$

Hvis vi sammenligner (1.6) og (1.7) ser man, at hvis betingelse (1.5) skal være opfyldt, skal γ^i opfylde ligningen

$$\frac{d\gamma^i}{dt}(t) = a_i(\gamma(t)) \quad (1.8)$$

for $i = 1, \dots, n$. Betingelse (1.4) er i lokale koordinater det samme som at kræve $\gamma^i(0) = x^i(p)$ for $i = 1, \dots, n$. Fra Sætning 1.1 ser vi nu, at der findes en kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, der tilfredsstiller de to betingelser, nemlig den hvis koordinatfunktioner γ^i opfylder ligningssystemet (1.8) og den givne begyndelsesbetingelse.

Antag nu, at vi har to kurver γ_1, γ_2 defineret på et åbent interval omfattende $[0, b]$, der for $t \in [0, b]$ opfylder (1.4) og (1.5). Lad

$$A = \{u \in [0, b] \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \text{ for alle } t \leq u\}$$

og sæt $s = \sup A$. Da M er Hausdorff er diagonalen

$$\Delta M = \{(p, p) \mid p \in M\} \subseteq M \times M$$

lukket. Urbilledet B af denne under den kontinuerte afbildning

$$[0, s] \ni t \longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

er derfor lukket og omfatter A . Da s tilhører afslutningen af A som igen er indeholdt i B , må vi have at $s \in B$, men det medfører at $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ og $A = [0, s]$.

Antag nu, at $s < b$. Vælg en koordinatomegn $(V; y)$ om $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ og et $0 < \delta < b - s$ således at $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in V$ for $|t - s| < \delta$. I lokale koordinater kan vi altså skrive

$$\gamma_i(t) = (\gamma_i^1(t), \dots, \gamma_i^n(t))$$

for $i = 1, 2$.

Skriver vi

$$X_q = \sum_{\nu=1}^n f_\nu(q) \frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

for $q \in V$ ser vi, at $(\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^n)$, $i = 1, 2$ er to løsninger til differentialsystemet

$$\frac{dx_\nu}{dt}(t) = f_\nu(x(t)) \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Da γ_1 og γ_2 stemmer overens for $t = s$, følger af Sætning 1.1(2) at de stemmer overens for alle $t \in (s - \delta, s + \delta)$ (ligning (1.9) kan ikke give os information om γ_1 og γ_2 uden for V). Men heraf følger specielt at $s + \frac{\delta}{2} \in A$ i modstrid med definitionen af s . Altså må vi have $s = b$.

På helt tilsvarende vis kan man indse, at hvis to løsninger til (1.4) og (1.5) er defineret på åbne omegne af $[a, 0]$ vil de stemme overens på i hvert fald hele dette interval.

Betragt nu alle par $(I_\alpha, \gamma_\alpha)$ af åbne intervaller I_α omkring 0 hvorpå der findes en løsning $\gamma_\alpha: I_\alpha \rightarrow M$ til (1.4) og (1.5). Hvis $t \in I_\alpha \cap I_\beta$ følger af det foregående at

$$\gamma_\alpha(t) = \gamma_\beta(t) \quad (1.10)$$

thi γ_α og γ_β jo begge er defineret på intervallet $[0, t]$ (eller $[t, 0]$, i fald $t < 0$). Lad nu

$$I = \bigcup_{\alpha} I_\alpha$$

og definér $\gamma: I \rightarrow M$ ved

$$\gamma(t) = \gamma_\alpha(t) \quad \text{for } t \in I_\alpha.$$

Dette γ er naturligvis veldefineret på grund af (1.10), og I er det „passende“ interval der blev eftersøgt i begyndelsen af afsnittet.

Vi sammenfatter den foregående diskussion i en proposition.

Proposition 1.2. *Givet en mangfoldighed M , et glat vektorfelt $X \in \mathcal{T}M$ og et punkt $p \in M$ findes der et maksimalt interval I_p og en entydigt bestemt kurve $\gamma_p: I_p \rightarrow M$ således at*

$$\begin{aligned} \gamma_p(0) &= p \\ \gamma_p'(t) &= X_{\gamma_p(t)} \end{aligned}$$

for $t \in I_p$.

Enhver løsning til (1.4) og (1.5) kaldes en integralkurve af X gennem p . Den bestemte form, „integralkurven af X gennem p “, refererer til den maksimale integralkurve defineret ovenfor.

En nyttig observation er følgende:

Lemma 1.3. *Lad X være et vektorfelt på mangfoldigheden M , $p \in M$, og lad γ_p betegne integralkurven gennem p . Lad $I_p = (a_p, b_p)$ betegne domænet for γ_p (vi tillader $a_p, b_p = \pm\infty$). Hvis $q = \gamma_p(t_0)$ og γ_q er integralkurven af X gennem q , er γ_q en reparametrisering af γ_p i den forstand at*

$$\begin{aligned} I_q &= (a_p - t_0, b_p - t_0) \\ \gamma_q(t) &= \gamma_p(t + t_0) \quad \text{for } t \in I_q. \end{aligned}$$

Bevis. Lad $\alpha: (a_p - t_0, b_p - t_0) \rightarrow M$ være kurven defineret ved $\alpha(t) = \gamma_p(t + t_0)$. Så har vi at

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{d}{dt} \gamma_p(t + t_0) \\ &= X_{\gamma_p(t+t_0)} \\ &= X_{\alpha(t)}. \end{aligned}$$

Da $\alpha(0) = \gamma_p(t_0) = q$ er α altså en integralkurve af X gennem q . Heraf følger, at $\alpha(t) = \gamma_q(t)$ for i hvert fald alle $t \in (a_p - t_0, b_p - t_0)$, da jo γ_q er defineret på det størst mulige interval. Tilbage er at vise, at γ_q ikke er defineret på et interval større end $(a_p - t_0, b_p - t_0)$. Dette følger af, at γ_p ikke kan defineres på et interval større end (a_p, b_p) . \square

Hvis X er et vektorfelt på M og f er en glat funktion på M er der to integralkurver gennem $p \in M$ at betragte: Den hørende til X og den hørende til fX . Antag i det følgende at f intetsteds er 0. Lad $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ betegne integralkurven af X gennem p . Ved fastsættelsen

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{f(\gamma(s))} ds \tag{1.11}$$

defineres en differentiabel afbildning $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, og $F'(t) = \frac{1}{f(\gamma(t))}$. Da såvel f som γ er kontinuerte har dette konstant fortegn, og derfor er F monoton. Altså findes en diffeomorfi $G = F^{-1}: \text{Im } F \rightarrow (a, b)$. Denne er ligeledes differentiabel, og en udregning giver at

$$\begin{aligned} G'(t) &= G'(F(G(t))) \\ &= \frac{1}{F'(G(t))} \\ &= f(\gamma(G(t))). \end{aligned}$$

Uden store armbevægelser indser man at $\text{Im } F$ er et åbent interval omkring 0. Definerer vi kurven $\alpha: \text{Im } F \rightarrow M$ ved $\alpha = \gamma \circ G$ har vi klart at $\alpha(0) =$

$\gamma(G(0)) = \gamma(0) = p$ samt at

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= G'(t)\gamma'(G(t)) \\ &= f(\alpha(t))X(\gamma(G(t))) \\ &= f(\alpha(t))X(\alpha(t)) \\ &= (fX)(\alpha(t))\end{aligned}$$

Altså er α en integralkurve af fX gennem p . Vi har desuden at $\text{Im } \gamma = \text{Im } \alpha$.

Lad $\mu: (c, d) \rightarrow M$ betegne *integralkurven* af fX gennem p . Da α er en integralkurve har vi $\text{Im } \alpha \subseteq \text{Im } \mu$. Men gentager vi nu den ovenstående konstruktion hvor vi erstatter γ med μ , X med fX og f med $\frac{1}{f}$ får vi en kurve β , som er en integralkurve af vektorfeltet $\frac{1}{f}(fX) = X$ gennem p . Som før må vi have at $\text{Im } \mu = \text{Im } \beta$, men vi må også have at $\text{Im } \beta \subseteq \text{Im } \gamma$, da γ er integralkurven af X gennem p . Ergo er $\text{Im } \mu = \text{Im } \gamma$.

Konklusionen på alt dette er, at billedet af en integralkurve kun afhænger af vektorfeltet op til skalering.

1.3 Flow

Det viser sig nyttigt at studere mere end blot de enkelte integralkurver γ_p af et vektorfelt X . Det er også interessant at undersøge, hvorledes γ_p og γ_q hænger sammen når p og q er „tæt“ på hinanden. Hvis X er et vektorfelt på en mangfoldighed M defineres

$$W_X = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subseteq \mathbb{R} \times M \quad (1.12)$$

hvor I_p er det i Proposition 1.2 definerede åbne interval.

Det er umiddelbart klart, at $\{0\} \times M \subseteq W_X$. Et vigtigt faktum, som ikke vil blive bevist her er, at W_X faktisk er åben i $\mathbb{R} \times M$.

Afbildningen $\text{Fl}^X: W_X \rightarrow M$ defineres ved

$$\text{Fl}^X(t, p) = \gamma_p(t) \quad (1.13)$$

og kaldes flowet af vektorfeltet X . Det er klart fra definitionen at Fl^X er glat som funktion af t , men faktisk er Fl^X glat simultant som funktion af (t, p) . Af sætningen nederst side 50 i [Nar] følger både dette samt åbenheden af W_X , og for en god ordens skyld fremhæver vi disse vigtige fakta.

Sætning 1.4. *For ethvert vektorfelt X på en mangfoldighed M er W_X åben i $\mathbb{R} \times M$. Afbildningen $\text{Fl}^X: W_X \rightarrow M$ er glat.*

Man kan med fordel tænke på $\text{Fl}^X(t, p)$ som det punkt man når til ved at begynde i punktet p og følge X indtil tiden t . Bemærk, at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Fl}^X(t, p) &= \frac{d}{dt} \gamma_p(t) \\ &= X_{\gamma_p(t)} \\ &= X(\text{Fl}^X(t, p)). \end{aligned} \quad (1.14)$$

For et reelt tal t lader vi U_t betegne mængden $\text{pr}_M(\{t\} \times M \cap W_X)$; det er mængden af de $p \in M$ for hvilke $t \in I_p$. Afbildningen $\text{Fl}_t^X: U_t \rightarrow M$ defineres ved $\text{Fl}_t^X(p) = \text{Fl}^X(t, p)$. Definitionsmængden U_t er åben fordi W_X er åben. Vi får brug for følgende lemma om Fl^X .

Lemma 1.5. *Hvis X er et glat vektorfelt på M gælder identiteten*

$$\text{Fl}^X(s_0 + t_0, p) = \text{Fl}^X(s_0, \text{Fl}^X(t_0, p)) \quad (1.15)$$

i den forstand, at hvis højresiden er defineret er venstresiden også, og der gælder lighed. Ydermere, hvis s_0 og t_0 har samme fortegn og venstresiden er defineret, er højresiden det også og der gælder lighed.

Bevis. Antag højresiden af (1.15) er defineret. Det vil sige, at γ_p er defineret i hvert fald til tid t_0 ; lad $q = \gamma_p(t_0)$. Ydermere er altså γ_q defineret i hvert fald til tid s_0 . Ifølge Lemma 1.3 har vi altså $s_0 \in (a_p - t_0, b_p - t_0)$ og dermed $s_0 + t_0 \in (a_p, b_p)$. Altså er γ_p defineret i $s_0 + t_0$. Lemmaet giver også den ønskede identitet

$$\begin{aligned} \text{Fl}^X(s_0, \text{Fl}^X(t_0, p)) &= \text{Fl}^X(s_0, q) \\ &= \gamma_q(s_0) \\ &= \gamma_p(s_0 + t_0) \\ &= \text{Fl}^X(s_0 + t_0, p) \end{aligned}$$

Antag nu, at s_0, t_0 begge er positive, og venstresiden af (1.15) er defineret. Altså er γ_p defineret på $[0, s_0 + t_0]$; lad $q = \gamma_p(t_0)$. Så er γ_q defineret på i hvert fald $[-t_0, s_0]$ og vi har

$$\begin{aligned} \text{Fl}^X(s_0 + t_0, p) &= \gamma_p(s_0 + t_0) \\ &= \gamma_q(s_0) \\ &= \text{Fl}^X(s_0, q) \\ &= \text{Fl}^X(s_0, \text{Fl}^X(t_0, p)). \end{aligned}$$

Tilfældet hvor s_0 og t_0 er negative er helt analogt. □

Bemærkning 1.6. Hvis X er et vektorfelt, hvor W_X som defineret ovenfor (ligning (1.12)) er lig $\mathbb{R} \times M$, kaldes X fuldstændigt. I et sådant tilfælde er afbildningen $t \mapsto \text{Fl}_t^X$ en gruppehomomorfi fra de reelle tal under addition til $\text{Diff}(M)$, gruppen af diffeomorfier af M . Et tilstrækkeligt kriterium for at et vektorfelt X er fuldstændigt er, at dets støtte er kompakt (specielt er alle vektorfelter på en kompakt mangfoldighed fuldstændige). Hvis M ikke er kompakt udgør mængden af fuldstændige vektorfelter i almindelighed ikke et underrum af $\mathcal{T}M$; ejheller er den lukket under Lie-parentesen (se side 19 i [KMS]).

1.3.1 Kommutativitet

Et centralt punkt i beviset for Frobenius' sætning er, at to vektorfelter kommuterer hvis og kun hvis de tilhørende flows kommuterer. Inden vi når til den formelle formulering af dette skal vi i de følgende afsnit indføre et par begreber. Det er også på sin plads at nævne nogle resultater vedrørende Fl_t^X . Det er en glat afbildning $U_t \rightarrow M$, og faktisk er det en diffeomorfi på sit billede, thi den inverse er $\text{Fl}_{-t}^X: U_{-t} \rightarrow U_t$. For ethvert vektorfelt X gælder at $\text{Fl}_0^X = \text{Id}_M$. Ligning (1.14) kan vi også skrive som

$$\frac{d}{dt}\text{Fl}_t^X = X \circ \text{Fl}_t^X. \quad (1.16)$$

Hvis der nu om to vektorfelter X og Y gælder, at der om ethvert punkt p findes en lille omegn U så $\text{Fl}_t^X|_U = \text{Fl}_t^Y|_U$ for alle t i en lille omegn af 0, må vi have at $X = Y$ på hele M . Dette følger af ligning (1.16), thi

$$X = X \circ \text{Fl}_0^X = \frac{d}{dt}\Big|_0 \text{Fl}_t^X = \frac{d}{dt}\Big|_0 \text{Fl}_t^Y = Y \circ \text{Fl}_0^Y = Y.$$

Dette viser, at et vektorfelt er entydigt bestemt ved dets flow.

1.3.2 Relaterede vektorfelter

Glatte afbildninger i almindelighed skal også have et par ord med på vejen. Lad $f: M \rightarrow N$ være en sådan. To vektorfelter $X \in \mathcal{T}M$ og $Y \in \mathcal{T}N$ kaldes f -relaterede hvis diagrammet (1.17) kommuterer, altså hvis $Tf \circ X = Y \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ x \uparrow & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \quad (1.17)$$

I det tilfælde hvor f er en lokal diffeomorfi har vi for alle $p \in M$ en lineær isomorfi $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$. Det betyder, at for et givet vektorfelt Y på N

findes netop et vektorfelt $X = f^*Y$ på M således at X og Y er f -relaterede, nemlig $(f^*Y)(p) = (T_p f)^{-1}(Y(f(p)))$ eller bare $f^*Y = T f^{-1} \circ Y \circ f$. Hvis også $g: N \rightarrow P$ er en lokal diffeomorfi er sammensætningen $g \circ f: M \rightarrow P$ en lokal diffeomorfi, og man kan udregne at $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ (hvilket selvfølgelig er hvad der motiverer brugen af en øvre stjerne). Sammenhængen mellem f -relaterede vektorfelter og disses tilhørende flows er belyst i det næste lemma.

Lemma 1.7. *Lad $f: M \rightarrow N$ være en glat afbildning og lad $X \in \mathcal{T}M$, $Y \in \mathcal{T}N$ være f -relaterede vektorfelter. Så er $f \circ \text{Fl}_t^X = \text{Fl}_t^Y \circ f$ når begge sider er defineret. I specialtilfældet hvor f er en diffeomorfi er altså $\text{Fl}_t^{f^*Y} = f^{-1} \circ \text{Fl}_t^Y \circ f$.*

Bevis. Vi har at

$$\frac{d}{dt}(f \circ \text{Fl}_t^X) = T f \circ X \circ \text{Fl}_t^X = Y \circ f \circ \text{Fl}_t^X$$

samt at $f(\text{Fl}^X(0, p)) = f(p)$. Afbildningen $t \mapsto f(\text{Fl}^X(t, p))$ er derfor en integralkurve af Y gennem $f(p)$, hvilket vil sige at $f(\text{Fl}^X(t, p)) = \text{Fl}^Y(t, f(p))$ eller $f \circ \text{Fl}_t^X = \text{Fl}_t^Y \circ f$. \square

1.3.3 Lie-derivation

Et andet begreb der viser sig nyttigt at indføre er *Lie-derivation*. Ideen er, at man givet et vektorfelt X på en mangfoldighed kan måle hvordan „noget“ ændrer sig langs X (altså langs flowkurverne hørende til X). Dette „noget“ kan være en funktion, et vektorfelt, en differentialform eller sågar et tensorfelt. Her vil vi dog kun definere Lie-derivation af glatte funktioner og vektorfelter.

Lad X og Y være vektorfelter på en mangfoldighed M , og lad $f \in C^\infty(M)$. Så defineres

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X f(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\text{Fl}^X(t, p)) \quad \text{eller blot} \\ \mathcal{L}_X f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \text{Fl}_t^X) \end{aligned}$$

og

$$\mathcal{L}_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^X)^* Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T \text{Fl}_{-t}^X \circ Y \circ \text{Fl}_t^X).$$

Disse kaldes de Lie-afledte af f henholdsvis Y langs X .

Bemærk, at i et givet punkt $p \in M$ giver $(T(\text{Fl}_{-t}^X) \circ Y \circ \text{Fl}_t^X)(p)$ mening for alle t i et interval omkring 0, og $t \mapsto ((\text{Fl}_t^X)^*Y)(p)$ er en (glat) kurve der forløber i T_pM . Således giver definitionen af $\mathcal{L}_X Y$ mening.

Selvom de ovenstående definitioner kan virke både besynderlige og svære at regne med, viser det sig at der blot er tale om gammel vin på nye flasker. Vi har nemlig at $\mathcal{L}_X f = Xf$ og $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. Den første påstand følger fordi $t \mapsto \text{Fl}^X(t, p) = \gamma_p(t)$ er en kurve der opfylder $\gamma_p(0) = p$ og $\gamma_p'(0) = X_p$, hvorfor

$$Xf(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma_p)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\text{Fl}^X(t, p)) = \mathcal{L}_X f(p).$$

For at vise den anden påstand skal vi først, for fastholdt t , se hvordan vektorfeltet $(\text{Fl}_t^X)^*Y$ virker på en funktion f . Lad $p \in M$ og $q = \text{Fl}_t^X(p)$. En udregning giver

$$\begin{aligned} ((\text{Fl}_t^X)^*Y)_p f &= (T(\text{Fl}_{-t}^X) \circ Y \circ \text{Fl}_t^X)_p f \\ &= (T_q(\text{Fl}_{-t}^X) Y_q) f \\ &= Y_q(f \circ \text{Fl}_{-t}^X) \\ &= (Y(f \circ \text{Fl}_{-t}^X) \circ \text{Fl}_t^X)(p) \end{aligned}$$

hvorved altså $(\text{Fl}_t^X)^*Y f = Y(f \circ \text{Fl}_{-t}^X) \circ \text{Fl}_t^X$.

Lad os nu se på hvordan differenskvotienten $((\text{Fl}_t^X)^*Y - (\text{Fl}_0^X)^*Y)/t = ((\text{Fl}_t^X)^*Y - Y)/t$ virker på en funktion f . Under anvendelse af et trick af ældre dato og at \circ er distributiv over $+$ og $-$ finder vi

$$\begin{aligned} \frac{(\text{Fl}_t^X)^*Y - Y}{t} f &= \frac{Y(f \circ \text{Fl}_{-t}^X) \circ \text{Fl}_t^X - Yf}{t} \\ &= \frac{Y(f \circ \text{Fl}_{-t}^X) \circ \text{Fl}_t^X - (Yf) \circ \text{Fl}_t^X + (Yf) \circ \text{Fl}_t^X - Yf}{t} \\ &= \frac{(Y(f \circ \text{Fl}_{-t}^X) - Yf) \circ \text{Fl}_t^X}{t} + \frac{(Yf) \circ \text{Fl}_t^X - Yf}{t}. \quad (1.18) \end{aligned}$$

Betragter vi grænseværdien af det andet led i (1.18) når t går mod 0, finder vi, at det netop er den Lie-affledte af funktionen Yf langs X :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Yf) \circ \text{Fl}_t^X - Yf}{t} = \mathcal{L}_X(Yf) = X(Yf). \quad (1.19)$$

Det første led i (1.18) kræver lidt ekstra arbejde. Da $\text{Fl}_{-t}^X = \text{Fl}_t^{-X}$ finder vi at

$$\begin{aligned} \frac{(Y(f \circ \text{Fl}_{-t}^X) - Yf) \circ \text{Fl}_t^X}{t} &= \frac{Y(f \circ \text{Fl}_t^{-X} - f) \circ \text{Fl}_t^X}{t} \\ &= Y\left(\frac{f \circ \text{Fl}_t^{-X} - f}{t}\right) \circ \text{Fl}_t^X. \end{aligned}$$

Da $\text{Fl}_0^X = \text{Id}_M$ og Fl^X er kontinuert i begge variable har vi, at der i passende forstand gælder at $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Fl}_t^X = \text{Id}_M$. Hvis man har to familier af kontinuerte funktioner g_t, h_t hvor sammensætningen $g_t \circ h_t$ giver mening for alle t tæt ved 0, er det let at se at der med en smule misbrug af notation gælder

$$\lim_{t \rightarrow 0} [g_t \circ h_t] = [\lim_{t \rightarrow 0} g_t] \circ [\lim_{t \rightarrow 0} h_t].$$

Vi har derfor at

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left[Y\left(\frac{f \circ \text{Fl}_t^{-X} - f}{t}\right) \circ \text{Fl}_t^X \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[Y\left(\frac{f \circ \text{Fl}_t^{-X} - f}{t}\right) \right] \circ [\lim_{t \rightarrow 0} \text{Fl}_t^X] \\ &= Y\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \text{Fl}_t^{-X} - f}{t}\right) \circ \text{Id}_M \\ &= Y(\mathcal{L}_{-X}f) \\ &= Y(-Xf). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Kombinerer vi resultaterne fra ligningerne (1.18), (1.19) og (1.20) får vi at

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)f &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^X)^* Yf \\ &= X(Yf) + Y(-X(f)) \\ &= X(Yf) - Y(Xf) \\ &= [X, Y]f \end{aligned} \tag{1.21}$$

og da dette gælder for en vilkårlig glat funktion f har vi (se fx [Mor], Proposition 1.39) at $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Vi får også brug for at kende $\frac{d}{dt} (\text{Fl}_t^X)^* Y$ evalueret til et vilkårligt tidspunkt t_0 . Da

$$(\text{Fl}_{t_0+t}^X)^* = (\text{Fl}_t^X \circ \text{Fl}_{t_0}^X)^* = (\text{Fl}_{t_0}^X)^* \circ (\text{Fl}_t^X)^*$$

får vi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (\text{Fl}_t^X)^*Y &= \lim_{t \rightarrow 0} (\text{Fl}_{t_0+t}^X)^*Y \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} (\text{Fl}_{t_0}^X)^* ((\text{Fl}_t^X)^*Y) \\
&= (\text{Fl}_{t_0}^X)^* (\lim_{t \rightarrow 0} (\text{Fl}_t^X)^*Y) \\
&= (\text{Fl}_{t_0}^X)^*[X, Y].
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Efter alle disse forberedelser er vi nu endelig klar til at formulere resultatet om kommutativitet.

Proposition 1.8. *Lad $X, Y \in \mathcal{TM}$ være to vektorfelter på M . Så er følgende ækvivalent.*

- (1) X og Y kommuterer, dvs. $[X, Y] = 0$.
- (2) $(\text{Fl}_t^X)^*Y = Y$ når defineret.
- (3) $\text{Fl}_s^Y \circ \text{Fl}_t^X = \text{Fl}_t^X \circ \text{Fl}_s^Y$ når defineret.

Bevís. Vi har at

$$\text{Fl}_t^X \circ \text{Fl}_s^Y = \text{Fl}_s^Y \circ \text{Fl}_t^X$$

hvis og kun hvis

$$\text{Fl}_s^Y = (\text{Fl}_t^X)^{-1} \circ \text{Fl}_s^Y \circ \text{Fl}_t^X = \text{Fl}_s^{(\text{Fl}_t^X)^*Y}$$

hvor det sidste lighedstegn følger fra Lemma 1.7. Da vektorfelter er entydigt bestemte ved deres flow er dette ækvivalent med $Y = (\text{Fl}_t^X)^*Y$, hvilket viser (2) \iff (3).

Hvis $(\text{Fl}_t^X)^*Y = Y$ er $(\text{Fl}_t^X)^*Y$ uafhængig af t , og derfor er klart

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^X)^*Y = \mathcal{L}_X Y = [X, Y] = 0.$$

Hvis omvendt $[X, Y] = 0$ følger fra ligning (1.22) at

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (\text{Fl}_t^X)^*Y = (\text{Fl}_{t_0}^X)^*[X, Y] = 0.$$

Altså er $(\text{Fl}_t^X)^*Y$ uafhængig af t , så vi har $(\text{Fl}_t^X)^*Y = (\text{Fl}_0^X)^*Y = Y$. Dette viser (1) \iff (2). \square

A modern mathematical proof is not very different from a modern machine, or a modern test setup: the simple fundamental principles are hidden and almost invisible under a mass of technical details.

— Hermann Weyl (1885–1955)

KAPITEL 2

Frobenius' sætning

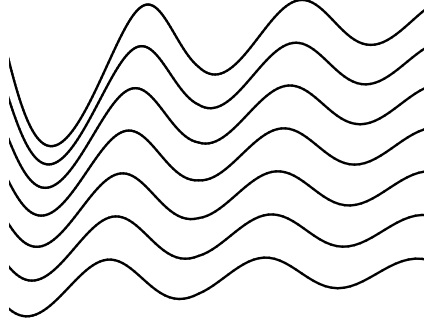
I dette kapitel bevises projektets første hovedresultat. Men før vi når så langt skal vi indføre nogle definitioner og gennemføre et par beviser. Overalt i det følgende betegner M en glat n -mangfoldighed. Vi starter med en slags motivation for hvorfor vi overhovedet vil beskæftige os med de indførte begreber.

2.1 Motivation

Givet et vektorfelt X på en mangfoldighed M og et punkt $p \in M$, kan man som vist i Kapitel 1 finde en integralkurve af X gennem p , hvilket vil sige en kurve γ defineret på et lille interval $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ således at $\gamma(0) = p$ og $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ for $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dette følger af et velkendt resultat om ordinære differentiaalligninger, og af samme resultat følger, at en sådan løsning kan udvides til en entydigt bestemt maksimal integralkurve, altså en integralkurve $\tilde{\gamma}: (a, b) \rightarrow M$ hvis domæne (a, b) ikke kan udvides.

En god måde at tænke på disse maksimale integralkurver er som “flowlinjer” af vektorfeltet. Det kræver ikke megen eftertænksomhed at indse, at maksimale integralkurver (betragtet som delmængder af mangfoldigheden) enten er ens eller disjunkte. Figur 2.1 på den følgende side skulle illustrere dette. Heraf ser man, at et (ikke-degenereret) vektorfelt X på M giver anledning til en disjunkt opdeling af M i 1-dimensionale immerserede delmangfoldigheder.

Man ledes nu naturligt til at stille spørgsmålet: Hvad nu hvis man har flere vektorfelter, X_1, \dots, X_k ? Kan man så “integrere” disse og få en samling k -dimensionale (eventuelt kun immerserede) delmangfoldigheder? Hvis ikke dette i almindelighed kan lade sig gøre, er der så en måde at afgøre præcis



Figur 2.1: Maksimale integralkurver er enten ens eller disjunkte.

hvornår det kan? Det er disse spørgsmål Frobenius' sætning besvarer, omend i en lidt anden formulering end givet her.

2.2 Definitioner

Givet et vektorfelt X overalt forskellig fra 0, en glat funktion f overalt forskellig fra 0 og et punkt $p \in M$ kan man betragte de to maksimale integralkurver $\tilde{\gamma}: (a, b) \rightarrow M$, $\tilde{\mu}: (c, d) \rightarrow M$ gennem p hørende til henholdsvis X og fX . Som nævnt sidst i afsnit 1.2 på side 6 afhænger den 1-dimensionale (immerserede) delmangfoldighed der indeholder punktet p kun af vektorfeltet X op til skalering, eller med andre ord kun af underrumene $\text{span}(X_q) \subset T_qM$ for $q \in M$. Ved at formulere ovenstående spørgsmål i termer af k -dimensionale underrum af T_pM undgår vi også at bekymre os om eventuel lineær afhængighed af $X_1(q), \dots, X_k(q)$. Dette motiverer vores første definition.

Definition 2.1 (Distribution). En distribution \mathcal{D} af rang k på M er en tilordning til ethvert punkt $p \in M$ af et underrum \mathcal{D}_p af dimension k af T_pM . Distributionen kaldes glat, hvis ethvert punkt p har en omegn U , hvorpå der findes glatte vektorfelter X_1, \dots, X_k således at $X_1(q), \dots, X_k(q)$ er en basis for \mathcal{D}_q for ethvert $q \in U$. Disse X_i siges at frembringe \mathcal{D} på U .

Fra nu af vil ordet “distribution” betyde “glat distribution”. Et vektorfelt X siges at *tilhøre* distributionen \mathcal{D} hvis $X_p \in \mathcal{D}_p$ for alle $p \in M$. Nogle steder bruges ordet “differentialsystem” i stedet for distribution.

Bemærkning 2.2. I visse sammenhænge kan det være en fordel at tænke på \mathcal{D} som et delbundet af vektorbundet TM . Et vektorfelt tilhørende \mathcal{D} er med denne sprogbrug altså blot et glat snit af \mathcal{D} .

Diskussionen af integralkurver ovenfor viste, at det egentlig ikke er selve kurverne der er interessante, men udelukkende deres billede i mangfoldigheden. Generaliseringen til højere dimension sker derfor ikke så overraskende i termer af delmangfoldigheder.

Definition 2.3 (Integral delmangfoldighed). Lad \mathcal{D} være en distribution af rang k på M . En sammenhængende immerseret delmangfoldighed $N \subset M$ kaldes en integral delmangfoldighed af \mathcal{D} hvis det for alle $q \in N$ gælder at $T_q i(T_q(N)) = \mathcal{D}_q$. Her betegner i den glatte afbildning (inklusionsafbildningen) $N \rightarrow M$, og $T_q i(T_q(N))$ er billedet af tangentrummet til N i punktet q under differentialet af i i punktet q .

For at lette notationsbyrden vil vi for fremtiden ikke skelne mellem $T_q N$ og $T_q i(T_q N)$, når N er en immerseret delmangfoldighed. Vi identificerer altså hvert tangentrum til N med et underrum af det tilsvarende tangentrum til M .

Vi kan nu definere hvad det vil sige for en distribution at være integrabel i et punkt. Definitionen skulle ikke komme som en overraskelse.

Definition 2.4 (Integrabilitet). En distribution \mathcal{D} på M siges at være integrabel i punktet $p \in M$, hvis der findes en integral delmangfoldighed $N \subset M$ indeholdende p . Distributionen kaldes *fuldstændig integrabel* hvis den er integrabel i ethvert punkt i M .

En distribution af rang 1 er således altid fuldstændig integrabel.

Definition 2.5 (Involutiv). Lad \mathcal{D} betegne en distribution af rang k på M . Hvis det for alle vektorfelter X, Y tilhørende \mathcal{D} gælder, at Lie-produktet $[X, Y]$ af X og Y også tilhører \mathcal{D} , kaldes \mathcal{D} involutiv.

Man kan bemærke, at distributioner af rang 1 automatisk er involutive. Thi hvis X, Y tilhører distributionen \mathcal{D} af rang 1 og U er en passende lille åben mængde findes der et glat vektorfelt Z så \mathcal{D} er frembragt af Z på U . Dermed findes glatte funktioner $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ så $X = fZ$ og $Y = gZ$ på U , og så følger det af regneregler for Lie-parentesen at

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [fZ, gZ] \\ &= f[Z, gZ] - (gZ)(f) \cdot Z \\ &= f \cdot \{g[Z, Z] + Z(g) \cdot Z\} - gZ(f) \cdot Z \\ &= fZ(g) \cdot Z - gZ(f) \cdot Z \\ &= (fZ(g) - gZ(f)) \cdot Z \end{aligned}$$

der jo er et vektorfelt tilhørende \mathcal{D} .

2.3 Forberedelser

Vi er nu klar til at formulere og bevise de første par resultater i de egentlige bestræbelser på at nå frem til Frobenius' sætning. Det første er et standardresultat om immersioner.

Lemma 2.6. *Lad $i: N \rightarrow M$ være en immersion. For ethvert punkt $p \in N$ findes en åben omegn U af p således at $i(U)$ er en indlejret delmangfoldighed af M og så $i|_U: U \rightarrow i(U)$ er en diffeomorfi.*

Bevis. Anvend invers funktions-sætningen (se [MT, Exercise 9.2]). \square

Dette lemma skal især bruges i den situation hvor $N \subset M$ er en immerseret delmangfoldighed og i er inklusionsafbildningen. Lemmaet fortæller altså, at der om ethvert punkt i N findes en åben omegn U i mangfoldighedstopologien på N , så U er en indlejret delmangfoldighed af M .

Lemma 2.7. *En fuldstændig integrabel distribution er involutiv.*

Bevis. Vi skal vise, at hvis X og Y er glatte vektorfelter der tilhører distributionen \mathcal{D} af rang k , så vil også $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$ for et vilkårligt punkt $p \in M$. Pr. antagelse kan vi finde en immerseret delmangfoldighed N af M indeholdende punktet p . Ved et vælge N lille nok kan vi på grund af Lemma 2.6 antage, at N er en delmangfoldighed. Derfor findes en koordinatomegn $(U; x^1, \dots, x^n)$ af p således at $x^{k+1}(q) = \dots = x^n(q) = 0$ for $q \in N \cap U$ og $x^i(p) = 0$ for alle i . Så er $(N \cap U; x^1, \dots, x^k)$ en koordinatomegn på N , og derfor er

$$\text{span} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}(q), \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}(q) \right) = T_q N = \mathcal{D}_q \subset T_q M$$

for alle $q \in N \cap U$.

Udtrykker vi X og Y i lokale koordinater

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.1}$$

$$Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.2}$$

ser man, at da X_q og Y_q tilhører \mathcal{D}_q må vi have $a_i(q) = b_i(q) = 0$ for $i > k$ og $q \in N \cap U$. Det betyder så, at

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(p) = 0$$

for $i > k$ og alle $j \leq k$. Efter noget regnearbejde finder man at $[X, Y]$ kan udtrykkes i lokale koordinater som

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x^i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

og da den inderste sum er 0 for $j > k$ har vi $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$, hvilket skulle vises. \square

Hvis X og Y er to vektorfelter, hvis Lie-parentes $[X, Y]$ er identisk 0, siges X og Y at kommutere. Vores første proposition viser, at en involutiv distribution lokalt er frembragt af kommuterende vektorfelter.

Proposition 2.8. *Lad \mathcal{D} være en involutiv distribution af rang k på M og $p \in M$ et punkt i M . Så findes en åben omegn U af p og vektorfelter X_1, \dots, X_k som frembringer \mathcal{D} på U og så $[X_i, X_j] = 0$ for alle i, j .*

Bevis. Vi kan vælge en koordinatomegn $(V; x)$ af p så lille, at der på V findes glatte vektorfelter Y_1, \dots, Y_k der frembringer \mathcal{D} på V . I lokale koordinater kan vi altså skrive

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (2.3)$$

At Y_i frembringer \mathcal{D} på V betyder, at matricen $[a_{ij}(q)]$ har rang k for alle $q \in V$. Lad $A(q)$ betegne den kvadratiske matrix $[a_{ij}(q)]_{1 \leq i, j \leq k}$. Vi kan, eventuelt efter omnummerering af x^j 'erne, antage at $A(p)$ er invertibel. Da såvel afbildningen $q \mapsto A(q)$ som determinantafbildningen er kontinuerte, er $A(q)$ invertibel for alle q i en åben omegn $U \subset V$ af p .

Vi kan altså definere funktioner b_{ij} på U ved at lade $B(q) = [b_{ij}(q)] = A(q)^{-1}$. Da matrixinversion er en glat afbildning bliver disse b_{ij} 'er glatte. Vi kan nu definere k glatte vektorfelter på U ved

$$X_i = \sum_{j=1}^k b_{ij} Y_j \quad (2.4)$$

for $1 \leq i \leq k$. Indsætter vi (2.3) heri får vi

$$X_i = \sum_{j=1}^k b_{ij} \sum_{r=1}^n a_{jr} \frac{\partial}{\partial x^r} = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{j=1}^k b_{ij} a_{jr} \right) \frac{\partial}{\partial x^r}. \quad (2.5)$$

For $1 \leq r \leq k$ bliver den inderste sum simpelthen δ_{ir} , da det jo er den ir 'te indgang i matricen BA , der pr. definition er identiteten for alle $q \in U$. Altså konkluderer vi, at X_i er på formen

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^n c_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (2.6)$$

hvor c_{ij} er glatte funktioner på U .

Fra udtrykket (2.6) følger klart at X_i er lineært uafhængige, $1 \leq i \leq k$. Da X_i er en linearkombination af vektorfelter tilhørende \mathcal{D} må også X_i tilhøre \mathcal{D} . Men af disse sandheder følger at X_1, \dots, X_k frembringer \mathcal{D} på U . Tilbage er at vise at $[X_i, X_j] = 0$.

På den ene side kan vi beregne $[X_i, X_j]$ ved brug af udtrykket (2.6). For overskuelighedens skyld forkortes $\frac{\partial}{\partial x^i}$ med ∂^i . Vi får

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= [\partial^i + \sum_{r=k+1}^n c_{ir} \partial^r, \partial^j + \sum_{s=k+1}^n c_{js} \partial^s] \\ &= \sum_{r=k+1}^n [c_{ir} \partial^r, \partial^j] + \sum_{s=k+1}^n [\partial^i, c_{js} \partial^s] + \sum_{r,s=k+1}^n [c_{ir} \partial^r, c_{js} \partial^s]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Efter en smule regning indser man, at dette faktisk er en $C^\infty(M)$ -linearkombination af $\partial^{k+1}, \dots, \partial^n$. Regneregler for Lie-parentesen giver nemlig

$$\begin{aligned} [c_{ir} \partial^r, \partial^j] &= c_{ir} [\partial^r, \partial^j] - \left(\frac{\partial c_{ir}}{\partial x^j} \right) \partial^r \\ &= - \left(\frac{\partial c_{ir}}{\partial x^j} \right) \partial^r \\ [\partial^i, c_{js} \partial^s] &= c_{js} [\partial^i, \partial^s] + \left(\frac{\partial c_{js}}{\partial x^i} \right) \partial^s \\ &= \left(\frac{\partial c_{js}}{\partial x^i} \right) \partial^s \\ [c_{ir} \partial^r, c_{js} \partial^s] &= c_{ir} c_{js} [\partial^r, \partial^s] + c_{ir} \left(\frac{\partial c_{js}}{\partial x^r} \right) \partial^s - c_{js} \left(\frac{\partial c_{ir}}{\partial x^s} \right) \partial^r \\ &= c_{ir} \left(\frac{\partial c_{js}}{\partial x^r} \right) \partial^s - c_{js} \left(\frac{\partial c_{ir}}{\partial x^s} \right) \partial^r \end{aligned}$$

og da r og s kun antager værdierne $k+1, \dots, n$ fås det ønskede.

På den anden side antog vi jo at \mathcal{D} var involutiv. Det betyder, at $[X_i, X_j]$ tilhører \mathcal{D} , og da X_m frembringer \mathcal{D} findes funktioner f_{ij}^m så

$$[X_i, X_j] = \sum_{m=1}^k f_{ij}^m X_m.$$

Erindrer vi nu fra udtryk (2.6) at X_m består af leddet $\frac{\partial}{\partial x^m}$ plus en linearkombination af $\partial^{k+1}, \dots, \partial^n$ kan vi konkludere, at f_{ij}^m må være identisk 0, og derfor er $[X_i, X_j] = 0$, hvilket skulle vises. \square

2.4 Folieringer

Endelig kan vi nu formulere og bevise dette kapitels hovedresultat.

Sætning 2.9 (Frobenius). *En distribution er fuldstændig integrabel hvis og kun hvis den er involutiv.*

Bevis. Den ene vej blev bevist i Lemma 2.7, så antag nu at \mathcal{D} er en involutiv distribution, og lad rangen af \mathcal{D} være k . Vi skal så gennem et givet punkt $p \in M$ konstruere en integral delmangfoldighed. Proposition 2.8 viser, at der findes kommuterende vektorfelter X_1, \dots, X_k defineret på en åben omegn U af p som frembringer \mathcal{D} på U . Lad Fl^{X_i} betegne de tilhørende flows. For et passende lille $\varepsilon > 0$ kan vi for alle $t = (t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k$ med $|t| < \varepsilon$ definere en afbildning $f: B_\varepsilon(0) \rightarrow M$ ved

$$f(t) = (\text{Fl}_{t^1}^{X_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t^k}^{X_k})(p). \quad (2.8)$$

Af hensyn til den næste udregning indføres notationen

$$f_r(t) = (\text{Fl}_{t^1}^{X_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t^{r-1}}^{X_{r-1}} \circ \text{Fl}_{t^{r+1}}^{X_{r+1}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t^k}^{X_k})(p)$$

Bemærk at $f(t) = \text{Fl}^{X_r}(t^r, f_r(t))$ på grund af kommutativiteten af Fl^{X_i} (Proposition 1.8), og at $f_r(t)$ er uafhængig af den r 'te koordinat t^r .

Fra ligning (1.14) ser vi nu, at

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t^r}(t) &= \frac{\partial}{\partial t^r} \text{Fl}^{X_r}(t^r, f_r(t)) \\ &= X_r(\text{Fl}^{X_r}(t^r, f_r(t))) \\ &= X_r(f(t)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da $X_1(p), \dots, X_k(p)$ er lineært uafhængige er $T_0 f: \mathbb{R}^k \rightarrow T_p M$ en injektion. Altså findes et $0 < \delta \leq \varepsilon$ så $N = f(B_\delta(0))$ er en sammenhængende delmangfoldighed af M , som oplagt indeholder punktet p . Tilbage er at vise, at N er den ønskede delmangfoldighed. Da $T_{f^{-1}(q)} f: \mathbb{R}^k \rightarrow T_q N$ er en isomorfi og $X_1(q), \dots, X_k(q) \in T_q N$ pr. ligning (2.9) følger, at $T_q N = \mathcal{D}_q$. Da en delmangfoldighed specielt er en immerseret ditto, er det ønskede hermed vist. \square

Lad \mathcal{D} være en fuldstændig integrabel distribution. Ganske som i tilfældet med integralkurver af vektorfelter har vi, at ethvert punkt tilhører netop en maksimal integral delmangfoldighed af \mathcal{D} . Thi lad N_1 og N_2 være integrale delmangfoldigheder gennem p , og lad i_1, i_2 betegne de tilhørende inklusionsafbildninger. Hvis X er et vektorfelt på M tilhørende \mathcal{D} , giver $i_j^*X = (Ti_j)^{-1} \circ X \circ i_j$ mening og er et vektorfelt på N_j (fordi $X_q \in \mathcal{D}_q = T_q i_j(T_q N) \subset T_q M$ for alle $q \in N_j$). X og i_j^*X er klart i_j -relaterede, og ifølge Lemma 1.7 gælder derfor at $i_j \circ \text{Fl}_t^{i_j^*X} = \text{Fl}_t^X \circ i_j$ når defineret. Lad nu X_1, \dots, X_k være en lokal basis bestående af kommuterende vektorfelter for \mathcal{D} omkring p . Afbildningerne $f_j: \mathbb{R}^k \rightarrow N_j$ defineret ved

$$f_j(t^1, \dots, t^k) = (\text{Fl}_{t^1}^{i_1^*X_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t^k}^{i_k^*X_k})(p)$$

er så defineret tæt ved $0 \in \mathbb{R}^k$, og ses let at være en lokal parametrisering af N_j . En udregning viser nu at

$$\begin{aligned} (i_2^{-1} \circ i_1 \circ f_1)(t^1, \dots, t^k) &= (i_2^{-1} \circ i_1 \circ \text{Fl}_{t^1}^{i_1^*X_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t^k}^{i_k^*X_k})(p) \\ &= (i_2^{-1} \circ \text{Fl}_{t^1}^{X_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t^k}^{X_k} \circ i_1)(p) \\ &= (\text{Fl}_{t^1}^{i_2^*X_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t^k}^{i_2^*X_k} \circ i_2^{-1} \circ i_1)(p) \\ &= f_2(t^1, \dots, t^k) \end{aligned}$$

da jo $(i_2^{-1} \circ i_1)(p) = p$. Dette viser at afbildningen

$$i_2^{-1} \circ i_1: i_1^{-1}(N_1 \cap N_2) \rightarrow i_2^{-1}(N_1 \cap N_2)$$

er en diffeomorfi. (Naturligvis er $i_1^{-1}(N_1 \cap N_2) = i_2^{-1}(N_1 \cap N_2) = N_1 \cap N_2$ som mængder; formuleringen er valgt for at fremhæve $N_1 \cap N_2$ som delmangfoldighed af N_1, N_2 i disses respektive mangfoldighedsstrukturer).

Lader vi L_p betegne foreningsmængden af alle integrale delmangfoldigheder gennem p ser vi, at dette bliver en ny integral delmangfoldighed gennem p . Som atlas for L_p kan vi nemlig vælge foreningen af atlasser for de integrale delmangfoldigheder hvis forening er L_p ; det foregående viser at dette bliver et glat atlas. Ydermere bliver L_p naturligvis en sammenhængende immerseret delmangfoldighed.

For vilkårlige to punkter $p, q \in M$ gælder således, at enten er $L_p = L_q$ eller også er $L_p \cap L_q = \emptyset$. Den maksimale integrale delmangfoldighed gennem p kaldes *bladet* gennem p , og samlingen $\mathcal{F} = \{L_p\}_{p \in M}$ af blade kaldes en *foliering* af M .

Nogle forfattere, fx [Loo, side 36], definerer en foliering af M til at være en delmangfoldighed, der som mængde udgør hele M og som desuden opfylder en passende lokal betingelse. Et blad defineres så til at være en sammenhængskomponent af \mathcal{F} . Denne brug af ordet delmangfoldighed strider

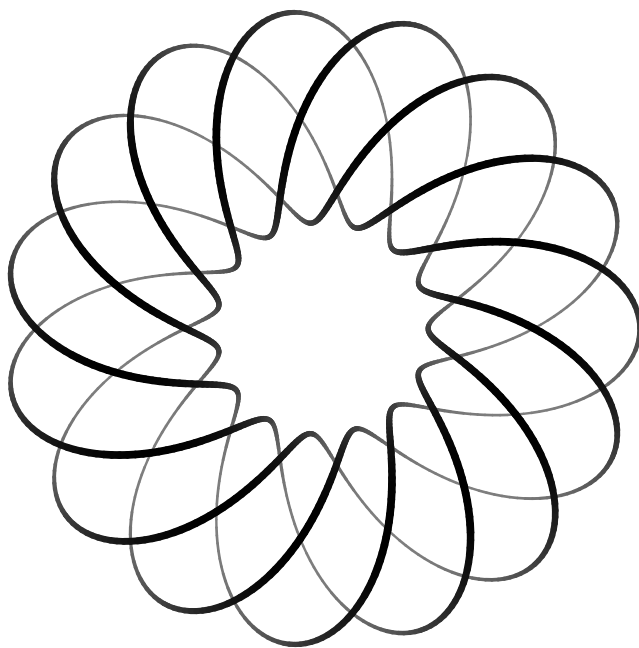
på to punkter mod den brug jeg har valgt. For det første er hvert blad ikke (nødvendigvis) en indlejret delmangfoldighed, hvorfor en foliering højst kan være en immerseret delmangfoldighed. For det andet er der i almindelighed (eneste undtagelse er den trivielle distribution $\mathcal{D}_p = T_pM$) overtælleligt mange blade, hvilket umuliggør eksistensen af en tællelig basis for topologien for \mathcal{F} . Derfor kan \mathcal{F} ikke gøres til en mangfoldighed med mindre man dropper kravet om andentællelighed af det underliggende topologiske rum.

To “næsten ens” distributioner kan give anledning til helt forskellige folieringer: Lad $M = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ være torussen, og lad $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ være projektionen. Lad α_1, α_2 være henholdsvis et rationelt og et irrationelt tal. De to vektorfelter $\tilde{X}_i = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}$ på \mathbb{R}^2 giver to vektorfelter X_1, X_2 på T^2 ved fastsættelsen

$$X_i(p) = T_q\pi(\tilde{X}_i(q)),$$

hvor q er et vilkårligt element i fiberen $\pi^{-1}(p)$. Det er ikke svært at se, at $X_i(p)$ er uafhængig af valget af q .

Pointen er nu, at X_i frembringer hver deres distribution \mathcal{D}_i af rang 1, og dette giver så to folieringer \mathcal{F}_i af T^2 .



Figur 2.2: Et blad af \mathcal{F}_1 , eller en 4, 15-torusknude.

Folieringen \mathcal{F}_2 er ikke særlig pæn i den forstand, at hvert blad er diffeomorf med \mathbb{R} og ligger tæt i T^2 . Bladene af \mathcal{F}_2 er dermed næsten så langt

fra at være delmangfoldigheder som de kan være; i sportopologien er der fx ingen blade der er lokalt kurvesammenhængende i noget punkt. Hvert blad af \mathcal{F}_1 er derimod en indlejret delmangfoldighed som er diffeomorf med S^1 . Hvis $\alpha_1 = a/b$, $a, b > 0$ og $\gcd(a, b) = 1$ kan man tænke på hvert blad som det der i knudeteori kaldes en “ a, b -torusknude”. En anden måde at sige dette på er, at hvis $\pi_1(T^2, x_0) = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ er fundamentalgruppen for torussen med basispunkt x_0 , og γ_1, γ_2 er “standardfrembringerne”, kan bladet af \mathcal{F}_1 gennem x_0 opfattes som billedet af en repræsentant for elementet $a\gamma_1 + b\gamma_2 \in \pi_1$. Figuren 2.2 på den foregående side skulle illustrere dette.

*But just as much as it is easy to find the differential of a given quantity,
so it is difficult to find the integral of a given differential. Moreover,
sometimes we cannot say with certainty whether the integral
of a given quantity can be found or not.*

— Johann Bernoulli (1667–1748)

KAPITEL 3

Lie-grupper

I dette kapitel præsenteres et par anvendelser af Frobenius' sætning. Den første er en forholdsvis oplagt konsekvens, omend der dog skal lægges noget arbejde for dagen. Den anden kræver et noget større maskineri og en del konstruktioner der tilsyneladende dukker op ud af den blå luft. Begge involverer, som kapitlets titel kunne antyde, begrebet *Lie-gruppe*, hvorfor vi starter med en kort omtale af disse.

3.1 Definitioner og egenskaber

Løst sagt er en Lie-gruppe en gruppe som samtidig er en mangfoldighed. Yderligere kræver man, at gruppestrukturen og mangfoldighedsstrukturen er kompatible i passende forstand. Mere formelt har vi:

Definition 3.1 (Lie-gruppe). Lad G være en gruppe som samtidig er en glat mangfoldighed. Hvis gruppemultiplikationen $\mu: G \times G \rightarrow G$ er glat kaldes G en Lie-gruppe.

Nogle steder kræves også at inversionsafbildningen $G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ er glat, men dette er strengt taget overflødigt, da det er en konsekvens af den her givne definition (se fx side 30 i [KMS]).

For fastholdt $a \in G$ kan vi definere en afbildning $G \rightarrow G$ ved $\lambda_a(x) = a \cdot x$, hvor \cdot betegner gruppemultiplikationen. Denne er (1) glat, pr. definition af en Lie-gruppe og (2) bijektiv, idet dens inverse er $\lambda_a^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$, som altså også er glat. Således giver hvert $a \in G$ en diffeomorfi af G . På tilsvarende vis får man at højretranslation med et element $\rho_a(x) = x \cdot a$ er en diffeomorfi. Alt hvad der i det følgende siges om venstretranslationen er naturligvis (med passende modifikationer) også gyldigt for højretranslation, men vi får ikke brug for dette.

I beviset for Lemma 3.15 får vi brug for dette faktum:

Lemma 3.2. *En sammenhængende Lie-gruppe er frembragt af en hvilken som helst åben omegn af neutralelementet e .*

Bevis. Lad U være en vilkårlig åben omegn af $e \in G$. Det er klart nok at vise udsagnet for en mindre åben omegn af e . Da inversion er en diffeomorfi og $e^{-1} = e$ er $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$ også en åben omegn af e . Sæt $V = U \cap U^{-1}$. Lad H betegne den mindste undergruppe af G som indholder mængden V . Så har vi at

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$$

hvor V^n består af alle de elementer i G som kan skrives som et produkt af n elementer fra V . Inklusionen \subseteq skyldes at højresiden oplagt er en undergruppe af G indeholdende V (fordi V^n pr. konstruktion af V indeholder alle sine inverse), mens inklusionen \supseteq skyldes at H indeholder V og derfor også alle endelige produkter af elementer fra V .

Det er klart at hvert V^n er åben i G : Induktion i n giver at da

$$V^n = \bigcup_{v \in V} v \cdot V^{n-1}$$

og venstremultiplikation er en diffeomorfi, er hvert $v \cdot V^{n-1}$ pr. induktionsantagelse åben, hvorved også V^n er åben. Men det betyder så at H er åben i G .

Hver sideklasse til H i G er på formen $a \cdot H$ og således åben i G . Komplementet til H i G er foreningen af alle sideklasser forskellig fra H , så dette komplement er derfor åbent. Men så er H lukket i G , og da H således er åben, lukket og ikke-tom har vi $H = G$. Da $V \subseteq U$ er beviset færdigt. \square

3.1.1 Venstreinvariante vektorfelter

Givet et vektorfelt X på G og en diffeomorfi f af G får man (som nævnt i afsnit 1.3.2) et nyt vektorfelt f^*X på G , defineret ved $f^*X = Tf^{-1} \circ X \circ f$. Et vektorfelt X der opfylder

$$\lambda_a^*X = X \tag{3.1}$$

for alle $a \in G$ kaldes *venstreinvariant*. Et venstreinvariant vektorfelt er således et der er λ_a -relateret til sig selv, for alle $a \in G$. Vi skal bruge at mængden af venstreinvariante vektorfelter er lukket under Lie-parentesen $[\cdot, \cdot]$. Til det formål er det nemmest at vise et lidt mere generelt lemma først.

Lemma 3.3. *Lad $f: M \rightarrow N$ være en glat afbildning, $X_i \in \mathcal{T}M$, $Y_i \in \mathcal{T}N$ f -relaterede vektorfelter for $i = 1, 2$ og $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Så er også $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ og $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ f -relaterede, og ligeledes er $[X_1, X_2]$ og $[Y_1, Y_2]$ f -relaterede.*

Bevis. Vi har givet at $Tf \circ X_i = Y_i \circ f$ for $i = 1, 2$. Af dette og linearitet af Tf følger let at

$$\begin{aligned} Tf \circ (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) &= \lambda_1 Tf \circ X_1 + \lambda_2 Tf \circ X_2 \\ &= \lambda_1 (Y_1 \circ f) + \lambda_2 (Y_2 \circ f) \\ &= (\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) \circ f \end{aligned}$$

hvilket præcis betyder at $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ og $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ er f -relaterede.

Lad nu g være en vilkårlig glat funktion på N . Observér, at

$$X_i(g \circ f) = (Tf \circ X_i)(g) = (Y_i \circ f)(g) = (Y_i(g)) \circ f. \quad (3.2)$$

Derfor er

$$\begin{aligned} (Tf \circ [X_1, X_2])(g) &= [X_1, X_2](g \circ f) \\ &= X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f)) \\ &= X_1(Y_2(g) \circ f) - X_2(Y_1(g) \circ f) \quad (*) \\ &= Y_1(Y_2(g)) \circ f - Y_2(Y_1(g)) \circ f \\ &= [Y_1, Y_2](g) \circ f \\ &= ([Y_1, Y_2] \circ f)(g). \end{aligned}$$

I linjen (*) blev observationen (3.2) brugt på de glatte funktioner $Y_i(g)$, $i = 2, 1$. Da dette gælder for en vilkårlig glat funktion $g \in C^\infty(N)$ har vi altså at $Tf \circ [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ f$. \square

3.1.2 Lie-algebraen hørende til en Lie-gruppe

Lad nu $\mathcal{T}_L G$ betegne mængden af venstreinvariante vektorfelter på G . Med $M = N = G$ og $f = \lambda_a$ viser Lemma 3.3, at $\mathcal{T}_L G$ er en Lie-delalgebra af $\mathcal{T}G$. I det følgende betegner e neutralelementet i gruppen G .

Evalueringsafbildningen

$$ev_e: \mathcal{T}_L G \rightarrow T_e G \quad (3.3)$$

er oplagt en lineær afbildning mellem vektorrum. Faktisk er det en isomorfi, for til en tangentvektor $x \in T_e G$ svarer netop ét venstreinvariant vektorfelt,

nemlig $X(a) = T_e \lambda_a(x) \in T_{\lambda_a(e)} G = T_a G$. At dette bliver et venstreinvariant vektorfelt følger af udregningen

$$\begin{aligned} (T\lambda_b \circ X)(a) &= T_a \lambda_b(X_a) \\ &= T_a \lambda_b(T_e \lambda_a(x)) \\ &= T_e(\lambda_b \circ \lambda_a)(x) \\ &= T_e \lambda_{ba}(x) \\ &= X(ba) \\ &= (X \circ \lambda_b)(a). \end{aligned}$$

Strengt taget skal det også kontrolleres, at det herved definerede vektorfelt er glat. I [Dup, s. 121f] gøres dette ved at vise at X er glat på en passende lille åben omegn U af e . Så bliver X glat på en åben omegn af ethvert punkt b fordi $\lambda_b: U \rightarrow b \cdot U$ er en diffeomorfi og $X_{ba} = T_a \lambda_b(X_a)$. En anden tilgangsvinkel er den der bruges i [War, Proposition 3.7(b)]. Der defineres et venstreinvariant vektorfelt til at være et (ikke nødvendigvis glat) vektorfelt der opfylder (3.1), og derefter vises det at et sådant vektorfelt er glat.

Definition 3.4. Lie-algebraen hørende til en Lie-gruppe G er vektorrummet

$$\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G) = T_e G$$

forsynet med den af isomorfien (3.3) inducerede Lie-parentes.

For ikke at forveksle Lie-parentesen på \mathfrak{g} med den på $\mathcal{T}G$ benyttes $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ om førstnævnte. Hvis således $x, y \in \mathfrak{g}$ og $X, Y \in \mathcal{T}_L G$ er de tilhørende venstreinvariante vektorfelter er $\llbracket x, y \rrbracket = [X, Y](e)$.

Nogle steder defineres Lie-algebraen hørende til G simpelthen til at være $\mathcal{T}_L G$. I det tilfælde bruges (3.3) som oftest til at vise at $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G = \dim G$. Jeg har valgt Definition 3.4 for at fremhæve det særlige ved punktet e i en Lie-gruppe.

Man kan forholdsvis let vise (se fx [KMS, side 36]), at venstreinvariante vektorfelter altid er fuldstændige. Derfor kan man definere en afbildning (eksponentialafbildningen) $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ ved

$$\exp(x) = \text{Fl}^X(1, e).$$

$\exp(x)$ er således det punkt man når til ved at starte i neutralelementet e og følge det til x hørende venstreinvariante vektorfelt til tid 1. Blandt de mange vigtige egenskaber ved \exp er at den er glat, og at det er en diffeomorfi

fra en omegn af $0 \in \mathfrak{g}$ til en omegn af $e \in G$. En anden vigtig egenskab er, at $\exp(tx) = \text{Fl}^{tX}(1, e) = \text{Fl}^X(t, e)$, så

$$\frac{d}{dt} \exp(tx) = X(\text{Fl}^X(t, e)) = X(\exp(tx)). \quad (3.4)$$

Disse fakta kan man finde i snart sagt enhver bog der omtaler Lie-grupper og deres Lie-algebraer, og jeg vil derfor ikke gå yderligere i detaljer med nyttige egenskaber ved \exp eller beviser herfor.

3.1.3 \mathcal{L} er en funktor

En *Lie-gruppehomomorfi* er en glat gruppehomomorfi. Det følgende lemma viser at \mathcal{L} kan betragtes som en funktor fra kategorien af Lie-grupper og Lie-gruppehomomorfier til kategorien af (reelle) Lie-algebraer og Lie-algebrahomomorfier.

Lemma 3.5. *Lad $\varphi: G \rightarrow H$ være en Lie-gruppehomomorfi. Så inducerer φ en Lie-algebrahomomorfi*

$$\mathcal{L}(\varphi) = T_e\varphi: \mathfrak{g} = T_eG \rightarrow \mathfrak{h} = T_eH.$$

Bevis. $T_e\varphi$ er klart en lineær afbildning mellem vektorrum, så det eneste der skal vises er at $T_e\varphi$ bevarer Lie-parentesen. Lad nu $x \in \mathfrak{g}$ og sæt $y = T_e\varphi(x) \in \mathfrak{h}$. Udvid x og y til venstreinvariante vektorfelter på henholdsvis G og H kaldet X og Y . Så er X og Y φ -relaterede, thi lad $a \in G$ være et vilkårligt punkt. En udregning giver

$$\begin{aligned} (T\varphi \circ X)(a) &= T_a\varphi(X(a)) = T_a\varphi(T_e\lambda_a(x)) \\ &= T_e(\varphi \circ \lambda_a)(x) = T_e(\lambda_{\varphi(a)} \circ \varphi)(x) \\ &= T_{\varphi(a)}\lambda_{\varphi(a)}(T_e\varphi(x)) = T_e\lambda_{\varphi(a)}(y) \\ &= Y(\varphi(a)) = (Y \circ \varphi)(a). \end{aligned} \quad (*)$$

Undervejs, i linjen (*), benyttedes formelen $\varphi \circ \lambda_a = \lambda_{\varphi(a)} \circ \varphi$ der kan verificeres ved direkte udregning.

Lad nu $x_i \in \mathfrak{g}$ og sæt $y_i = T_e\varphi(x_i)$, $i = 1, 2$. Udvid som før disse til venstreinvariante vektorfelter X_i, Y_i på henholdsvis G og H . Da er

$$T\varphi \circ [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ \varphi$$

ifølge Lemma 3.3, og evaluering af dette udtryk ved $e \in G$ giver på venstresiden

$$T_e\varphi([X_1, X_2](e)) = T_e\varphi([x_1, x_2])$$

mens højresiden giver

$$[Y_1, Y_2](\varphi(e)) = [Y_1, Y_2](e) = \llbracket y_1, y_2 \rrbracket = \llbracket T_e\varphi(x_1), T_e\varphi(x_2) \rrbracket$$

så $T_e\varphi$ er faktisk en homomorfi af Lie-algebraer. \square

At $\mathcal{L}(\text{Id}_G) = \text{Id}_{\mathcal{L}(G)}$ er oplagt, og lige så oplagt er det at

$$\mathcal{L}(h \circ g) = \mathcal{L}(h) \circ \mathcal{L}(g): T_eG \rightarrow T_eK$$

når $g: G \rightarrow H$ og $h: H \rightarrow K$ er Lie-gruppehomomorfier. Dette viser påstanden om at \mathcal{L} er en (kovariant) funktor.

3.2 Første anvendelse

En undergruppe H af en Lie-gruppe G kaldes en Lie-undergruppe hvis H samtidig er en immerseret delmangfoldighed og afbildningen $H \times H \rightarrow H$ induceret fra G gør H til en Lie-gruppe. Denne sidste betingelse er selvfølgelig automatisk opfyldt i det tilfælde hvor H er en delmangfoldighed (fordi så er mangfoldighedsstrukturen på H induceret fra G), men i det generelle tilfælde er det en vigtig betingelse. Eksemplerne fra slutningen af Kapitel 2 er her udmærkede til at illustrere dette. Torussen T^2 kan også opfattes som $S^1 \times S^1$, og dette er en Lie-gruppe. Bladet af folieringen \mathcal{F}_1 gennem (e, e) er en delmangfoldighed, og faktisk er det en Lie-undergruppe isomorf til S^1 . Bladet af \mathcal{F}_2 er også en Lie-undergruppe, men det er kun en immerseret delmangfoldighed. Som Lie-gruppe er det isomorft til \mathbb{R} .

Hvis $H \subseteq G$ er en Lie-undergruppe er inklusionen $i: H \rightarrow G$ en Lie-gruppehomomorfi, og Lemma 3.5 fortæller så at Lie-algebraen for H (på naturlig vis) er en delalgebra af Lie-algebraen for G . Til enhver Lie-undergruppe svarer således en Lie-delalgebra. Den første anvendelse af Frobenius' sætning er på en måde det omvendte af dette faktum.

Sætning 3.6. *Lad G være en Lie-gruppe med Lie-algebra \mathfrak{g} , og lad \mathfrak{h} være en delalgebra af \mathfrak{g} . Så findes en entydigt bestemt sammenhængende Lie-undergruppe H af G med Lie-algebra \mathfrak{h} .*

Bevis. For ethvert $a \in G$ får vi et underrum af T_aG ved fastsættelsen $\mathcal{D}_a = T_e\lambda_a(\mathfrak{h})$. Lad $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{h}$ være en basis for \mathfrak{h} , og kald de tilhørende venstreinvariante vektorfelter X_1, \dots, X_k . Disse er glatte, og

$$T_e\lambda_a(x_1) = X_1(a), \dots, T_e\lambda_a(x_k) = X_k(a)$$

er en basis for \mathcal{D}_a . Altså er \mathcal{D} en glat distribution.

Da $[[x_i, x_j]] \in \mathfrak{h}$ (fordi \mathfrak{h} er en Lie-delalgebra) har vi at $[X_i, X_j](a) \in \mathcal{D}_a$ for alle i, j . Men heraf følger, at distributionen \mathcal{D} er involutiv, for hvis Y_1, Y_2 er to vektorfelter tilhørende \mathcal{D} kan de skrives som $C^\infty(G)$ -linearkombinationer af X_1, \dots, X_k , og regneregler for Lie-parentesen viser så at $[Y_1, Y_2]$ også kan skrives som $C^\infty(G)$ -linearkombinationer af X_1, \dots, X_k samt udtryk af formen $[X_i, X_j]$.

Ifølge Frobenius' sætning er \mathcal{D} således fuldstændig integrabel. Lad \mathcal{F} betegne den tilhørende foliering af G og lad H betegne bladet gennem neutralelementet $e \in G$. Dette er pr. definition en sammenhængende immerseret delmangfoldighed, hvis tangentrum i e netop er \mathfrak{h} . Tilbage er så blot at vise at H er en undergruppe af G og en Lie-gruppe i sig selv.

Til det formål skal vi se hvordan venstretranslation virker på bladene af \mathcal{F} . Lad derfor $a \in G$ være et vilkårligt element, B et blad og $b \in B$. Da λ_a er en diffeomorfi afbildes immerserede delmangfoldigheder i immerserede delmangfoldigheder. Tangentrummet til $\lambda_a(B)$ i punktet $\lambda_a(b) = ab$ er

$$\begin{aligned} T_b \lambda_a(T_b B) &= T_b \lambda_a(\mathcal{D}_b) \\ &= T_b \lambda_a(T_e \lambda_b(\mathfrak{h})) \\ &= T_e \lambda_{ab}(\mathfrak{h}) \\ &= \mathcal{D}_{ab}. \end{aligned}$$

Således er $\lambda_a(B)$ en integral delmangfoldighed af \mathcal{D} gennem ab . Lad C betegne bladet af \mathcal{F} gennem ab ; så er altså $\lambda_a(B) \subseteq C$. Men et argument analogt til det foregående viser at $\lambda_{a^{-1}}(C)$ er en integral delmangfoldighed af \mathcal{D} gennem b ; således er $\lambda_{a^{-1}}(C) \subseteq B$. Disse to inklusioner medfører oplagt at $\lambda_a(B) = C$, og herved indses at venstretranslation simpelthen virker på \mathcal{F} ved at permutere bladene.

Hvis nu $a \in H$ har vi at $e = a^{-1}a$ og derfor er både H og $\lambda_{a^{-1}}(H)$ blade af folieringen \mathcal{F} der indeholder neutralelementet e . Derfor er $H = \lambda_{a^{-1}}(H)$. Det betyder specielt at vi har $a, b \in H \implies a^{-1}b \in H$, og dette (sammen med det elementære faktum at H er ikke-tom) er ækvivalent med at H er en undergruppe.

Endelig skal vi kontrollere at H er en Lie-gruppe, altså at multiplikationen $\mu_H: H \times H \rightarrow H$ er glat. Vi har at afbildningen $i \circ \mu_H: H \times H \rightarrow G$ kan skrives som sammensætningen af de glatte afbildninger

$$i \circ i: H \times H \rightarrow G \times G \qquad \mu_G: G \times G \rightarrow G;$$

således er $i \circ \mu_H$ glat. Nu følger glathed af μ_H af Sætning 3.9 nedenfor med $N = H$, $M = G$, $P = H \times H$ og $f = \mu_H$. \square

Det er på sin plads at knytte et par kommentarer til denne sætning og beviset herfor. På en måde er det en oplagt anvendelse af Frobenius' sætning: Lie-parentesen på $T_e G$ er induceret af den på $\mathcal{T}G$, og den af en Lie-delalgebra af $T_e G$ "frembragte" (via venstretranslation) distribution bliver involutiv pr. konstruktion. Efter at have påberåbt sig Frobenius' sætning er der kun et muligt bud på hvad H skal være. Resten af beviset handler så blot om at kontrollere, at dette bud rent faktisk virker. At den på magisk vis fremkomne immerserede delmangfoldighed faktisk udgør en undergruppe er ikke a priori klart.

Sætning 3.6 og bemærkningerne umiddelbart før giver altså en bijektiv korrespondance mellem Lie-delalgebraer af \mathfrak{g} og sammenhængende Lie-undergrupper. Det betyder blandt andet, at studiet af Lie-grupper kan drage nytte af viden fra Lie-algebrateori, og vice versa.

Et eksempel herpå er følgende:

Sætning 3.7. *For enhver reel Lie-algebra L af endelig dimension findes en Lie-gruppe G hvis tilhørende Lie-algebra er (isomorf til) den givne Lie-algebra.*

En måde at vise denne sætning er at udnytte det faktum (kendt som Ados sætning), at L har en såkaldt tro repræsentation på et vektorrum V af endelig dimension, hvilket vil sige at der findes en injektiv Lie-algebrahomomorfi $L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, ringen af endomorfier af V med Lie-parentes $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. Et valg af basis for V giver en isomorfi $\mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}_n$. Her er \mathfrak{gl}_n vektorrummet af reelle $n \times n$ -matricer forsynet med Lie-parentesen $[A, B] = AB - BA$. Således er L isomorf til en delalgebra af \mathfrak{gl}_n , og da dette er Lie-algebraen for Lie-gruppen GL_n følger Sætning 3.7 nu direkte af Sætning 3.6.

Med Sætning 3.7 i hånden er der ikke langt til at bevise følgende, som vil blive brugt i forbindelse med den anden anvendelse af Frobenius' sætning.

Sætning 3.8. *Der er en bijektiv korrespondance mellem isomorfiklasser af enkeltssammenhængende Lie-grupper og isomorfiklasser af Lie-algebraer.*

For at vise, at der givet en Lie-algebra \mathfrak{g} findes en enkeltssammenhængende Lie-gruppe med Lie-algebra isomorf til den givne kan man bruge Sætning 3.7 til at finde en Lie-gruppe G hvis Lie-algebra er isomorf til \mathfrak{g} . Den universelle overlejring \tilde{G} af G kan man så gøre til en Lie-gruppe, og konstruktionen er af en sådan natur at Lie-algebraen for \tilde{G} faktisk bliver isomorf til den givne. At isomorfiklassen af \tilde{G} bliver entydigt bestemt følger af, at enkeltssammenhængende Lie-grupper med isomorfe Lie-algebraer er isomorfe (se Sætningerne 3.25, 3.27 og 3.28 i [War]).

Et enkelt hængeparti resterer fra beviset for Sætning 3.6. Lad $N \subseteq M$ være en immerseret delmangfoldighed, og betragt følgende påstand:

For enhver mangfoldighed P gælder, at en afbildning $f: P \rightarrow N$ er glat hvis og kun hvis afbildningen $i \circ f: P \rightarrow M$ er glat.

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{f} & N \\
 & \searrow_{i \circ f} & \downarrow i \\
 & & M
 \end{array} \tag{3.5}$$

Uden bevis anføres

Sætning 3.9. *Hvis N er en integral delmangfoldighed af en involutiv distribution på M har N ovenstående universelle egenskab.*

Denne sætning kan fx findes i [Boo, s. 162] og [War, s. 47]. I [KMS] findes en diskussion af hvilke immerserede delmangfoldigheder der har den universelle egenskab (3.5) omtalt ovenfor.

3.3 Anden anvendelse

Vi skal nu vende tilbage til flow af vektorfelter på en mangfoldighed, og de diffeomorfier disse frembringer. Vi skal vise, at visse undergrupper (her kaldet H) af $\text{Diff}(M)$ kan gives en Lie-gruppestruktur, således at gruppevirkningen $H \times M \rightarrow M$ bliver en glat afbildning (man siger at H virker på M som en Lie-transformationsgruppe). Før vi når så langt skal vi dog gøre os nogle observationer angående produktmangfoldigheder.

3.3.1 Diverse fakta

Materialet i dette afsnit præsenteres uden bevis, da der er tale om ting som er til at tro på uden videre. Læseren opfordres derfor til at gøre dette.

Lad N_1 og N_2 være mangfoldigheder. For ethvert punkt $(p, q) \in N_1 \times N_2$ er der en naturlig isomorfi af vektorrum

$$T_{(p,q)}(N_1 \times N_2) \cong T_p N_1 \oplus T_q N_2 \tag{3.6}$$

Hvis $f_i: N_i \rightarrow N_i$ er glatte, $i = 1, 2$, har vi en glat afbildning

$$\begin{aligned}
 f_1 \times f_2: N_1 \times N_2 &\longrightarrow N_1 \times N_2 \\
 (p, q) &\longmapsto (f_1(p), f_2(q))
 \end{aligned}$$

På grund af naturlighed af (3.6) gælder der om differentialet

$$T_{(p,q)}f_1 \times f_2: T_{(p,q)}N_1 \times N_2 \rightarrow T_{(f_1(p),f_2(q))}N_1 \times N_2$$

at det også kan skrives

$$T_p f_1 \times T_q f_2: T_p N_1 \oplus T_q N_2 \rightarrow T_{f_1(p)} N_1 \oplus T_{f_2(q)} N_2. \quad (3.7)$$

Lad Y_1, Y_2 være glatte vektorfelter på henholdsvis N_1 og N_2 . Så fås et glat vektorfelt (Y_1, Y_2) på $N_1 \times N_2$ ved fastsættelsen

$$(Y_1, Y_2)(p, q) = (Y_1(p), Y_2(q)). \quad (3.8)$$

Dette opfattes som element i $T_{(p,q)}(N_1 \times N_2)$ ved hjælp af isomorfien (3.6). Denne afbildning er en injektiv Lie-algebrahomomorfi $\mathcal{T}(N_1) \times \mathcal{T}(N_2) \rightarrow \mathcal{T}(N_1 \times N_2)$, og billedet er derfor en Lie-delalgebra. Lie-parentsen af to vektorfelter på formen (3.8) er

$$[(Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2)] = ([Y_1, Z_1], [Y_2, Z_2]). \quad (3.9)$$

3.3.2 Formulering

Lad M være en mangfoldighed og \mathfrak{h} være en endelig-dimensional Lie-delalgebra af $\mathcal{T}M$, som er frembragt (som vektorrum) af fuldstændige vektorfelter. Erindr fra Bemærkning 1.6, at givne fuldstændige vektorfelter ikke nødvendigvis frembringer en Lie-(del)algebra af fuldstændige vektorfelter. Her antages altså at der findes fuldstændige vektorfelter X_1, \dots, X_k , således at \mathbb{R} -spannet af disse udgør en Lie-delalgebra, men det antages *ikke* at alle vektorfelter tilhørende \mathfrak{h} er fuldstændige. Se også kommentarerne efter formuleringen af Sætning 3.10.

Vi definerer nu undergruppen $H \subseteq \text{Diff}(M)$ til at være gruppen frembragt af diffeomorfierne Fl_t^X , hvor $X \in \mathfrak{h}$ er et fuldstændigt vektorfelt og $t \in \mathbb{R}$. Det er denne undergruppe vi ønsker at give en Lie-gruppestruktur.

Sætning 3.10. *Lad M være en mangfoldighed, og lad \mathfrak{h} , H være defineret som ovenfor. Så findes en entydig bestemt mangfoldighedsstruktur på H som opfylder:*

- (1) H er en Lie-gruppe.
- (2) Afbildningen $H \times M \rightarrow M$ givet ved $(f, p) \mapsto f(p)$ er glat.
- (3) Lie-algebraen for H er isomorf til \mathfrak{h} .

Ovenfor kan man egentlig nøjes med den svagere antagelse, at \mathfrak{h} er frembragt som Lie-algebra af fuldstændige vektorfelter. Beviset for sætningen bliver dog en kende mere kompliceret, og derfor har jeg valgt denne lidt mindre generelle formulering. Hvis man beviser sætningen under den svagere antagelse får man som korollar (se [Loo], side 35) at *alle* vektorfelter tilhørende \mathfrak{h} er fuldstændige. Så i alle tilfælde hvor den stærke udgave af sætningen finder anvendelse, vil den givne Lie-delalgebra bestå af fuldstændige vektorfelter. Man vil ofte have held med at starte med (formentlig på en ad hoc-måde) at vise dette og så anvende den her givne svage udgave af sætningen. I mange vigtige tilfælde er ens mangfoldighed kompakt, og så er der (jf. Bemærkning 1.6) ingen vanskeligheder.

3.3.3 Bevis for Sætning 3.10

Beviset for Sætning 3.10 deles ind i adskillige trin. Ifølge Sætning 3.8 findes der en enkeltsammenhængende Lie-gruppe G hvis Lie-algebra \mathfrak{g} er isomorfi til \mathfrak{h} . Lad $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ være en isomorfi. Der er a priori ingen grund til at tro, at denne Lie-gruppe skulle have noget at gøre med diffeomorfier af M . For alligevel at finde en sådan sammenhæng er ideen at lade G virke på $G \times M$ og konstruere en foliering af mangfoldigheden $G \times M$ således at G virker ved at permutere bladene. Et yderligere studie af denne foliering vil afsløre hvordan vi kan konstruere en surjektiv gruppehomomorfi $G \rightarrow H$, og det er ved hjælp af denne afbildning mangfoldighedsstrukturen på H kommer frem.

Lad altså G være som nævnt, og lad G virke på $G \times M$ ved venstremultiplikation på første faktor:

$$\begin{aligned} G \times G \times M &\rightarrow G \times M \\ (g, h, p) &\mapsto g \cdot (h, p) = (gh, p). \end{aligned}$$

For et element $x \in \mathfrak{g}$ lader vi som tidligere X betegne det venstreinvariante vektorfelt på G som opfylder $X_e = x$. Fra isomorfien φ ovenfor giver x også et vektorfelt på M , og dette vil blive betegnet \tilde{X} . Med notationen fra afsnit 3.3.1 ovenfor har vi således for ethvert $x \in \mathfrak{g}$ et vektorfelt (X, \tilde{X}) på $G \times M$.

Den lovede foliering skal fremkomme ved hjælp af en distribution på $G \times M$. Sæt derfor

$$\mathcal{D}_{(g,p)} = \{(X, \tilde{X})(g, p) \mid x \in \mathfrak{g}\}. \quad (3.10)$$

Da afbildningen

$$x \mapsto (X, \tilde{X}) \in \mathcal{T}G \times \mathcal{T}M \subseteq \mathcal{T}(G \times M) \quad (3.11)$$

oplagt er injektiv og lineær, giver dette en distribution af rang $\dim \mathfrak{g}$. At distributionen er glat følger umiddelbart af glatheden af vektorfelterne (X, \tilde{X}) .

Både $x \mapsto X \in \mathcal{T}G$ og $x \mapsto \tilde{X} \in \mathcal{T}M$ er Lie-algebrahomomorfier, og derfor er også (3.11) en Lie-algebrahomomorfi. Således er mængden $\{(X, \tilde{X}) \mid x \in \mathfrak{g}\}$ lukket under Lie-parentesen. Da disse vektorfelter frembringer alle vektorfelter tilhørende \mathcal{D} over $C^\infty(G \times M)$ følger det nu (som i beviset for Sætning 3.6) af regneregler for Lie-parentesen at \mathcal{D} er involutiv.

Nu kan vi endelig benytte os af Frobenius' sætning. Lad \mathcal{F} være folieringen af $G \times M$ hørende til \mathcal{D} . For et $g \in G$ lader vi med en kende misbrug af notation samtidig g betegne diffeomorfien af $G \times M$ givet ved $g(h, p) = g \cdot (h, p) = (gh, p)$. Bemærk, at vi kan opfatte g som afbildningen $\lambda_g \times \text{Id}_M$ (med henblik på benyttelse af ligning (3.7)).

Lemma 3.11. *G virker på \mathcal{F} ved at permutere bladene. Hvis N og N' er blade med $g(N) = N'$ er afbildningen $g: N \rightarrow N'$ en diffeomorfi. Projektionen $\pi: G \times M \rightarrow G$ giver på hvert blad en lokal diffeomorfi ind i G .*

Bevis. Lad L være et blad, og $l = (h, p)$ et punkt i L . Ganske som i beviset for Sætning 3.6 finder vi, at g afbilder immerserede delmangfoldigheder i immerserede delmangfoldigheder, og tangentrummet til $g(L)$ i punktet $g(l) = (gh, p)$ er

$$\begin{aligned} T_l g(\mathcal{D}_l) &= T_{(h,p)}(\lambda_g \times \text{Id}_M)(\{(X(h), \tilde{X}(p)) \mid x \in \mathfrak{g}\}) \\ &= \{T_h \lambda_g(X(h)), T_p \text{Id}_M(\tilde{X}(p)) \mid x \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{X(gh), \tilde{X}(p) \mid x \in \mathfrak{g}\} \\ &= \mathcal{D}_{(gh,p)} \end{aligned}$$

således at $g(L)$ er indeholdt i bladet L' gennem (gh, p) . Tilsvarende er $g^{-1}(L')$ indeholdt i L , og vi kan konkludere at $g(L) = L'$.

Afbildningen $i \circ g: L \rightarrow G \times M$ er glat. Derfor kan vi benytte Sætning 3.9 til at konkludere, at også $g: L \rightarrow L'$ er glat. Det er en diffeomorfi da g er bijektiv og den inverse g^{-1} er glat som følge af et analogt argument.

Endelig er sammensætningen $\pi \circ i: L \rightarrow G \times M \rightarrow G$ glat. Tangentrummet til L i punktet (g, p) er $\mathcal{D}_{(g,p)}$, og billedet af dette under differentialet $T_{(g,p)} \pi \circ i$ er

$$T_{(g,p)}(\pi \circ i)(\mathcal{D}_{(g,p)}) = \{X(g) \mid x \in \mathfrak{g}\} = T_g G$$

og da $T_{(g,p)} \pi \circ i$ således er en surjektiv afbildning mellem vektorrum af samme dimension ($= \dim G$) er det en lineær isomorfi. Altså er $\pi \circ i$ en lokal diffeomorfi. \square

Fra nu af vil bladet af \mathcal{F} gennem (e, p) blive betegnet L_p .

Lemma 3.12. *Lad $x \in \mathfrak{g}$ være givet. Så er $(\exp(tx), \text{Fl}_t^{\tilde{X}}(p))$ indeholdt i bladet L_p for alle $p \in M$ og alle $t \in \mathbb{R}$. Omvendt, hvis Y er et fuldstændigt vektorfelt på M og der findes et $x \in \mathfrak{g}$ således at $(\exp(tx), \text{Fl}_t^Y(p)) \in L_p$ for alle $p \in M$ og alle $t \in \mathbb{R}$, så er $Y = \tilde{X}$.*

Bevis. Lad $\gamma(t) = (\exp(tx), \text{Fl}_t^{\tilde{X}}(p))$. Så er

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (X(\exp(tx)), \tilde{X}(\text{Fl}_t^{\tilde{X}}(p))) \\ &= (X, \tilde{X})(\gamma(t))\end{aligned}$$

ifølge ligningerne (3.4) og (1.14). Altså er $\gamma'(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ for alle t , og derfor må $\gamma(t)$ tilhøre det samme blad af \mathcal{F} for alle t . Endelig har vi at $\gamma(0) = (e, p) \in L_p$.

Lad nu $\gamma(t) = (\exp(tx), \text{Fl}_t^Y(p))$ og antag at $\gamma(t) \in L_p$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Ifølge Sætning 3.9 er γ differentiabel opfattet som afbildning ind i mangfoldigheden L_p . Derfor er $\gamma'(t)$ et element i tangentrummet til L_p i punktet $\gamma(t)$, og dette tangentrum er netop $\mathcal{D}_{\gamma(t)}$. Specielt får vi for $t = 0$ at

$$\begin{aligned}\gamma'(0) &= (X(\exp(0)), Y(\text{Fl}_0^Y(p))) \\ &= (x, Y(p)) \in \mathcal{D}_{(e,p)}.\end{aligned}$$

Men ethvert element i $\mathcal{D}_{(e,p)}$ er pr. definition på formen $(z, \tilde{Z}(p))$, så heraf følger at $z = x$ og dermed at Y er det af x inducerede vektorfelt \tilde{X} på M . \square

Som følge af dette lemma får vi

Lemma 3.13. *Lad $x_1, \dots, x_m \in \mathfrak{g}$ være elementer for hvilke de tilhørende vektorfelter $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m$ på M er fuldstændige. Så er afbildningen f_m givet ved*

$$(t_1, \dots, t_m) \longmapsto (\exp(t_1 x_1) \cdots \exp(t_m x_m), \text{Fl}_{t_m}^{\tilde{X}_m} \circ \cdots \circ \text{Fl}_{t_1}^{\tilde{X}_1}(p)) \quad (3.12)$$

en glat afbildning fra \mathbb{R}^m ind i L_p .

Bevis. Da f_m er en glat afbildning ind i $G \times M$ er det nok at tjekke, at f_m afbilder ind i L_p , thi så sikrer Sætning 3.9 at f_m bliver glat som afbildning ind i mangfoldigheden L_p .

Tilfældet $m = 1$ er blot Lemma 3.12. Antag nu at f_{m-1} er en glat afbildning ind i L_p . Lad q være punktet

$$\text{Fl}_{t_{m-1}}^{\tilde{X}_{m-1}} \circ \cdots \circ \text{Fl}_{t_1}^{\tilde{X}_1}(p)$$

i M og $g = \exp(t_1 x_1) \cdots \exp(t_{m-1} x_{m-1})$. Vi har at $g^{-1}(L_p)$ er et blad af \mathcal{F} , og da L_p pr. induktionsantagelse indeholder punktet (g, q) vil $g^{-1}L_p$ indeholde punktet (e, q) . Men så er $g^{-1}L_p = L_q$. Igen kan vi bruge det foregående lemma til at konkludere, at $(\exp(t_m x_m), \text{Fl}_{t_m}^{\tilde{X}^m}(q)) \in L_q$ for alle t_m . Men så vil

$$(g \cdot \exp(t_m x_m), \text{Fl}_{t_m}^{\tilde{X}^m}(q)) = f_m(t_1, \dots, t_m) \in L_p$$

for alle $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$. \square

Lad nu $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ være en basis for \mathfrak{h} bestående af fuldstændige vektorfelter, og lad som sædvanlig de tilhørende flows være betegnet $\text{Fl}^{\tilde{X}_i}$. Lad $x_i = \varphi^{-1}(\tilde{X}_i)$; så er det klart at x_1, \dots, x_n udgør en basis for \mathfrak{g} . Afbildningen $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ givet

$$\psi(t_1, \dots, t_n) = \exp(t_1 x_1) \cdots \exp(t_n x_n) = \prod_{i=1}^n \exp(t_i x_i)$$

er glat, og en simpel udregning viser, at matricen for differentialet

$$T_0\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow T_e G$$

med hensyn til henholdsvis standardbasen og basen (x_i) er identitetsmatricen. Man kan nemlig blot betragte kurven $\alpha_i(t) = t e_i$, hvorved det er en simpel sag at udregne $T_0\psi(e_i) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi \circ \alpha_i(t) = x_i$. Altså findes der en åben kugle

$$W = \{(t_1, \dots, t_n) \mid \sum t_i^2 < \varepsilon^2\} \quad (3.13)$$

i \mathbb{R}^n således at ψ afbilder W diffeomorft på en åben omegn V af e i G . Vi kan så bruge (t_i) som koordinater på V , og ved hjælp af disse definere en afbildning $f: V \rightarrow H$ ved

$$f(g) = \text{Fl}_{t_n}^{\tilde{X}^n} \circ \cdots \circ \text{Fl}_{t_1}^{\tilde{X}^1} \quad (3.14)$$

hvor altså $g = \psi(t_1, \dots, t_n)$. Dette er det første hint til hvordan vi skal finde en sammenhæng mellem G og H .

Lemma 3.14. *Afbildningen $\Phi: V \times M \rightarrow V \times M$ givet ved $\Phi(x, p) = (x, f(x)(p))$ er en diffeomorfi. For ethvert $p \in M$ er afbildningen $x \mapsto \Phi(x, p)$ en diffeomorfi af V på $V_p = \Phi(V, p)$, og V_p er sammenhængskomponenten af $L_p \cap (V \times M)$ indeholdende (e, p) .*

Bevis. Φ er glat, fordi de enkelte flows varierer glat simultant som funktion af p og t_i . Den inverse er givet ved $\Phi^{-1}(x, p) = (x, f(x)^{-1}(p))$ som ligeledes er glat. For et fastholdt $p \in M$ er afbildningen $x \mapsto (x, f(x)(p))$ en glat afbildning fra V ind i L_p (på grund af Lemma 3.13), og det er klart en diffeomorfi på billedet V_p . Den inverse er givet ved projektion på V . Da $\dim G = \dim L_p$ har vi at V_p er en åben delmangfoldighed af L_p . Således er V_p også åben i $L_p \cap (V \times M)$.

Tilbage er at vise at V_p er lukket i $L_p \cap (V \times M)$. Lad (x, q) være et punkt i $L_p \cap (V \times M)$ som ikke er i V_p . Sæt $(x, r) = \Phi(x, p) \in V_p \subseteq L_p$. Da mangfoldighedstopologien på L_p er finere end sportopologien fra $G \times M$, og $G \times M$ er Hausdorff, findes der disjunkte åbne (i L_p) omegne U, W så $(x, q) \in U$ og $(x, r) \in W$. Vi kan (om nødvendigt) erstatte U og W med endnu mindre mængder således at $W \subset V_p$ og så π afbilder U og W diffeomorft på den samme åbne omegn af $x \in G$ (på grund af Lemma 3.11). Antag der findes et punkt $(y, s) \in V_p \cap U$. Så vil $\pi(y, s) = y \in \pi(U) = \pi(W)$, men da restriktionen af π til V_p er injektiv medfører dette at $(y, s) \in W$. Dette strider mod at U og W er disjunkte, og et sådant punkt kan derfor ikke findes. Vi konkluderer at $V_p \cap U = \emptyset$. Således kan komplementet til V_p i $L_p \cap (V \times M)$ overdækkes med åbne mængder disjunkte fra V_p , som derfor er lukket (igen i $L_p \cap (V \times M)$). \square

Lemma 3.15. π afbilder hvert blad surjektivt på G .

Bevis. Bladet gennem (g, p) er lig $g(L_p) = g \cdot L_p$. Hvis påstanden blot kan vises for alle blade af formen L_p følger lemmaet af, at $\pi(g(L_p)) = g \cdot \pi(L_p) = g \cdot G = G$ (virkningen af G på $G \times M$ er jo blot venstremultiplikation på første faktor, hvilket kommuterer med π).

Lad V_p være som i det foregående lemma. Så er $V = \pi(V_p) \subseteq \pi(L_p)$ for alle $p \in M$. Vi vil nu ved induktion i n vise at $V^n \subseteq \pi(L_p)$ for alle n . V^n består af alle de elementer i G som kan skrives som et produkt af n elementer fra V .

Antag således at $V^{n-1} \subseteq \pi(L_p)$ og lad $g \in V^{n-1}$. Så findes der et $q \in M$ således at $(g, q) \in L_p$. Så er $g^{-1}L_p = L_q$, og heraf følger at

$$V \subset \pi(L_q) = g^{-1} \cdot \pi(L_p)$$

som igen medfører at $g \cdot V \subseteq \pi(L_p)$. Men det betyder netop at $V^n \subseteq \pi(L_p)$. Således er

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subseteq \pi(L_p). \quad (3.15)$$

Fra Lemma 3.2 har vi nu at $\pi(L_p) = G$. \square

Som umiddelbar konsekvens har vi, at ethvert blad indeholder et punkt fra $\{e\} \times M$, så alle blade er på formen L_p .

Lemma 3.16. *Restriktionen af π til et blad L_p er en overlejring.*

Bevis. For ethvert punkt $g \in G$ skal vi finde en åben omegn som er ligeligt overdækket. Til dette formål kan $g \cdot V$ bruges. Vi skal altså vise at

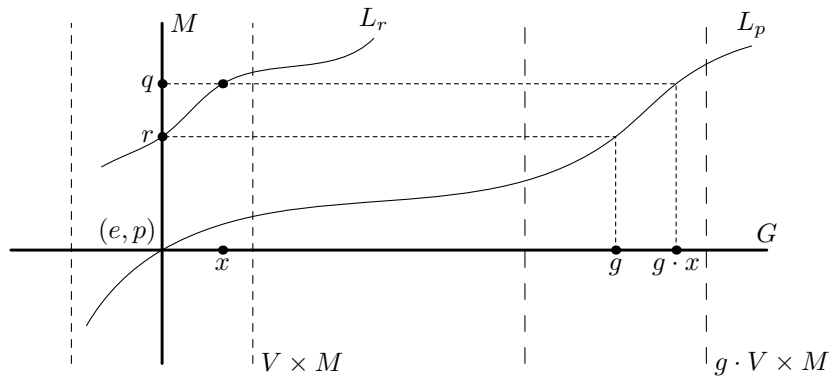
$$\pi|_{L_p}^{-1}(g \cdot V) = L_p \cap (g \cdot V \times M)$$

er en disjunkt forening af åbne mængder i L_p som hver for sig afbildes diffeomorft til $g \cdot V$.

Lad $(g \cdot x, q) \in L_p \cap (g \cdot V \times M)$, og lad U betegne sammenhængskomponenten i $L_p \cap (g \cdot V \times M)$ indeholdende $(g \cdot x, q)$. Så har vi på den ene side at $(x, q) \in g^{-1}(L_p)$, men vi har også at (x, q) er et element i $V \times M$, og ifølge Lemma 3.14 findes der derfor et $r \in M$ så $(x, q) = \Phi(x, r) \in L_r$. Af dette konkluderes at $g^{-1}(L_p) = L_r$, eller $L_p = g(L_r)$. Derfor er

$$L_p \cap (g \cdot V \times M) = g(L_r \cap (V \times M))$$

og U er derfor det samme som billedet under g 's virkning af [sammenhængskomponenten i $L_r \cap (V \times M)$ indeholdende punktet (x, q)]. Men indholdet af denne kantede parentes er jf. Lemma 3.14 blot V_r . Muligvis er Figur 3.1 til hjælp.



Figur 3.1: En skematisk fremstilling af hvad der foregår.

π afbilder V_r diffeomorft på V , og som tidligere nævnt kommuterer π med virkningen af G (på henholdsvis $G \times M$ og G). Således er $\pi(U) = g \cdot \pi(V_r) = g \cdot V$. \square

Inden vi går videre skal et forholdsvis simpelt resultat nævnes:

Lemma 3.17. *Hvis $p: X \rightarrow Y$ er en overlejring af topologiske rum hvor X er kurvesammenhængende og Y er enkeltsammenhængende, så er p injektiv.*

Bevisskitse. En måde at vise dette på er at starte med to punkter $x, y \in X$ med $p(x) = p(y)$. På grund af kurvesammenhæng kan man vælge en kurve γ fra x til y , og $p \circ \gamma$ er så en løkke i Y . Da Y er enkeltsammenhængende er $p \circ \gamma$ nulhomotop. Vælges en homotopi (som fastholder endepunkter) fra en konstant løkke til $p \circ \gamma$ kan man løfte til denne til en homotopi forløbende i X (som igen fastholder endepunkter) fra den konstante kurve i x til γ . Hvis man regner efter finder man så at $x = y$. \square

For ethvert blad L_p ved vi altså nu om projektionen $\pi: L_p \rightarrow G$ at det er en surjektiv overlejring og en lokal diffeomorfi. Da L_p er kurvesammenhængende og G er enkeltsammenhængende må π være injektiv, og vi kan derfor konkludere at π faktisk er en *diffeomorfi*. Men det betyder at hvert blad *kun* skærer $\{e\} \times M$ i et punkt, og der er således en bijektiv korrespondance mellem punkter i M og blade af \mathcal{F} (givet ved $p \leftrightarrow L_p$).

Virkningen af G på \mathcal{F} inducerer altså en virkning af G på M , nemlig den der er givet ved relationen $L_{g \cdot p} = g(L_p)$. Med andre ord er $g \cdot p$ det punkt i M med egenskaben at bladet gennem (g, p) skærer $\{e\} \times M$ i $(e, g \cdot p)$.

Lad f være defineret som tidligere. Så har vi for alle $q \in M$ og $g \in V$ at $(g, f(g)(q)) \in L_q$, og sætter vi $q = f(g)^{-1}(p)$ har vi $(g, p) \in L_{f(g)^{-1}(p)}$. Altså kan vi for $g \in V$ "beregne" $g \cdot p$; nemlig som $f(g)^{-1}(p)$. Da V frembringer hele G ser vi således at virkningen af G på M er glat.

En virkning af en Lie-transformationsgruppe på en mangfoldighed inducerer en afbildning fra den til Lie-gruppen hørende Lie-algebra til vektorfelterne på mangfoldigheden givet som følger: Hvis $x \in \mathfrak{g}$ definerer vi et vektorfelt på M ved

$$\tilde{X}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tx) \cdot p. \quad (3.16)$$

Hvis specielt $x = x_i$ er en af de valgte basisvektorer får vi at det inducerede vektorfelt bliver

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tx_i) \cdot p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(-tx_i))^{-1}(p) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Fl}_t^{\tilde{X}_i}(p) \\ &= \tilde{X}_i(p) \end{aligned}$$

så den af virkningen inducerede afbildning stemmer (via linearitet) overens med den givne afbildning $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ (dette er grunden til det minus der optræder i ligning (3.16)).

Vi kan definere en afbildning $\eta: G \rightarrow H$ ved $\eta(g)(p) = g \cdot p$. Det er umiddelbart klart, at dette bliver en gruppehomomorfi.

Lemma 3.18. η er surjektiv, og kernen $K = \ker \eta$ er diskret i G .

Bevis. Hvis $\tilde{X} \in \mathfrak{h}$ er et fuldstændigt vektorfelt, svarer det til et element $\varphi^{-1}(\tilde{X}) = x \in \mathfrak{g}$, og vi har at

$$\begin{aligned} \eta(\exp(-tx)) &= \eta\left(\exp\left(\frac{-t}{N}x\right)^N\right) = \eta(g)^N \\ &= (f(g)^{-1})^N = (\text{Fl}_{-t/N}^{\tilde{X}})^{-N} = \text{Fl}_t^{\tilde{X}} \end{aligned}$$

hvor $N \in \mathbb{N}$ er valgt så stor at $|t/N|$ er mindre end det ε der optræder i ligning (3.13) (altså så $g = \exp(\frac{-t}{N}x) \in V$). Således rammer η enhver frembringer for H , og η er derfor surjektiv.

For at vise at K er diskret er ideen at finde en lille åben omegn U af e , således at det for $g \in U$ gælder at $\eta(g) = \text{Id}_M \implies g = e$. Så vil det for alle $k \in K$ gælde at $k \cdot U \cap K = \{k\}$ hvoraf det ønskede følger.

Lad derfor p_1, \dots, p_r være r indtil videre uspecificerede punkter i M , og lad $\text{ev}: H \rightarrow M^r$ betegne evalueringsafbildningen

$$\text{ev}(F) = (F(p_1), F(p_2), \dots, F(p_r)).$$

Vi har ikke endnu nogen differentiabel struktur på H , men vi ved at den sammensatte afbildning $\text{ev} \circ \eta: G \rightarrow H \rightarrow M^r$ er glat. Differentiallet af denne afbildning i punktet e er så en afbildning

$$T_e(\text{ev} \circ \eta): T_e G = \mathfrak{g} \rightarrow T_{(\text{ev} \circ \eta)(e)} M^r = T_{(p_1, \dots, p_r)} M^r = \bigoplus_{j=1}^r T_{p_j} M.$$

Vi kan beregne billedet af en af basisvektorerne x_i under dette differential som følger: Lad $\alpha_i: \mathbb{R} \rightarrow G$ være kurven defineret ved $\alpha_i(t) = \exp(tx_i)$. Så er $\alpha_i(0) = e$ og $\alpha_i'(0) = X_i(e) = x_i$. Derfor er

$$\begin{aligned} T_e(\text{ev} \circ \eta)(x_i) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{ev} \circ \eta \circ \alpha_i)(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{ev}(\text{Fl}_t^{\tilde{X}_i}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^{\tilde{X}_i}(p_1), \dots, \text{Fl}_t^{\tilde{X}_i}(p_r)) \\ &= (\tilde{X}_i(p_1), \dots, \tilde{X}_i(p_r)). \end{aligned}$$

Lad $\text{pr}_k : \bigoplus_{j=1}^r T_{p_j} M \rightarrow T_{p_k} M$ betegne projektionen på den k 'te summand. Så har vi at

$$\ker (T_e(\text{ev} \circ \eta)) = \bigcap_{j=1}^r \ker (\text{pr}_j \circ T_e(\text{ev} \circ \eta)).$$

Da vektorfelterne \tilde{X}_i er lineært uafhængige (specielt er de alle forskellige fra 0-vektorfeltet) er det nu ikke svært at se at det er muligt at vælge punkterne p_1, \dots, p_r induktivt på en sådan måde, at $T_e(\text{ev} \circ \eta)$ bliver injektiv: Lad $p_1 \in M$ være vilkårlig. Hvis $\ker (T_e(\text{ev} \circ \eta)) = 0$ er vi færdige. Ellers findes et element $0 \neq \sum_i \lambda_i x_i \in \ker (T_e(\text{ev} \circ \eta))$. Da $\sum_i \lambda_i \tilde{X}_i$ ikke er 0-vektorfeltet findes et p_2 hvor $\sum_i \lambda_i \tilde{X}_i(p_2) \neq 0$. Herved ses dimensionen af $\ker (T_e(\text{ev} \circ \eta))$ at falde med mindst 1, og processen kan gentages indtil $T_e(\text{ev} \circ \eta)$ bliver injektiv.

Men så medfører invers funktions-sætningen at $\text{ev} \circ \eta$ er injektiv på en lille åben omegn U af e . Hvis så et $g \in U$ har den egenskab at $\eta(g) = \text{Id}_M$ vil specielt $\eta(g)(p_i) = p_i$ for de valgte punkter p_i . Men så er $(\text{ev} \circ \eta)(g) = (p_1, \dots, p_r) = (\text{ev} \circ \eta)(e)$ hvilket som ønsket medfører at $g = e$. \square

En diskret delmængde af et andentælleligt topologisk rum er tællelig. Det betyder, at enhver diskret undergruppe af en Lie-gruppe faktisk er en Lie-undergruppe. Sætning 6.18 i [Boo] fortæller så at K er lukket som delmængde af G .

Da K desuden er normal (fordi det er kernen af en gruppehomomorfi) kan vi benytte Sætning 3.64 i [War] til at konkludere, at gruppen G/K er en Lie-gruppe. Fra en standardisomorfi er G/K isomorf med H som grupper, og ved at erklære denne isomorfi til at være en Lie-gruppeisomorfi får vi den eftertragtede Lie-gruppestruktur på H .

Vi mangler at tjekke, at denne Lie-gruppestruktur opfylder de postulerede egenskaber. Da K er en diskret mangfoldighed må den til K hørende Lie-delalgebra af \mathfrak{g} være 0. Men det betyder at Lie-algebraen for G/K (og dermed for H) er isomorf til $\mathfrak{g}/0 \cong \mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$. Desuden har vi, at projektionen $\pi : G \rightarrow G/K$ er en surjektiv submersion, og derfor er også $\pi \times \text{Id}_M : G \times M \rightarrow G/K \times M$ en surjektiv submersion. Betragt nu følgende kommutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\alpha} & M \\ \pi \times \text{Id}_M \searrow & & \nearrow \tilde{\alpha} \\ & G/K \times M & \end{array} \quad (3.17)$$

Her betegner α virkningen af G på M og $\tilde{\alpha}$ er den inducerede afbildning. Da $\tilde{\alpha} \circ (\pi \times \text{Id}_M) = \alpha$ er glat følger det nu af en universel egenskab (se 2.4 i [KMS]) vedrørende surjektive submersioner at også $\tilde{\alpha}$ er glat. Men det betyder netop at virkningen af H på M er glat, så H virker som en Lie-transformationsgruppe.

Endelig skal vi vise, at mangfoldighedsstrukturen er entydig. Lad \hat{H} betegne en Lie-gruppestruktur på gruppen H som opfylder betingelserne i Sætning 3.10, og lad $\text{Id}: \hat{H} \rightarrow H$ betegne identitetsafbildningen. Vi ønsker at vise at Id er en isomorfi af Lie-grupper. Til det formål er det tilstrækkeligt at vise at Id er kontinuert (Sætning 4.22 i [KMS]). Oven i købet kan man nøjes med at vise at Id er kontinuert på en åben omegn af $\hat{e} \in \hat{H}$, fordi så bliver den kontinuert på en åben omegn af et hvilket som helst andet punkt $\hat{h} \in \hat{H}$. Vi har nemlig $\text{Id} = \lambda_h \circ \text{Id} \circ \lambda_{\hat{h}^{-1}}$, hvor $h = \text{Id}(\hat{h}) \in H$.

Da H og \hat{H} er ens som undergrupper af $\text{Diff}(M)$ virker de på samme måde på M . Derfor vil diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \hat{H} & \xrightarrow{\text{Id}} & H \\ & \searrow \hat{ev} & \swarrow ev \\ & & M^r \end{array}$$

kommutere. Her er $\hat{ev}: \hat{H} \rightarrow M^r$ afbildningen der evaluerer i de samme r punkter som defineret i beviset for Lemma 3.18 ovenfor. Da \hat{H} var antaget at virke glat på M er \hat{ev} glat.

Ved at vælge $e \in V \subseteq H$ lille nok kan vi sikre os, at $ev: V \rightarrow M^r$ er en homeomorfi på $ev(V)$. Lad $\hat{V} = \text{Id}^{-1}(V)$. Hvis så $W \subseteq V$ er en åben delmængde er $ev(W)$ åben, og dermed er $\text{Id}^{-1}(W) = \hat{ev}^{-1}(ev(W))$ åben i \hat{H} . Således er Id kontinuert på \hat{V} , og beviset for Sætning 3.10 er fuldbragt. \square

Hermed er vi nået til vejs ende.

I think I'll stop here.
— Andrew Wiles (1993)

Litteratur

- [Boo] William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, No. 63.
- [Dup] Johan Dupont. *Differential geometry*. Lecture Notes Series, No. 62. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1993.
- [KMS] Ivan Kolář, Peter W. Michor og Jan Slovák. *Natural operations in differential geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Lee] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, bind 176 af *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.
- [Loo] Ottmar Loos. *Symmetric spaces. I: General theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [Mad] Ib Madsen. *Noter til geometri 1*. Forelæsningsnoter. Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet, Aarhus, 2002.
- [Mor] Shigeyuki Morita. *Geometry of differential forms*, bind 201 af *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [MT] Ib Madsen og Jørgen Tornehave. *From calculus to cohomology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. de Rham cohomology and characteristic classes.
- [Nar] Raghavan Narasimhan. *Analysis on real and complex manifolds*. Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 1. Masson & Cie, Éditeurs, Paris, 1968.
- [War] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, bind 94 af *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.